VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

TECHNICKÁ FYZIKA

MODUL 2

DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

STUDIJNÍ OPORA
PRO STUDIJNÍ PROGRAM ***Stavební inženýrství***
v kombinované formě studia

OBSAH

1 Úvod 5

1.1 Cíle 5

1.2 Požadované znalosti 5

1.3 Doba potřebná ke studiu 5

1.4 Klíčová slova 5

2 Dynamika hmotného bodu 6

2.1 Základní veličiny dynamiky 6

2.1.1 Hmotnost 6

2.1.2 Hybnost 6

2.1.3 Síla 6

3 Newtonovy pohybové zákony 7

3.1 První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti 7

3.2 Druhý Newtonův zákon – zákon síly 7

3.3 Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce 7

3.4 Řešení pohybové rovnice 8

3.4.1 Přímé řešení pohybové rovnice 8

3.4.2 Obrácené řešení pohybové rovnice 9

4 Práce a výkon 13

4.1 Mechanická práce 13

4.2 Mechanický výkon 15

4.2.1 Okamžitý výkon a okamžitá rychlost 15

5 Energie 16

5.1 Kinetická energie 16

5.2 Potenciální energie 17

5.2.1 Konzervativní síla 17

5.2.2 Záporné znaménko v integrálu a derivacích 18

5.2.3 Jednorozměrný případ – výpočty 18

5.2.4 Výpočty potenciální energie v silovém poli, známe-li působící sílu 18

5.2.5 Výpočty sil v silovém poli, známe-li potenciální energii 20

5.3 Zákon zachování energie 21

6 Impuls síly, moment síly a moment hybnosti 26

6.1 Impuls síly 26

6.2 Moment síly 27

6.3 Moment hybnosti 28

7 Vzorce – translační a rotační pohyb 30

8 Vzorce – mechanika soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa 31

9 Závěr – shrnutí 33

10 Studijní prameny 33

10.1 Seznam použité literatury 33
10.2 Seznam doplňkové studijní literatury.. 33
10.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny.. 33

1 Úvod

Tento učební text má název Dynamika hmotného bodu a tvoří druhý modul Mechaniky, která je vyučována v prvním ročníku povinného předmětu s názvem Fyzika. Modul definuje veličiny dynamiky a v příkladech popisuje jejich užití při řešení fyzikálních problémů, primárně s využitím pohybové rovnice. Dělení kapitol je tvořeno s ohledem na posloupnost jednotlivých veličin, které jsou postupně zaváděny. Současně se v příkladech a otázkách kontroluje připravenost studentů při samostudiu.

1.1 Cíle

Získání základních teoretických a praktických znalostí a návyků v oblasti fyziky: Dynamika hmotného bodu. Jedná se zejména o definici a rozdělení fyzikálních veličin dynamiky a základní operace při primárním užití pohybové rovnice. Cílem je též pochopení sovislosti mezi veličinami, kterou kupříkladu názorně popisuje zákon zachování pro různé typy energií.

1.2 Požadované znalosti

Předpokládají se znalosti fyziky z gymnázií a středních technicky zaměřených škol, a to jak rozsahem, tak i řazením jednotlivých částí. Modul volně navazuje na teorii z Modulu 1 Kinematika hmotného bodu. V tomto modulu se již předpokládá znalost veličin kinematiky a použití matematického aparátu pro pohybové výpočty fyzikálních veličin. Důležitá je též schopnost zavedení vztažné soustavy (souřadné soustavy) pro definici vektoru.

1.3 Doba potřebná ke studiu

5 hodin

1.4 Klíčová slova

Dynamika, hmotný bod, síla, práce, energie, výkon, hmotnost, hybnost, první věta impulzová, rozklady sil při pohybu tělesa po vodorovné a nakloněné rovině, izolovaná soustava.

2 Dynamika hmotného bodu

Zatímco kinematika je část mechaniky, která popisuje pohyb hmotných objektů, **dynamika je část mechaniky, která se zabývá příčinami pohybu a příčinami změn pohybu** hmotných objektů (hmotného bodu nebo tělesa). Příčinou pohybu a jeho změn je síla, a proto je **síla** nejdůležitější veličinou dynamiky. Dynamika využívá kinematické veličiny, jako jsou poloha nebo rychlost, jen druhotně v souvislostech.

2.1 Základní veličiny dynamiky

Základní veličiny dynamiky jsou **hmotnost**, **hybnost** a **síla**.

2.1.1 Hmotnost

Hmotnost je skalární veličina, která vyjadřuje **míru setrvačných a gravitačních vlastností tělesa**. Je to jedna ze 7 základních veličin fyziky. Základní jednotkou hmotnosti je **kg**.

2.1.2 Hybnost

Hybnost $\vec{p}$ je vektorová veličina, která vyjadřuje míru setrvačných účinků a míru gravitačních účinků tělesa dané hmotnosti m. Hybnost závisí na hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$ tělesa, směr hybnosti je stejný jako směr rychlosti. Definice hybnosti je

$$\vec{p} = m\ \vec{v}. \tag{1}$$

Jednotka hybnosti je **kg·m·s^{-1}**.

2.1.3 Síla

Síla je **vektorová** fyzikální veličina, která vyjadřuje míru **vzájemného působení těles**. Síla má za následek buďto změnu pohybového stavu těles nebo jejich deformaci. Pokud chceme sílu definovat obecně i pro relativistickou fyziku, musíme sílu definovat jako časovou derivaci hybnosti tělesa $\vec{p}$. Též uváděno jako **první věta impulzová**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{2}$$

V klasické mechanice (v případech, kdy lze zanedbat změnu hmotnosti při pohybu) přejde rovnice $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ na tvar $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\ \vec{v})}{dt} = m\ \vec{a}$, tedy

$$\vec{F} = m\ \vec{a}. \tag{3}$$

Rovnice (2) a (3) představují **druhý Newtonův zákon síly**. Jednotka síly je newton, **N=kg·m·s^{-2}**.

3 Newtonovy pohybové zákony

Newtonovy pohybové zákony jsou fyzikální zákony formulované **Isaacem Newtonem**. Popisují vztah mezi pohybem tělesa a silami, které na toto těleso působí. Newton zavedl celkem **tři pohybové zákony**, které tvoří **základ klasické dynamiky**. Tyto zákony umožňují určit, jaký bude pohyb tělesa **v inerciální vztažné soustavě** (viz. Inerciální a neinerciální soustavy v Modulu M01), jsou-li známy síly působící na těleso. Po **zahrnutí zdánlivých sil** jsou Newtonovy pohybové zákony **použitelné i v neinerciálních soustavách**.

3.1 První Newtonův zákon – zákon setrvačnosti

Těleso setrvává **v pohybu rovnoměrném přímočarém nebo klidu**, pokud není nuceno silovým působením jiných těles (tedy **vnější silou**) tento stav **změnit**. Tento zákon lze formulovat pomocí fyzikálních veličin síly a hybnosti: **Pokud na těleso nepůsobí vnější síla, jeho hybnost se nemění**.

$$\vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{p} = konst. \tag{4}$$

3.2 Druhý Newtonův zákon – zákon síly

Jestliže na těleso působí výsledná síla $\vec{F}$, pak se těleso pohybuje se zrychlením $\vec{a}$, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

$$\boxed{\vec{F} = m\,\vec{a}, \text{ odvozená z } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{5}}$$

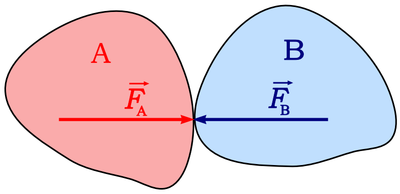
Tato rovnice je známá jako **pohybová rovnice, která vychází z první impulzové věty**. Pohybová rovnice ve tvaru (3) a (5) odvozená z (2) platí jen pro hmotný bod, nebo pro translační (posuvný) pohyb tuhého tělesa s konstantní hmotností.

3.3 Třetí Newtonův zákon – zákon akce a reakce

Jestliže těleso A působí na těleso B silou $\vec{F}_A$, potom těleso B působí na těleso A stejně velkou, ale opačnou silou $\vec{F}_B$, tedy platí

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B. \tag{6}$$

Sílu $\vec{F}_A$ nazýváme **akce** a sílu $\vec{F}_B$ nazýváme **reakce**. Třetí Newtonův zákon představuje základ části fyziky, kterou nazýváme **statika**.



obr. 1 K třetímu Newtonovu zákonu, akce a reakce

3.4 Řešení pohybové rovnice

Většinu úloh, kdy máme najít souvislost mezi příčinou pohybu, tj. působící silou a popisem pohybu, tj. polohou, rychlostí, zrychlením…, řešíme s využitím pohybové rovnice. Existují dvě úlohy:

3.4.1 Přímé řešení pohybové rovnice

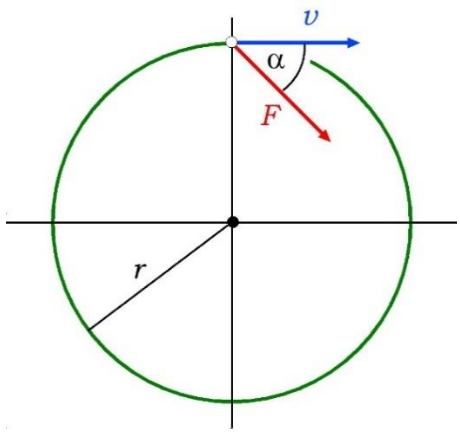
Jestliže známe trajektorii, můžeme určit působící sílu. Tato úloha je jednoduchá (dvojí derivování polohového vektoru podle času).

Postup řešení:

1. Zvolíme souřadný systém
2. Jelikož máme zadaný polohový vektor $\vec{r}$, derivováním podle času najdeme rychlost $\vec{v}$ a zrychlení $\vec{a}$.
3. Sílu najdeme přímým dosazením zrychlení $\vec{F} = m\vec{a}$
4. Napíšeme tři (nebo dvě) skalární rovnice pro F_x, F_y, F_y. Tím je úloha vyřešena.

Příklad 1

Hmotný bod o hmotnosti m = 10 kg se pohybuje po kružnici o poloměru r = 2 m, přičemž jeho dráha závisí na čase podle vztahu $s = kt^3$, kde k = 0,005 m·s^{-3}. Určete velikost výsledné síly F působící na hmotný bod, úhel α, který svírá vektor síly s vektorem rychlosti, úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení ε v čase t = 10 s.



obr. 2 K příkladu pohyb po kružnici

Řešení: Nejdříve určíme rychlost v, normálové, tečné a celkové zrychlení hmotného bodu jako

$$v = \frac{ds}{dt} = 3kt^2, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{9k^2t^4}{r}, \; a_t = \frac{dv}{dt} = 6kt$$

Pro výslednou sílu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení hmotného bodu poté platí

$$F = ma = 11{,}6 \; N \, , \omega = \frac{v}{r} = \frac{3kt^2}{r} = 0{,}75 \; s^{-1} \, , \varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{6kt}{r} = 0{,}15 \; s^{-2} \, .$$

Úhel, který svírá směr výsledné síly se směrem rychlosti potom vypočteme ze vztahu

$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a} = \frac{6r}{\sqrt{36r^2+81k^2t^6}} = 0{,}258, \; \alpha = 75^o 03'.$$

3.4.2 Obrácené řešení pohybové rovnice

Jestliže známe síly působící na těleso $\vec{F}_1, \; \vec{F}_2, \; \dots \; , \; \vec{F}_n$, můžeme najít hodnoty kinematických veličin $\vec{a}, \vec{v}, \vec{r}$. Tato úloha je obráceným řešení pohybové rovnice.

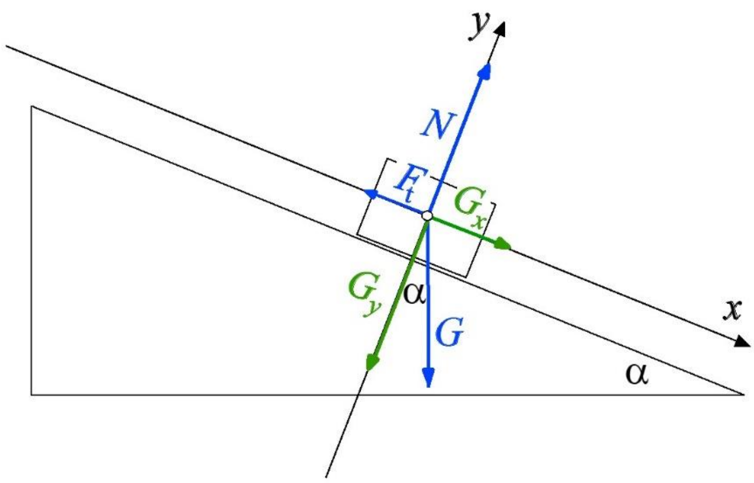
Postup řešení:

1. Zvolíme inerciální nebo neinerciální souřadný systém.
2. Najdeme reálně působící síly $\vec{F}_1, \; \vec{F}_2, \; \dots \; , \; \vec{F}_n$ a jejich výslednici $\vec{F} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$.
3. Pokud jsme zvolili neinerciální souřadný systém, k výslednici reálných sil připočítáme zdánlivé síly.
4. Zrychlení najdeme podílem $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, souřadnice zrychlení

   $a_x = \frac{F_x}{m}$, $a_y = \frac{F_y}{m}$, $a_z = \frac{F_z}{m}$.
5. Tím jsme našli zrychlení a úlohu převedli na kinematický problém, který je řešen v kapitole Kinematika hmotného bodu v odstavci **Přímočarý pohyb** a **Křivočarý pohyb**.

Příklad 1

Kvádr sklouzl dolů po nakloněné rovině dlouhé 5 m rovnoměrně zrychleným pohybem za 2 s. Součinitel smykového tření kvádru byl 0,35. Určete úhel sklonu nakloněné roviny vzhledem k vodorovné rovině.



obr. 3 K příkladu nakloněná rovina

Řešení 1: Tento příklad rozebereme podrobněji, protože jeho pochopení umožní vyřešit všechny příklady předmětu Fyzika, kde hledáme neznámý parametr pohybu na základě znalosti působících sil a opačně. Jde o silové řešení problému (na rozdíl od energetického řešení). Postup je následující:

1. ***Zavedení souřadného systému**: Na obr. 3 je souřadný systém zvolen tak, aby osa x byla totožná se směrem přímočarého pohybu těžiště tělesa, osa y bude kolmá k pohybu. Souřadný systém je v klidu a je tedy inerciální.*

2. ***Nalezení a vyjádření působících sil**: Modře zakreslené síly na obr. 3 jsou všechny reálné síly působící na těleso. Zeleně jsou zakreslené souřadnice gravitační síly, kterou jedinou musíme rozložit. Ostatní síly mají směr souřadných os. Takže souřadnicový zápis reálných sil je: $\vec{G} = (G \ \sin\alpha\,;\ -G \ \cos\alpha)$, $\vec{N} = (0;\ N)$, $\vec{F_t} = (-F_t;\ 0)$. Celková síla působící na těleso je vektorový součet reálných sil $\vec{F} = \vec{G} + \vec{F_t} + \vec{N}$. Souřadnice x celkové síly tedy bude $F_x = G \ \sin\alpha \ - F_t$, kde $N_x = 0$. Po dosazení za $G = mg$ a za $F_t = \mu \ G_y = \ \mu mg\cos\alpha$ dostaneme $F_x = mg \ \sin\alpha \ - \mu mg\cos\alpha$.*

3. ***Sestavení pohybové rovnice**: Pohybovou rovnici stačí řešit ve směru pohybu, tedy ve směru osy x. V jiných směrech nenastává pohyb. Budeme tedy řešit pohybovou rovnici $F_x = mg \ \sin\alpha \ - \mu mg\cos\alpha = ma_x$.*

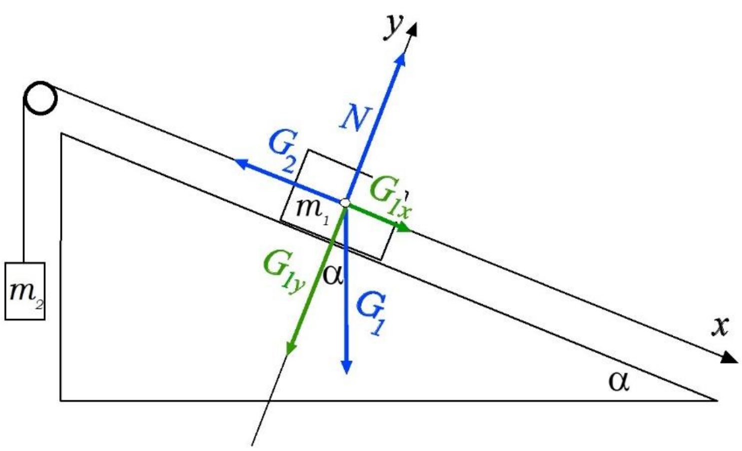
4. ***Nalezení závislosti zrychlení na sklonu**: Závislost zrychlení tělesa na nakloněné rovině na sklonu roviny získáme jednoduchou úpravou pohybové rovnice, dostaneme$a_x = g\ (\sin\alpha \ - \mu\cos\alpha)$. Totéž zrychlení získáme z kinetického zadání, když těleso urazí dráhu $x = 5\ m$ za $t = 2{,}5\ s$, pomocí rovnice z kinematiky je souřadnice rovnoměrně*

zrychleného pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční polohou $x = \frac{1}{2} a_x t^2$*, odkud* $a_x = \frac{2x}{t^2} = 2{,}5$ m·s^{-2}.

5. ***Porovnání zrychlení a nalezení výsledku****: Vyjdeme z* $a_x = g \ \sin\alpha - \mu g \cos\alpha$, cos *převedeme na* sin *úpravou* $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ *a dosazením známých hodnot* $g = 9{,}81 \ m \cdot s^{-2}$, $\mu = 0{,}35$, $a_x = 2{,}5 \ m \cdot s^{-2}$ *dostaneme kvadratickou rovnici* $1{,}12 \sin^2\alpha - 0{,}510 \sin\alpha - 0{,}058 = 0$. *Kvadratická rovnice má kořeny* $\sin\alpha$ = 0,548 *a* $\sin\alpha$ = -0,094. *Zavrhneme záporný kořen, protože úhel nakloněné roviny není záporný, proto je výsledek* $\alpha = 33{,}22°$. *Úhel sklonu nakloněné roviny vzhledem k vodorovné rovině je* $33{,}2°$.

Příklad 2

Za jak dlouho ujede na nakloněné rovině vozík o hmotnosti 120 kg dráhu s = 45 m? Vozík je spojen se závažím hmotnosti 30 kg visícím přes kladku. Sklon nakloněné roviny je $\alpha = 30°$ *(obr. 4).*



obr. 4 K příkladu nakloněná rovina s kladkou

Řešení 2: Snažte se maximálně porovnat řešení příkladu 2 s řešením příkladu 1. Pokud najdete společné myšlenky, naučili jste se obrácené řešení pohybové rovnice.

1. ***Zavedení souřadného systému:*** *Na obr. 4 je souřadný systém zvolen tak, aby osa* x *byla totožná se směrem přímočarého pohybu těžiště tělesa, osa* y *bude kolmá k pohybu. Souřadný systém je v klidu a je tedy inerciální.*

2. *Nalezení a vyjádření působících sil: Modře zakreslené síly na obr. 4 jsou všechny reálné síly působící na těleso. Zeleně jsou zakreslené souřadnice gravitační síly, kterou jedinou musíme rozložit. Ostatní síly mají směr souřadných os. Takže souřadnicový zápis reálných sil je:* $\vec{G}_1 = (G_1 \ \sin\alpha; \ -G_1 \ \cos\alpha)$, $\vec{N} = (0; \ N)$, $\vec{G}_2 = (-G_2; \ 0)$. *Celková síla působící na těleso je vektorový součet reálných sil* $\vec{F} = \vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{N}$. *Souřadnice* x *celkové síly tedy bude* $F_x = G_1 \ \sin\alpha \ - G_2$*, kde* $N_x = 0$.

Po dosazení za $G_1 = m_1 g$ *a za* $G_2 = m_2 g$ *dostaneme* $F_x = m_1 g \ \sin\alpha \ - m_2 g$.

3. *Sestavení pohybové rovnice: Pohybovou rovnici stačí řešit ve směru pohybu, tedy ve směru osy* x*. V jiných směrech nenastává pohyb. Obě tělesa se pohybuje jako jeden systém o hmotnosti* $m_1 + m_2$ *se zrychlením* a_x *a rychlostí* v_x*. Nesestavujeme tedy dvě pohybové rovnice, ale jednu. Budeme řešit pohybovou rovnici* $F_x = m_1 g \ \sin\alpha \ - m_2 g = (m_1 + m_2) a_x$.
4. *Nalezení závislosti zrychlení na čase: Zrychlení tělesa na nakloněné rovině dostaneme úpravou poslední rovnice na* $a_x = \frac{g(m_1 \sin\alpha \ - m_2)}{m_1 + m_2}$*. Totéž zrychlení získáme z kinematiky z rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu s nulovou počáteční rychlostí a nulovou počáteční polohou* $x = \frac{1}{2} a_x t^2 \ \Rightarrow \ a_x = \frac{2x}{t^2}$*. Porovnáním* $\frac{2x}{t^2} = \frac{g(m_1 \sin\alpha \ - m_2)}{m_1 + m_2}$ *dostaneme výsledek* $t = \sqrt{\frac{2x(m_1 + m_2)}{g(m_1 \sin\alpha - m_2)}}$.

   Dosazení numerických hodnot již proveďte sami.

Kontrolní otázky

1. *Čím se zabývá dynamika?*
2. *Jaké jsou základní veličiny dynamiky?*
3. *Co popisuje první Newtonův zákon?*
4. *Co popisuje druhý Newtonův zákon?*
5. *Co popisuje třetí Newtonův zákon?*

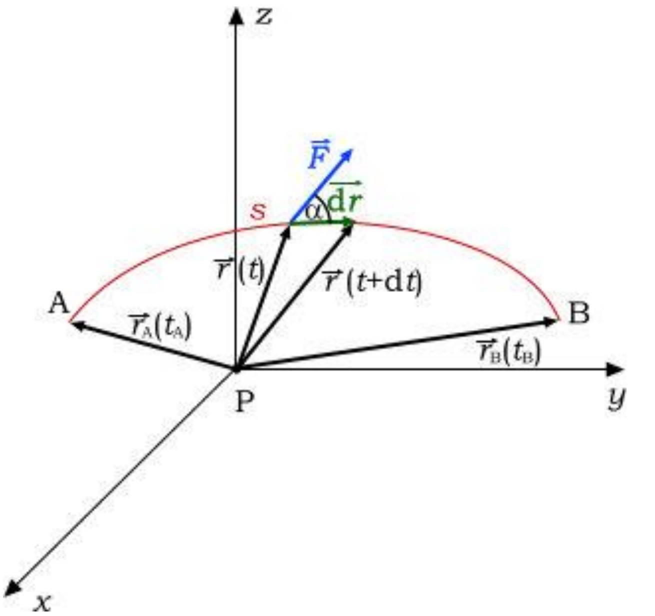
4 Práce a výkon

4.1 Mechanická práce

Mechanická práce je skalární veličina, která popisuje dráhové účinky síly. Abychom mohli vykonat práci, musíme na hmotný objekt (hmotný bod nebo těleso) působit **silou** po určité **dráze**. **Jednotkou práce** v soustavě SI je **joule** (J).

$$1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{joule} = 1\ \mathrm{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-2}.$$

Definici práce si vysvětlíme na obr. 5. Předpokládejme, že síla $\vec{F}$ koná práci po dráze s. Znamená to, že začátek působení síly je v bodě A, konec působení síly po dráze s je v bodě B.



obr. 5 Práce vykonaná silou $\vec{F}$ po dráze s

Nejdříve však vykonejme práci silou $\vec{F}$ při velmi malém posunutí $d\vec{r}$ (za velmi krátký čas dt). Pak síla $\vec{F}$ koná elementární práci dW, kterou definujeme skalárním součinem síly $\vec{F}$a posunutí $d\vec{r}$

$$dW = \vec{F}\ d\vec{r}. \qquad (7)$$

Elementární práci můžeme vyjádřit rovněž pomocí tečné složky síly. Skalární součin v rovnici (7) vyjádříme pomocí součinu cosinu úhlu, který svírají oba vektory s velikostí obou vektorů

$$dW = |\vec{F}|\ |d\vec{r}|\, cos\,\alpha = F_t ds. \qquad (8)$$

Z toho vyplývá, že **práci koná pouze tečná složka síly** k dráze ve směru pohybu $F_t = |\vec{F}| \ \cos\alpha$.

Chceme-li rozšířit definici z elementární práce na práci konanou na celé délce dráhy, provedeme integraci rovnice (8) v mezích od nulové práce, což odpovídá poloze o polohovém vektoru $\vec{r}_A$ do celkově vykonané práce W, což odpovídá poloze o polohovém vektoru $\vec{r}_B$

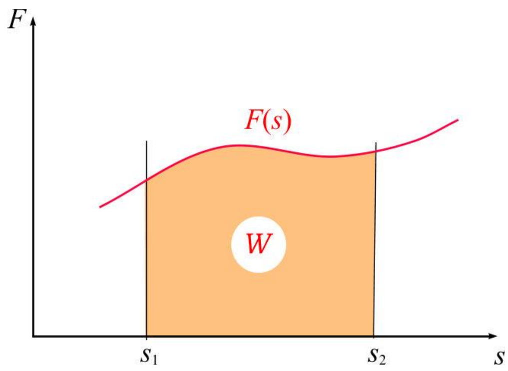
$$\int_0^W dW = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\ d\vec{r}. \tag{9}$$

Výsledkem bude **definice mechanické práce rovnicí**

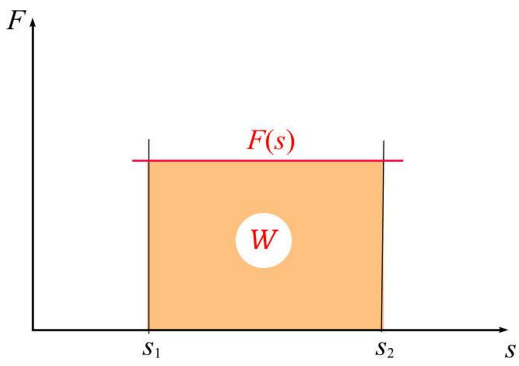
$$W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\ d\vec{r}. \tag{10}$$

Práce vykonaná silou $\vec{F}$ po dráze s z bodu A do bodu B **je dána určitým integrálem** skalárního součinu **síly** $\vec{F}$a **posunutí polohového vektoru** $d\vec{r}$**v mezích polohových vektorů bodů** $\mathbf{A}$ **a** $\mathbf{B}$. Výsledkem je skalár $W = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{F}\ d\vec{r}$

Mechanickou práci lze určit také graficky, zobrazíme-li závislost velikosti síly, která koná práci, na dráze do pravoúhlého systému souřadnic (viz. obr. 6). Svírá-li síla se směrem pohybu tělesa úhel, zobrazujeme do grafu pouze tečnou složku síly. Práce W vykonaná silou na dráze s odpovídá obsahu plochy pod křivkou, která znázorňuje závislost velikosti síly na dráze. V případě konstantní síly je grafem závislosti na dráze úsečka, a tedy práce vykonaná na dráze odpovídá obsahu obdélníka (obr. 7).



obr. 6 Grafické vyjádření integrálu. Plocha pod křivkou je práce.



obr. 7 Grafické vyjádření práce v případě konstantní síly (konstantní velikosti i směru).

4.2 Mechanický výkon

Mechanický výkon P je práce vykonaná za jednotku času.

Okamžitý výkon se hodnotí za zanedbatelně malý čas $\mathrm{d}t$. Za předpokladu, že platí dříve zavedené veličiny **definujeme okamžitý výkon *P*** rovnicí

$$P = \frac{dW}{dt}. \tag{11}$$

Tuto rovnici můžeme vyslovit takto

Okamžitý výkon je **časová derivace práce**.

Jednotkou výkonu je W

$$1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{watt} = 1\ J \cdot s^{-1} = 1\ \mathrm{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-3}.$$

4.2.1 Okamžitý výkon a okamžitá rychlost

Okamžitý mechanický výkon můžeme vyjádřit působící sílou a rychlostí hmotného bodu nebo tělesa. Rovnici získáme jednoduchou úpravou.

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F}\ d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\ \vec{v}. \tag{12}$$

Okamžitý mechanický výkon je skalární součin vektorů síly a rychlosti.

Kromě okamžitého výkonu používáme i průměrný výkon za delší časové období t. Průměrný výkon zjistíme podílem vykonané práce W za čas t.

$$\overline{P} = \frac{W}{t}. \tag{13}$$

Kontrolní otázky

1. *Co popisuje fyzikální veličina práce a jaká je její jednotka?*
2. *Jak je definován mechanický výkon?*
3. *Jaká je jednotka mechanického výkonu?*
4. *Jak určíme okamžitý výkon?*

5 Energie

Energie je skalární fyzikální veličina, která popisuje schopnost hmoty (látky nebo pole) konat práci.

Abychom mohli vykonat práci, musíme mít **energii**. Je to podobné jako když musíme mít peníze, abychom někoho zaplatili za to, že pro nás pracoval. Celková mechanická energie objektu je součet jeho kinetické a potenciální energie. **Jednotkou energie** v soustavě SI je **joule** (J)

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{joule} = 1\ \mathrm{kg} \cdot m^2 \cdot s^{-2}.$$

V oblasti atomové fyziky a elektroniky se pro energii používá vedlejší jednotka **elektronvolt** (eV)

$$1\ \mathrm{eV} = 1\ \mathrm{elektronvolt} = 1{,}60 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{J}.$$

Energie existuje pouze jedna, ale projevuje se v různých formách.

Podle druhu působící síly rozlišujeme energii na mechanickou (pohybová, polohová). Dále elektrickou energii, magnetickou energii, energii záření, energii vln, energii pole, vnitřní energii (tepelnou, jadernou, chemickou).

5.1 Kinetická energie

Kinetická energie je energie pohybová. Vyjadřuje skutečnost, že pohybující se těleso je schopné konat práci jako důsledek svého pohybu, např. nárazem na okolní objekt.

Kinetická energie hmotného bodu, těles zanedbatelných rozměrů, nebo těles pohybujících se bez rotace (takový pohyb se nazývá translační nebo posuvný) je definována vztahem

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2. \tag{14}$$

Pokud těleso rotuje, je třeba zvážit i rotační formu kinetické energie (více kapitola o pohybech těles). V případě rotujících těles, které zároveň vykonávají i translační pohyb je rychlost v ve vztahu rychlost těžiště tělesa. Tím získáme translační kinetickou energii tělesa. Výpočet podle rovnice (14) platí pouze v klasické fyzice, kde rychlost těles je mnohem menší než rychlost světla.

Každý druh energie nám umožňuje provádět jiné úkony nebo se projevuje v našem každodenním životě. Například bez elektrické energie pro svícení a napájení spotřebičů se již žádná domácnost neobejde. S magnetickou energií se setkáme u magnetů, které nám slouží v domácnosti, ale také se hojně využívají v průmyslu. Energii záření vnímáme ve formě světla a podobně. My se zde věnujeme pouze energii mechanické.

5.2 Potenciální energie

Potenciální energie je rovna práci, kterou musíme vykonat, abychom přemístili objekt z polohy $\vec{r}_0$, kde $E_p = 0$, do polohy $\vec{r}$, ve které chceme potenciální energii určit. Poloha $\vec{r}_0$ **referenčního bodu** je **libovolná**, tj. zvolíme si ji podle potřeby, podobně jako volíme polohu počátku vztažného souřadného systému. Většinou tuto polohu volíme tak, aby výpočty byly co nejsnazší.

Potenciální energie má svoji podstatu v poloze nebo konfiguraci. Ne každý objekt je však schopen vykonat práci v důsledku své polohy. Aby tomu tak bylo, musí se nacházet v poli konzervativních sil.

Potenciální energii tedy definujeme následujícím integrálem

$$E_p(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{15}$$

Je možný i opačný výpočet, sílu působící na objekt zjistíme jako **gradient potenciální energie**,

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathrm{grad} E_p. \tag{16}$$

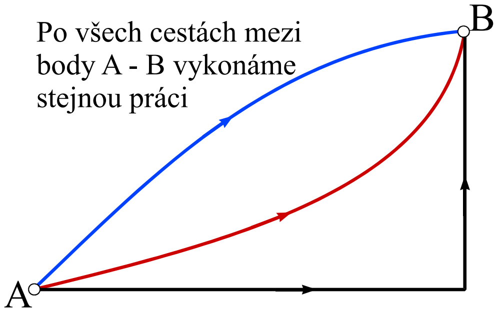
kde

$$-\mathrm{grad} E_p = \left(-\frac{\partial E_p}{\partial x}, -\frac{\partial E_p}{\partial y}, -\frac{\partial E_p}{\partial z}\right). \tag{17}$$

Poslední vztah říká, že síla působícího silového pole míří vždy ve směru největšího spádu potenciální energie a má snahu potenciální energii snížit.

5.2.1 Konzervativní síla

Konzervativní síla je síla, jejíž práce je **nezávislá na cestě**. Tato práce závisí pouze na počátku a konci cesty, tedy na bodech A, B na obr. 8. Jinými slovy, práce vykonaná mezi body A, B je **po všech možných cestách stejná**. Důsledek je ten, že práci můžeme konat z bodu A do bodu B po jedné dráze a zpět do bodu B po jiné dráze, aniž bychom ztratili nebo navýšili energii objektu, na který působí konzervativní síla. **Práce konzervativní síly po uzavřené dráze je vždy nulová**.



obr. 8 Práce vykonaná po různých cestách je v poli konzervativních sil stejná

Konzervativnímu silovému poli odpovídá druh potenciální energie.

Konzervativní silová pole jsou ta, která na objekty působí pouze konzervativními silami. Jsou to např. gravitační pole, elektrické pole, magnetické pole, aj. V gravitačním poli pak hovoříme o **gravitační potenciální energii**, v elektrickém poli o **elektrické potenciální energie**, v magnetickém poli o **magnetické potenciální energie**. Objekt může mít rovněž **elastickou potenciální energii** jako následek silového působení napjaté pružiny nebo jiné plastické deformace. Pak je potřebným konzervativním silovým polem oblast, ve které na těleso působí síla pružiny.

5.2.2 Záporné znaménko v integrálu a derivacích

Síla $\vec{F}$ v definici potenciální energie (15) je **síla působícího silového pole**. Je to např. **gravitační síla**, **síla pružiny**, aj. Potenciální energie E_p se potom rovná práci, kterou musíme vykonat **proti síle silového pole**, chceme-li přemístit objekt z referenčního bodu (kde E_p=0) do polohy $\vec{r}$, ve které potenciální energii definujeme. Síla, kterou musíme působit, abychom objekt v silovém poli přemístili, musí být stejná jako síla působícího pole, ale opačného směru. To je důvod záporného znaménka v integrálu (15) a derivacích (16).

5.2.3 Jednorozměrný případ – výpočty

Dynamické úlohy se často řeší jednorozměrně (pouze v jediném směru). Integrální vyjádření definice potenciální energie pak přejde na tvar

$$E_p(x) = -\int_{x_0}^{x} F(x)dx \qquad (18)$$

a výpočet síly silového pole se pro jednorozměrný případ zjednoduší na tvar

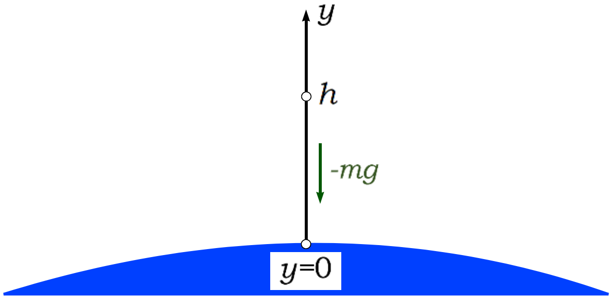
$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx}. \qquad (19)$$

5.2.4 Výpočty potenciální energie v silovém poli, známe-li působící sílu

Často známe sílu silového pole a potřebujeme určit potenciální energii. Jestliže je tato síla známa a je konzervativní, potom získáme potenciální energii integrací, jak naznačují rovnice (18) a (19). Uvedeme několik konkrétních příkladů.

Gravitační potenciální energie nízko nad povrchem Země

Předpokládejme, že známe gravitační sílu nízko nad povrchem Země $F = -mg$ (nízko se rozumí $h << R$, kde R poloměr Země). Záporné znaménko je uvedeno proto, že síla působí svisle dolů, tedy proti směru souřadné osy y.



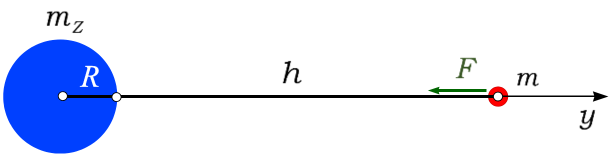
obr. 9 K odvození potenciální energie nad povrchem Země

Dále si zvolíme nulovou potenciální energii $E_p = 0$ na povrchu Země, kde $y = 0$. Potom potenciální energii získáme integrací síly $F = -mg$

$$E_p(h) = -\int_0^h F(y)dy = -\int_0^h -mgdy = mg\int_0^h dy = mgh. \qquad (20)$$

Gravitační potenciální energie vysoko nad Zemí (satelit)

Ve druhém případě předpokládejme, že těleso, jehož potenciální energii chceme určit, se nachází vysoko nad Zemi, například v kosmu.



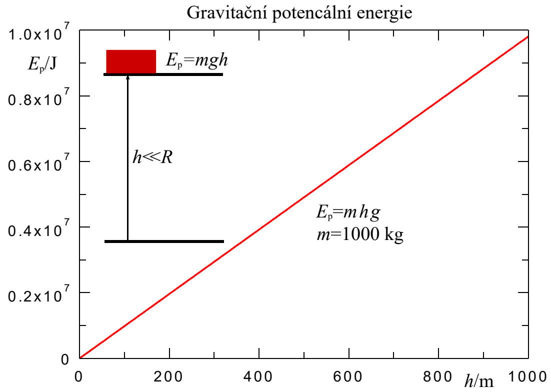
obr. 10 K odvození potenciální energie satelitu

Gravitační sílu nyní nemůžeme psát s konstantním gravitačním zrychlením g, proto ji napíšeme ve tvaru Newtonova gravitačního zákona, který platí pro libovolné vzdálenosti těles

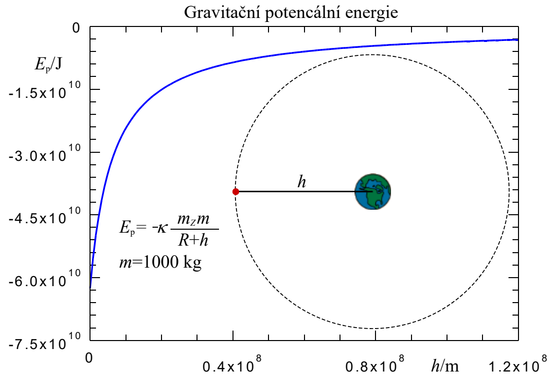
$$F = -\kappa\frac{m_Z m}{(R+h)^2}. \qquad (21)$$

Záporné znaménko je uvedeno opět proto, že síla působí směrem k Zemi, tedy proti směru souřadné osy y. V tomto případě bude jednodušší, když si zvolíme $E_p = 0$ nekonečně daleko od Země, kde $y \to \infty$. Potom může být gravitační potenciální energie získána integrací

$$\begin{aligned} E_p(y) &= -\int_0^h F(y)dy = -\int_0^h -\kappa\frac{m_Z m}{(R+y)^2}dy = \\ &= \kappa m_Z m\int_0^h \frac{1}{(R+y)^2}dy = -\kappa\frac{m_Z m}{R+h}. \end{aligned} \qquad (22)$$



obr. 11 Gravitační potenciální energie v blízkosti povrchu Země

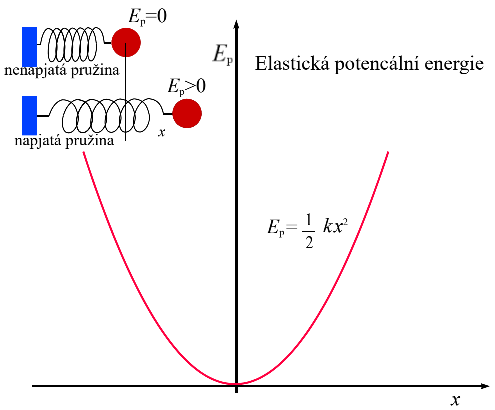


obr. 12 Gravitační potenciální energie vysoko nad Zemí (satelit)

Elastická potenciální energie tělesa na pružině

Při řešení tohoto problému předpokládejme, že je známa síla, kterou působí pružina na těleso. Tato direktivní síla má tvar $F(x) = -kx$ a je konzervativní. Elastickou potenciální energii opět získáme integrací

$$E_p(x) = -\int_0^x F(x)dx = -\int_0^x -kxdx = k\int_0^x xdx = \frac{1}{2}kx^2. \quad (23)$$



obr. 13 Elastická potenciální energie tělesa na pružině

5.2.5 Výpočty sil v silovém poli, známe-li potenciální energii

Pokud známe funkci potenciální energie, lze určit sílu působícího silového pole. Například, pokud víme, že potenciální energie tělesa na pružině je

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 \quad (24)$$

působící sílu vypočteme jako

$$F(x) = -\frac{dE_p}{dx} = -\frac{1}{2}\cdot 2\cdot kx = -kx. \quad (25)$$

Tato síla se v mechanice kmitů nazývá **direktivní síla** (řídící síla).

Podobně, víme-li, že potenciální energie tělesa blízkém okolí Země je

$$E_p(h) = mgh. \tag{26}$$

působící sílu vypočteme jako

$$F(h) = -\frac{dE_p}{dh} = \frac{d(mgh)}{dh} = mg, \tag{27}$$

což je známá gravitační síla.

5.3 Zákon zachování energie

Energie může existovat v mnoha formách. V tomto dokumentu jsou popsány jen formy **mechanické energie**. Kromě mechanické energie existují ještě jiné formy, např. **elektrická energie**, **magnetická energie**, **tepelná energie, vnitřní energie látek**, aj. Každá z nich může mít více dalších forem. Celková energie je součet energií všech forem. **Zákon zachování energie zní**:

> Celková energie **izolované soustavy** zůstává konstantní při všech dějích, které v ní probíhají.

Izolovaná soustava je soustava, která nepodléhá účinkům okolních objektů.

Zákon zachování mechanické energie lze též definovat takto:

> Jestliže těleso nebo hmotný systém nepodléhají účinkům okolí, pak součet kinetické a potenciální energie částic, z nichž se skládá, zůstává stálý. To znamená, že v soustavě se může měnit jeden druh energie v druhý.

Těleso tedy například nesmí ztrácet svoji mechanickou energie přeměnou na tepelnou energii vznikající třením při jeho pohybu. Posledně jmenovaný zákon lze popsat rovnicí

$$E = E_k + E_p = konst. \tag{28}$$

Příklad 1 [8]

Auto o hmotnosti $1\ 400\ \mathrm{kg}$ *se rozjíždí po rovné silnici. Na dráze délky* $1\ 000\ \mathrm{m}$ *dosáhne určité rychlosti. Na auto působí tahová síla o velikosti* $1\ 700\ \mathrm{N}$ *a proti směru pohybu odporová síla* $100\ \mathrm{N}$. *Určete zrychlení auta a rychlost, které na konci ujeté dráhy dosáhlo. Poznámka: Vzhledem k tomu, že se jedná o přímočarý pohyb, budeme dále pro zjednodušení mluvit jen o zrychlení a rychlosti, i když budeme mít na mysli jen jejich velikosti.*

$m = 1\ 400\ \mathrm{kg}$	*hmotnost auta*
$S = 1\ 000\ \mathrm{m}$	*uražená dráha*
$F_m = 1\ 700\ \mathrm{N}$	*tahová síla motoru*
$F_o = 100\ \mathrm{N}$	*odporová síla*
$a = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-2}})$	*zrychlení*
$v = ?\ (\mathrm{m \cdot s^{-1}})$	*rychlost, které auto dosáhne*

Výpočet zrychlení:

Velikost výsledné síly působící na auto je rovna rozdílu velikostí tahové síly motoru a odporové síly:

$$F = F_m - F_o. \tag{29}$$

Zrychlení určíme z 2. Newtonova zákona, podle kterého je výsledná síla působící na těleso přímo úměrná zrychlení tělesa:

$$F = ma. \tag{30}$$

Ze vztahu (29) dosadíme za F a vyjádříme zrychlení:

$$F_m - F_0 = ma, \tag{31}$$

$$a = \frac{F_m - F_o}{m}. \tag{32}$$

Číselně:

$$a = \frac{F_m - F_o}{m} = \left(\frac{1\ 700 - 100}{1\ 400}\right) m \cdot s^{-2} \cong 1{,}14 m \cdot s^{-2}. \tag{33}$$

Výpočet dosažené rychlosti:

Vyjdeme z definičního vztahu pro zrychlení a vztahu pro výpočet dráhy rovnoměrně zrychleného pohybu.

Zrychlení a definujeme vztahem:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{d\,v}}{d\,t}, \tag{34}$$

Což je vzorec pro výpočet okamžité rychlosti a čteme jej jako derivace rychlosti podle času. Vzhledem k tomu, že náš pohyb začínal z klidu, potom můžeme vyjádřit čas v tomto tvaru (bez značení vektorů):

$$t = \frac{v}{a}. \tag{35}$$

Pro dráhu S rovnoměrně zrychleného pohybu platí:

$$S = \frac{1}{2} a t^2. \tag{36}$$

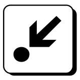
Dosadíme do vztahu (36) ze vztahu (35) a vyjádříme rychlost v:

$$S = \frac{1}{2} a \left(\frac{v}{a}\right)^2 = \frac{v^2}{2a} \Rightarrow v = \sqrt{2aS}. \tag{37}$$

Číselně:

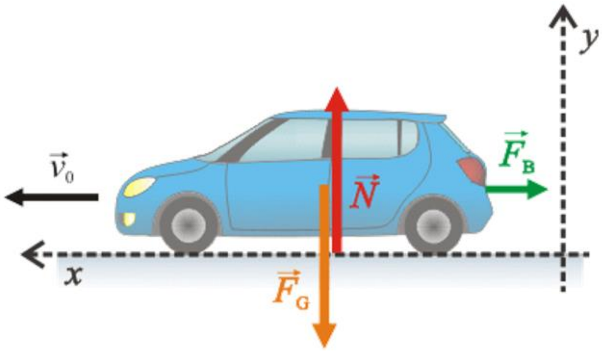
$$S = \sqrt{2aS} \cong \left(\sqrt{2 \cdot 1{,}14 \cdot 1000}\right) m \cong 47{,}8 m \cdot s^{-1} = 172 \mathrm{km} \cdot h^{-1}. \tag{38}$$

Příklad 2 [8]



Auto o hmotnosti m se pohybuje po vodorovné silnici rovnoměrně přímočaře rychlostí o velikosti v_0. V čase $t = 0$ s na něj začala působit proti směru pohybu konstantní brzdná síla F_b. Předpokládejte, že v čase $t = 0$ s byla souřadnice $x = 0$ m. Určete a) Jak se s časem mění velikost rychlosti $v(t)$ a souřadnice auta $x(t)$. b) čas t_z, za který se auto zastaví, a dráhu x_z, kterou přitom urazí. Obecné řešení bez číselných hodnot.

M	*hmotnost auta*
v_0	*počáteční rychlost auta*
F_b	*konstantní brzdná síla*
$v(t) = ?$	*průběh rychlosti auta*
$x(t) = ?$	*průběh souřadnice auta*
$t_z = ?$	*čas zastavení auta*
$x_z = ?$	*dráha zastavení auta*



obr. 14 K příkladu 2, rozklad vektorů v souřadné soustavě

Řešení:

Nejprve si rozmyslíme, jaké síly působí na auto a napíšeme pro něj pohybovou rovnici. Na auto působí následující síly:

$\vec{F}_B$*…brzdná síla*
$\vec{F}_G$*…tíhová síla*
$\vec{N}$*…normálová síla, kterou na auto působí podložka*

Síla podložky N působí na kola auta, do obrázku kreslíme výslednici těchto sil.

Pohybová rovnice pro auto je:

$$\vec{F}_B + \vec{F}_G + \vec{N} = m \cdot \vec{a}. \qquad (39)$$

Rovnici (38) přepíšeme skalárně:

$$x: -F_B = m \cdot a, \qquad (40)$$

$$y: N - F_G = 0. \qquad (41)$$

Z obrázku můžete vidět, proč je v rovnici (40) *znaménko mínus. Brzdná síla působí proti směru pohybu auta. Síly* $\vec{F}_G$ *a* $\vec{N}$*jsou kolmé na brzdnou sílu* $\vec{F}_B$*,*

jsou stejně veliké opačného směru a jejich výslednice je nulová. Zrychlení je ve směru osy y nulové.

Výpočet zrychlení:

Ze vztahu (40) *pro zrychlení dostáváme:*

$$a = -\frac{F_B}{m}. \tag{42}$$

Zrychlení auta je konstantní. Jelikož auto vlivem brzdné síly F_B *zpomaluje, zrychlení je záporné.*

Průběh v(t):

Integrací zrychlení ze vztahu (42) *získáme závislost rychlosti na čase:*

$$v(t) \; = \int a dt = \int -\frac{F_B}{m} \; dt = -\frac{F_B}{m} t + K. \tag{43}$$

K je konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek:

V čase $t = 0$ s *byla rychlost* $v = v_0$. *Dosadíme-li* $t = 0$ s *do vztahu* (43)*, pak musí platit:* $v_0 = 0 + K$ *a tedy* $v_0 = K$.

Přepíšeme-li rovnici (43)*, získáme závislost rychlosti auta na čase:*

$$v(t) \; = -\frac{F_B}{m} t + v_0. \tag{44}$$

Průběh x(t):

Integrací rychlosti ze vztahu (44) *získáme závislost souřadnice na čase:*

$$\begin{aligned} x(t) \; &= \int v(t) dt = \int \left(-\frac{F_B}{m} t + v_0 \right) \; dt \\ &= -\frac{F_B}{2m} t^2 + v_0 t + C. \end{aligned} \tag{45}$$

C je konstanta, kterou určíme z počátečních podmínek:

V čase $t = 0$ s *byla souřadnice* $x = 0$. *Dosadíme-li* $t = 0$ s *do vztahu* (45)*, pak musí platit:* $0 = 0 + C$ *a tedy* $C = 0$.

Čas zastavení t_z:

V okamžiku zastavení bude rychlost nulová. Dosazením do vztahu (44) *tak pro čas zastavení dostaneme:*

$$0 \; = -\frac{F_B}{m} t_z + v_0. \tag{46}$$

Odtud:

$$t_z \; = \frac{m v_0}{F_B}. \tag{47}$$

Dráha zastavení x_z:

Dráhu zastavení dostaneme dosazením vztahu (47) *pro čas zastavení do vztahu pro závislost souřadnice na čase* (45)*:*

$$x_z \; = -\frac{F_B}{2m} t_z^2 + v_0 t_z = -\frac{F_B}{2m} t_z^2 \left(\frac{m v_0}{F_B} \right)^2 + v_0 \left(\frac{m v_0}{F_B} \right). \tag{48}$$

A úpravou dostaneme finální tvar rovnice pro výpočet dráhy

$$x_z = \frac{mv_0^2}{2F_B}. \tag{49}$$

Kontrolní otázky

?

1. *Co popisuje fyzikální veličina energie?*
2. *Jaká je jednotka energie?*
3. *Co je to kinetická energie a jak se vypočítá?*
4. *Co je to potenciální energie a jak se vypočítá?*
5. *Co je to konzervativní síla?*
6. *Jaká je práce konzervativních sil po uzavřené dráze?*
7. *Jak zní zákon zachování energie?*
8. *Co je to izolovaná soustava?*

6 Impuls síly, moment síly a moment hybnosti

6.1 Impuls síly

Pro vystižení časového účinku síly se zavádí další veličina s názvem impuls síly, která se označuje $\vec{I}$. Impuls $\vec{I}$síly $\vec{F} = \vec{F}(t)$, která působí na hmotný bod po časový interval $\langle t_1, t_2 \rangle$, je definován určitým integrálem

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt. \qquad (50)$$

Impuls a hybnost jsou vázány vztahem

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \vec{I}. \qquad (51)$$

Čteme takto: změna hybnosti hmotného bodu je rovna impulsu síly, který byl vykonán na hmotný bod.

Hybnost je definována již v rovnici (1) a pro zopakování má tento tvar

$$\vec{p} = m\, \vec{v}. \qquad (52)$$

V rovnici (51) je $\vec{p}_1$ hybnost hmotného bodu v čase t_1, od kterého začala působit síla $\vec{F}$ vytvářející impuls $\vec{I}$ a $\vec{p}_2$ hybnost hmotného bodu v čase t_2, kdy přestala působit síla $\vec{F}$. Vyjádření i důkaz vycházejí z druhého Newtonova zákona.

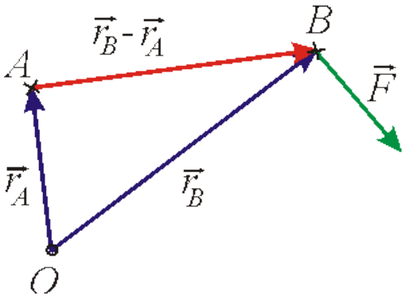
Impuls síly je rovný změně hybnosti hmotného bodu. Změna hybnosti má stejný směr jako impuls síly. Impuls síly vyjadřuje časový účinek síly. Abychom uvedli hmotný bod do pohybu, je třeba působit malou silou po dlouhý čas, nebo stačí kratší časový interval působit silou větší.

6.2 Moment síly

Mějme sílu $\vec{F}$ působící v bodě B. Poloha bodu B je dána polohovým vektorem $\vec{r}_B$. Dále mějme bod A, jehož poloha je dána vektorem $\vec{r}_A$ (viz. obr. 15). Momentem $\vec{M}$ síly $\vec{F}$ vůči bodu A nazýváme výraz

$$\vec{M} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}. \tag{53}$$

Velikost vektoru $\vec{M}$ je dán výrazem $\left|(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}\right|$, což odpovídá elementární definici momentu síly, která moment zavádí jako součin velikosti a ramene síly.

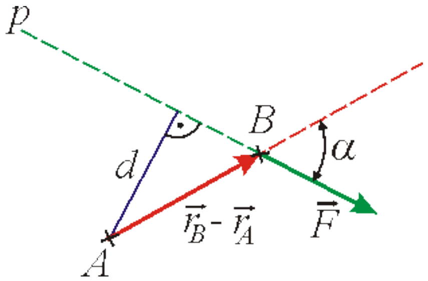


obr. 15 K vysvětlení momentu síly

Velikost vektoru$\vec{M}$potom vypočítáme takto

$$\vec{M} = \left|(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}\right| = \left|\vec{F}\right| \cdot |\vec{r}_B - \vec{r}_A| \sin\alpha, \tag{54}$$

kde α je úhel mezi kladnými směry vektorů $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ a $\vec{F}$ (viz obr. 16). Uvědomíme-li si rovnost vrcholových úhlů, je z obr. 16 zřejmé, že $|\vec{r}_B - \vec{r}_A| \sin\alpha = d$. Symbolem d je označena kolmá vzdálenost bodu A od přímky p, v níž působí síla $\vec{F}$, tedy ta veličina, která bývá nazývána ramenem síly.



obr. 16 K vysvětlení momentu síly

Rozšíření elementární definice, která zavádí moment síly jakožto vektor určený výrazem (53), umožní rozlišit různě prostorově orientované momenty sil. Moment síly zavedený definiční rovnicí (53) je vektor kolmý na rovinu určenou vektory $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ a $\vec{F}$. Je-li soustava souřadnic, ve které vektorový součin vyjadřujeme, soustavou pravotočivou, tvoří vektory $\vec{r}_B - \vec{r}_A$, $\vec{F}$ a $\vec{M}$ v uvedeném pořadí pravotočivý systém.

6.3 Moment hybnosti

Obdobně jako moment síly zavádíme i moment hybnosti, který označujeme $\vec{b}$. Hmotný bod, jehož hybnost je $\vec{p}$, se nachází v bodě B o polohovém vektoru $\vec{r}_B$ Momentem hybnosti $\vec{b}$ tohoto hmotného bodu vůči bodu A, jehož polohový vektor je $\vec{r}_A$, nazveme výraz

$$\vec{b} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{p}. \tag{55}$$

Určujeme-li moment síly působící v místě o polohovém vektoru $\vec{r}$ vůči počátku soustavy souřadnic, zjednoduší se výraz (53) na tvar

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \tag{56}$$

Obdobně, nachází-li se hmotný bod o hybnosti $\vec{p}$ v místě o polohovém vektoru $\vec{r}$ a zjišťujeme-li jeho moment hybnosti vůči počátku soustavy souřadnic, zjednoduší se výraz (55) na tvar

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}. \tag{57}$$

Působí-li na hmotný bod síla $\vec{F}$, jsou moment $\vec{M}$ této síly a moment hybnosti $\vec{b}$ hmotného bodu počítané vůči témuž vztaženému bodu vázány rovnicí

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}.} \tag{58}$$

Tato rovnice se nazývá **druhá impulzová věta** a společně s rovnicí (5) tvoří základ pro definování pohybových stavů při translačním a otáčivém pohybu.

Důkaz tvrzení (58) se provádí přímým výpočtem výrazu $\frac{d\vec{b}}{dt}$ (čte se jako časová změna momentu hybnosti). Z definice (55) vektoru $\vec{b}$ a z pravidla o derivaci vektorového součinu (viz. modul 1) plyne

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \frac{d}{dt}[(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{p}] = \left[\frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A)\right] \times \vec{p} + (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \tag{59}$$

Polohu vztažného bodu A budeme pokládat za stálou a tedy vektor $\vec{r}_A$ za časově konstantní vektor. Potom $\frac{d(\vec{r}_B - \vec{r}_A)}{dt} = \frac{dr_B}{dt}$. Výraz $\frac{dr_B}{dt}$ značí rychlost, s jakou se mění poloha bodu B, tedy rychlost $\vec{v}$ hmotného bodu. Hybnost $\vec{p} = m\ \vec{v}$, a tedy

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0. \tag{60}$$

Jakožto vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je člen

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{p} \tag{61}$$

z rovnice (59) nulový. Dle rovnice (5) je $\frac{d\vec{p}}{dt}$ rovno síle $\vec{F}$ působící na hmotný bod, tedy

$$(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \frac{d\vec{p}}{dt} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F} \tag{62}$$

a pro hledanou hodnotu $\frac{d\vec{b}}{dt}$ dostáváme z rovnice (57)

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{F}. \tag{63}$$

Výraz na pravé straně poslední rovnice je však dle definice (55) momentem síly $\vec{F}$ vůči bodu A, čímž je důkaz tvrzení (58) proveden.

Kontrolní otázky

1. *Co je to impuls síly?*
2. *Jaký vztah mají impuls síly a moment hybnosti?*
3. *Jaký směr má impuls síly?*
4. *Jak vypočteme moment síly?*
5. *Jak vypočteme moment hybnosti?*
6. *Jaký je vztah mezi momentem síly a momentem hybnosti?*
7. *Co popisuje druhá impulzová věta?*

7 Vzorce – translační a rotační pohyb

Translační pohyb		Rotační pohyb	
Síla	$\vec{F} = m\,\vec{a}$	Moment síly	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
Hybnost	$\vec{p} = m\,\vec{v}$	Moment hybnosti	$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$
Impuls síly	$\vec{I} = \int \vec{F}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$	Rotační impuls	$\vec{L} = \int \vec{M}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{b}$
I. impulzová věta	$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$	II. impulzová věta	$\vec{M} = \frac{\mathrm{d}\vec{b}}{\mathrm{d}t}$

8 Vzorce – mechanika soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa

$\vec{r}_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$	Poloha těžiště soustavy hmotných bodů
$\vec{v}_T = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m}$	Rychlost těžiště soustavy hmotných bodů
$\vec{F} = \frac{\overrightarrow{d\,p}}{d\,t}$ $\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{v}_i,\qquad \vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$ $\vec{F} = m\frac{\overrightarrow{d\,v_T}}{d\,t} = m\frac{\overrightarrow{d^2\,r_T}}{d\,t^2}$	První impulzová věta, pohybová rovnice, těžiště soustavy hmotných bodů
$\vec{M} = \frac{\overrightarrow{d\,b}}{d\,t}$ $\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i, \vec{b} = \sum_{i=1}^{N} \vec{b}_i$ $\vec{M}_T = \frac{\overrightarrow{d\,b_T}}{d\,t}$	Druhá impulzová věta
$\rho(\vec{r}) = \frac{d\,m}{d\,V}$	Hustota spojitého tělesa
$m = \int_V \rho(\vec{r})\,d\,V$	Hmotnost spojitého tělesa
$\vec{r}_T = (x_T, y_T, z_T) = \frac{\int_V \rho(\vec{r})\vec{r}\,d\,V}{\int_V \rho(\vec{r})\,d\,V}$	Poloha těžiště tuhého spojitého tělesa
$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$ $\vec{M} = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i = 0$	Rovnice rovnováhy tuhého tělesa

$\vec{b} = J \cdot \vec{\omega}$	Celkový moment hybnosti tuhého tělesa
$J = \int_m r^2 \, d\, m = \int_m \rho(\vec{r}) r^2 \, d\, V$	Osový moment setrvačnosti pro spojité tuhé těleso
$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$	Kinetická energie obecného pohybu (translace + rotace)
$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$	Pohybová rovnice otáčejícího se tělesa kolem pevné hlavní osy
$J\square = J_T + md^2$	Steinerova věta
$W = \int_{\vec{\phi}_1}^{\vec{\phi}_2} \vec{M} \cdot \overrightarrow{d\,\phi}$	Práce při otáčení tělesa kolem pevné hlavní osy
$P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$	Výkon při otáčení tělesa kolem pevné hlavní osy

9 Závěr – shrnutí

Modul je zaměřen na definici veličin a popis základních pojmů dynamiky. Důležitými fyzikálními veličinami jsou zde síla, hybnost a hmotnost. V modulu jsou sumarizovány Newtonovy pohybové zákony a v příkladech prezentovány postupy pro řešení fyzikálních problémů s využitím pohybové rovnice. Jedná se především o výpočty výsledných sil a rychlostí při pohybu těles po vodorovné a nakloněné rovině. Dále je zde definována mechanická práce, výkon, energie a problematiku uzavírá zákon zachování energie, moment síly a moment hybnosti.

10 Studijní prameny

10.1 Seznam použité literatury

[1] Koktavý, B. *Mechanika hmotného bodu.* CERM Brno, 2006.

[2] Slavík, J a kol. *Základy fyziky I.* SAV Praha, 1962.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V. *Technická fyzika.* SNTL Praha, 1981.

[4] Kusák, I., Luňák, M. *Přehled látky a příklady pro studium na Fakultě stavební VUT v Brně.* ECON Brno, 2016.

[5] Chobola, Z., Juránková, V. *Mechanika deformovatelných těles.* CERM Brno, 2000.

10.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[6] Halliday, D., Resnik, R., Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM Brno, 2000.

[7] Feynman, R.P. *Faynmanove přednášky z fyziky.* ALFA Bratislava, 1989.

10.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

[8] https://reseneulohy.cz/cs