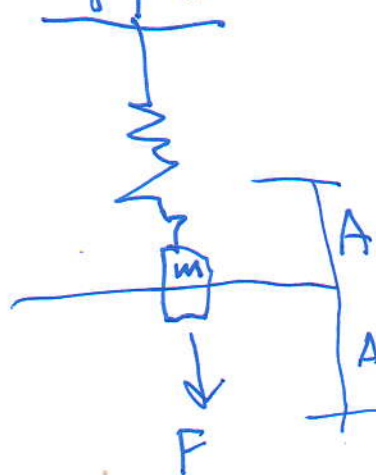


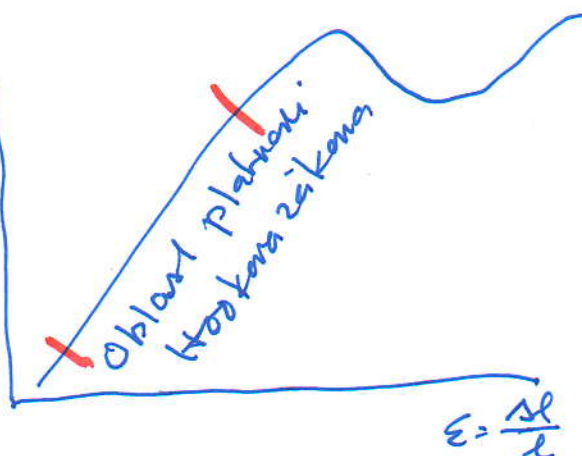
Dynamické posouzení



$$F = -ky \quad \text{Sílová rovnice}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

$k = \text{tuhost pružiny}$



$$F = -ky$$

$$ma = -ky$$

$$my'' + ky = 0 \quad / \quad \frac{1}{m}$$

$$y'' + \left(\frac{k}{m} \right) y = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Diferenciální rovnice popisují volné harmonické kmity

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

Řešení - výchylka

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Doba kmitu T nesáhne na amplitudu A.

Výchylka $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

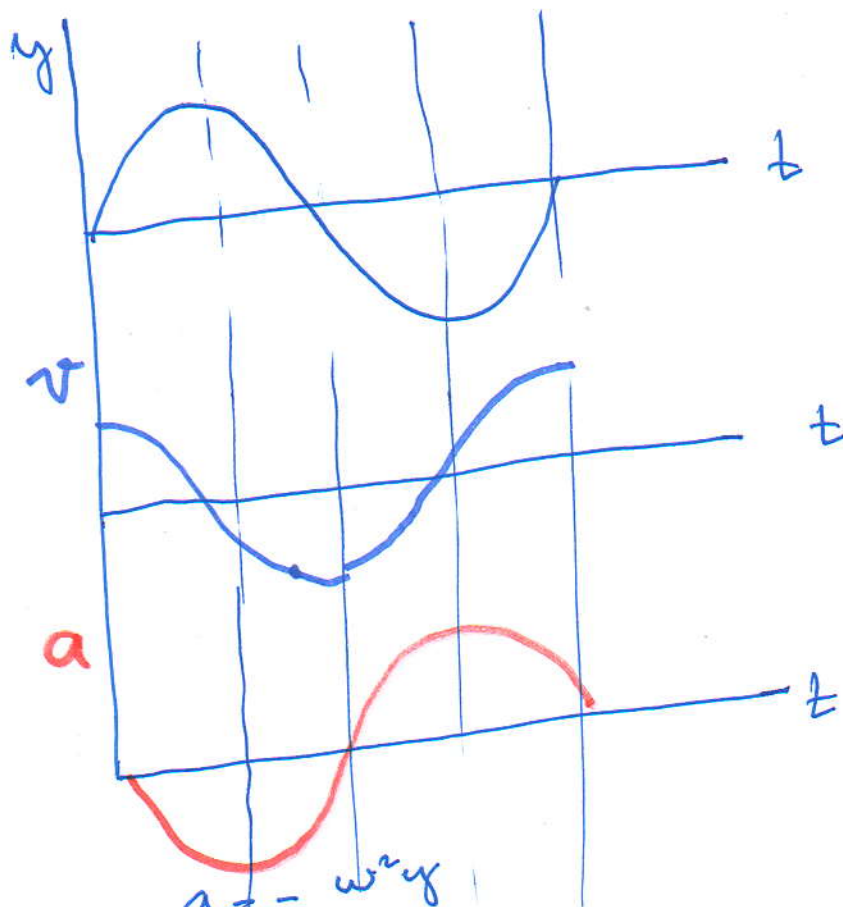
Rychlost

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 y$$



$$a = -\omega^2 y$$
$$y'' = -\omega^2 y$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Diferenciální
rovnice pohybu,
rovnice harmonického
kmitu.

Vlnění

1. Rovnice vlnění

— Vlněním rozumíme proces šíření
kmitů v prostoru

Elektromagnetické vlnění = šíření elektromagnetických kmitů prostředím

Mechanické vlnění = šíření mechanických kmitů
v pružném prostředí

Při mechanickém vlnění: prostředí se šíří
mechanická energie, ale nedochází
k přesunu částic prostředí, (ty kmitají
táleškou stejných rovnovážných
poloh).

Zdroje vlnění: litování tělesa, klet'
koná kmitů předávající,
energií pružnému prostředí

Šíření vlnění je postupně buzení kmitů
částic prostředí ve vzdálenosti $\vec{r}$ od zdroje,
která narůstá lineárně s časem

$$\vec{r} = \vec{c} \cdot t$$

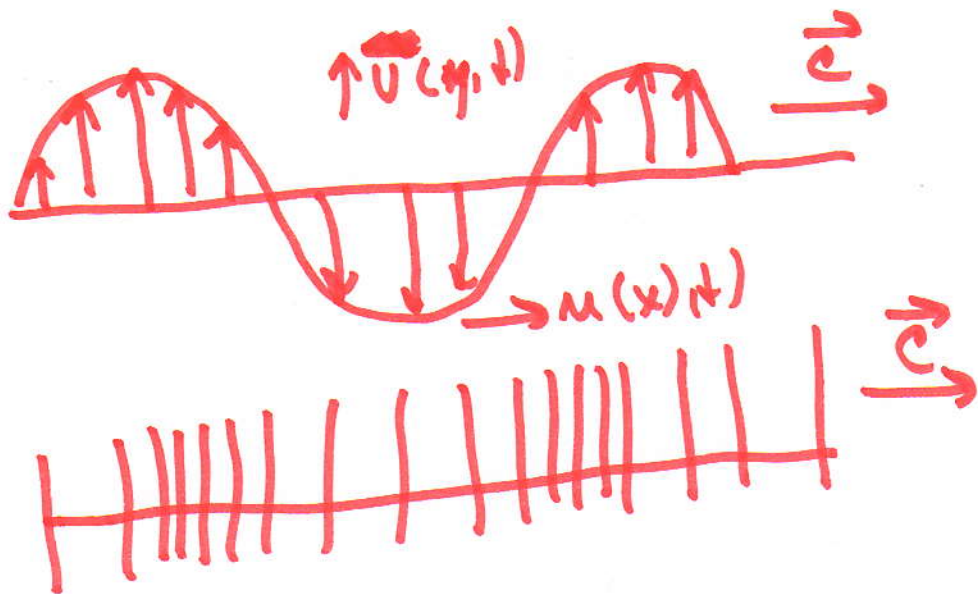
$\vec{c}$ = fázová rychlost
šíření vlnění

c v vzduchu $c = 331,8 \text{ m s}^{-1}$

$\vec{u}(\vec{r}, t)$ - okamžitá výchylka

Vlnění příčné $\vec{u} \perp \vec{c}$ (např. povrch kapalin)

Vlnění podélné $\vec{u} \parallel \vec{c}$ (např. v plynech - zvuk)



Stojatí vlní: máme-li protažení
omezení klesá $\leftarrow$ $\frac{1}{\lambda}$
voda uádohí

$\Rightarrow$ vlní se odraží a více se zpít $\Rightarrow$
stojatí vlní.

Postupné vlní - pohyb není omezen
- voda na přehradě...

Vlnová délka λ - vzdálenost do uže se
vlní rozšíří za
dobu jedné periody T .

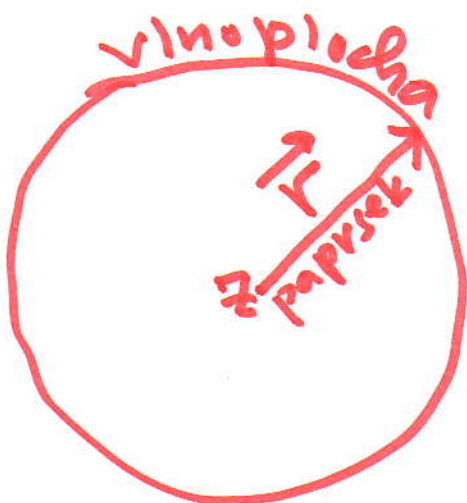
$$\lambda = c \cdot T$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$f = \frac{1}{T} \left[\overset{\text{Hz}}{\text{s}^{-1}} \right] \text{ hertz}$$

Σ ... zdroj vlní

Vlnoplocha = místa kmitající
se stejnou fází



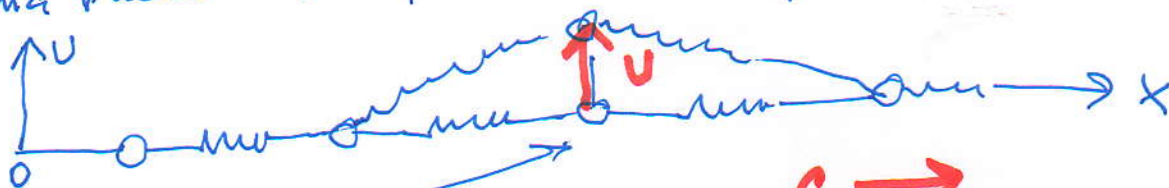
V homogenním prostředí proudí
koule

Ve velké vzdálenosti od zdroje můžeme se vlnoplochy
považovat za **vrouchné vlnoplochy**.

Kolmice k vlnoploše = **paprsek**.
(3)

1. Rovnice vlny

Přímá řada bodů, mezi nimiž působí pružící síly



Tento bod koná harmonický kmit o rovnici $u(t) = A \cdot \sin(\omega t)$

Fáze tohoto ~~bodu~~ kmitu dospěje do bodu ve vzdálenosti x za dobu $t = \frac{x}{c}$

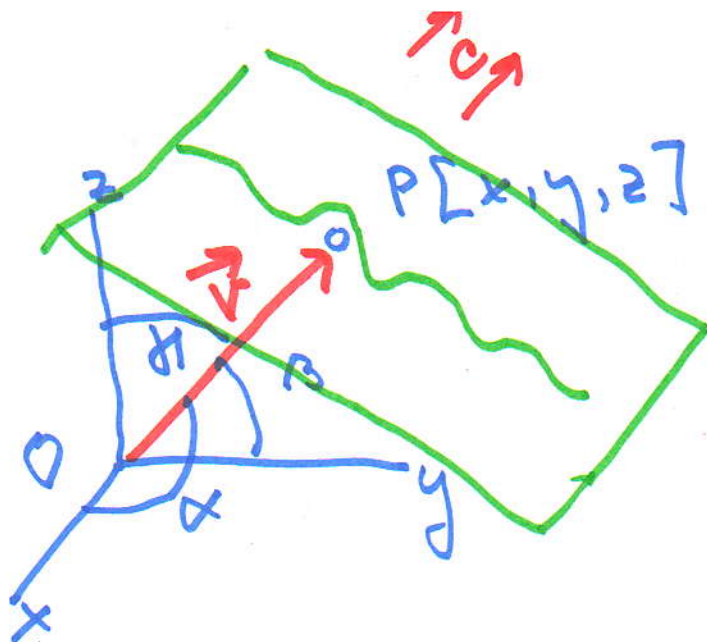
V čase t bude v bodě x taková fáze, jako byla v bodě $x=0$ v době $t - \frac{x}{c}$ dříve

Proti v bodě o souřadnici x bude taková

vlna

$$u(x, t) = u_0 \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

Rovnice vlny rovinné, která postupuje fazově rychlostí c ve směru osy x .



Postupaji - e' rorinai vaka vesmeu
meueu rektoru

$$\vec{r}_0 = (c \cos \alpha, c \cos \beta, c \cos \gamma)$$

je r badi $P[x, y, z]$ meueu rektoru $\vec{r}$
meueu rorina!

$$u(\vec{r}, t) = u_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{|\vec{r}|}{c} \right)$$

$$|\vec{r}| = x \cdot \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

tedy

$$u(x, y, z, t) = u_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x \cdot \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c} \right)$$

ty. rorina u'chylj rorinai vaka postupajia!
vesmeu $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ fazoru vch. e
r badi $P[x, y, z]$.

2. Vlnová rovnice

Je to základní diferenciální rovnice teorie vlnění.

můžeme počítat: - výchylku $u(\vec{r}, t)$, r .

- rychlost

- zrychlení

- nebo dokonce m.u. - proudění.

výběhu zářivice.

$$u(x, y, z, t) = u_0 \cdot \sin \omega \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c} \right)$$

derivujeme dvakrát podle času

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -u_0 \cdot \omega^2 \sin \omega \left(t - \frac{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma}{c} \right)$$

drůbež derivace podle souřadnic

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\cos^2 \alpha}{c^2} \cdot u_0 \cdot \omega^2 \sin \omega \left(t - \square \right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\cos^2 \beta}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{Podobně } \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\cos^2 \gamma}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Sečtením (pro $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

To je vlnová rovnice

$$\Delta u = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Δ - Laplaceův diferenciální operátor

Platí pro vlny
jakéhokoli tvaru
v prostoru.

Pro konstantu v , která se $\hat{H}'$

ne mění o x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

3. Rychlost a intenzita vlnění

Prodloužení $\Delta l = k \cdot \frac{l}{S} \cdot F$

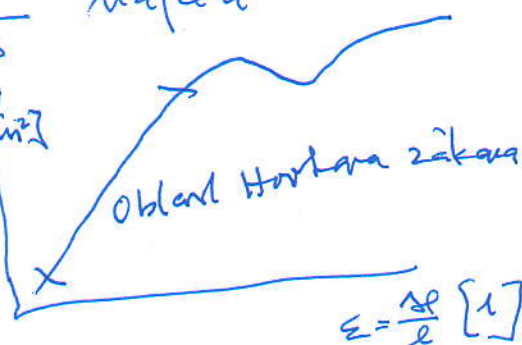
k - součinitel
roztahnosti

$E = \frac{1}{k}$ modul pružnosti

$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon$ relativní prodloužení

$\tau = \frac{F}{S}$ napětí

$\tau = \frac{F}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]$



$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \tau$

$\tau = E \cdot \varepsilon$

$\tau = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x}$

Z vlnové rovnice

$c_L = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

longitudální

$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$

transverzální

rychlost šíření podélných
vln

rychlost šíření příčných
vln

materiál	podielu c_L / m/s	príchuť c_T / m/s
	3830	2320
oceľ	5100	3300
betón	4700	—
pískanec	2920	—
		100°C
voda	0°C 1400	30°C /
moistka voda	1445	1541
vdych	331	387

Intenzita vlny!

Kinická energie

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

Výhybka $u = u_0 \cdot \sin \omega(t + \varphi)$

$$v = \frac{du}{dt} = u_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega(t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -u_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega(t + \varphi) = -u_0 \cdot \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m u_0^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2 \omega(t + \varphi)$$

$$E_p = - \int P dy = - \int m a dy = + \int_0^u m v \cdot \omega^2 du =$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 u_0^2 \cdot \sin^2 \omega(t + \varphi)$$

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega(t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 u_0^2 \sin^2 \omega(t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m u_0^2 \cdot \omega^2 \left[\cos^2 \omega(t + \varphi) + \sin^2 \omega(t + \varphi) \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} m u_0^2 \omega^2 = \text{konst}$$

Uvažujme pružiní pohyb v něm bod
do kterého dospělo podílů vlnu'

$$dE = \frac{1}{2} dm \omega^2 v_0^2 = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v_0^2 dV$$

Hustota energie

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 v_0^2$$

I - intenzita vlny $\left[\frac{W}{m^2} \right]$

je výkon vlny procházející elementární
plochy kolmý ke směru šíření
dělený relativní této plochy

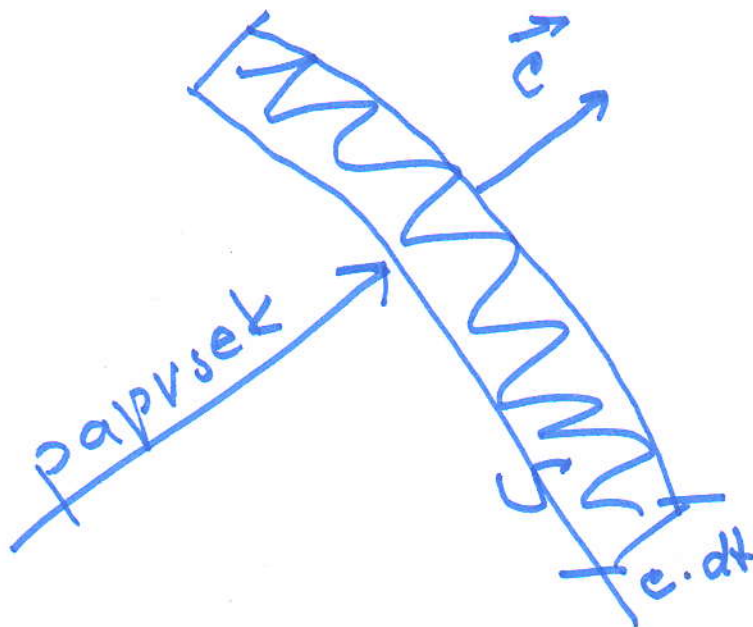
$$I = \frac{\text{výkon}}{\text{plocha}} = \frac{\text{(energie) práce}}{\text{čas}} \cdot \frac{1}{\text{plocha}} = \frac{w \cdot (S \cdot c \cdot dt)}{dt} \cdot \frac{1}{S}$$

$$I = w \cdot c$$

$$I = \frac{1}{2} \rho \cdot c \cdot \omega^2 v_0^2 \quad \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Intenzita = energie, která přejde plošou
jednotkou za sekundu

Intenzita vlnění $I \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right]$



kulová vlna
za dobu dt se rozkmitá
objem $S \cdot (c \cdot dt) = dV$

④ Interference vlnění

Interference (odlínování) nastane za příslušných podmínkách

- 1) Vlny se musí šířit stejným směrem
- 2) Musí být polarizovány ve stejném rovině

Podmínky Koherence

- 3) Mají stejné kmitočty $f_1 = f_2$
 - 4) Mají stejnou fázi $\Delta \varphi = \text{konstanta}$
-

- Budeme uvažovat dvě vlny $f_1 = f_2$
- uvažujeme stejné amplitudy $u_{01} = u_{02} = u_0$
- budou vycházet ze dvou různých míst x_1, x_2 a budou postupovat směrem x

Okamžitá výchylka v bodě x bude

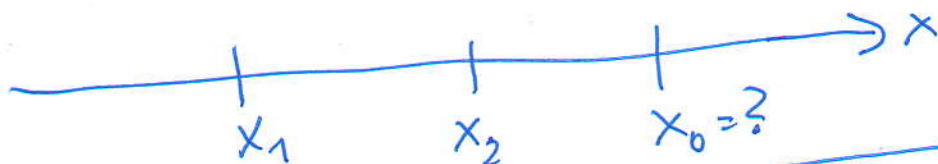
$$u_1(x, t) = u_0 \cdot \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_1) \right] \quad \phi_1 \quad \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right)$$

$$u_2(x, t) = u_0 \cdot \sin \left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_2) \right] \quad \phi_2 \quad \omega t - \frac{\omega x}{c}$$

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x$$

$$\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 - x_1) \quad \phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} (x_0 - x_2) \quad \text{jsou fázové rozdíly}$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$u_1(x, t) = u_0 \cdot \sin(\omega t - \phi_1)$$

$$u_2(x, t) = u_0 \cdot \sin(\omega t - \phi_2)$$

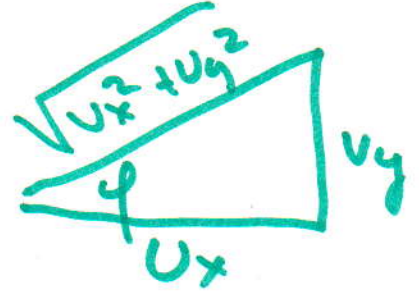
$$\boxed{u = u_1 + u_2} = u_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \phi_1 - u_0 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \phi_1 +$$

$$+ u_0 \cdot \sin \omega t \cdot \cos \phi_2 - u_0 \cdot \cos \omega t \cdot \sin \phi_2$$

$$u = u_0 \cdot \sin \omega t (\cos \phi_1 + \cos \phi_2) - u_0 \cos \omega t (\sin \phi_1 + \sin \phi_2)$$

$$u = \underbrace{u_0 \cdot \sin \omega t (\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)}_{u_x} - \underbrace{u_0 \cos \omega t (\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}_{u_y}$$

$$\cos \varphi = \frac{u_y}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2}} \quad \cos \varphi = \frac{u_x}{r}$$



$$u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t - \sqrt{u_x^2 + u_y^2} \cdot \sin \varphi \cos \omega t$$

$$u = u_0^* \cdot \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\text{Kde } u_0^* = \sqrt{u_x^2 + u_y^2} = \sqrt{u_0^2 (\cos^2 \varphi_1 + 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos^2 \varphi_2) + u_0^2 (\sin^2 \varphi_1 + 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)}$$

$$u_0^* = \sqrt{u_0^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1}_1) + 2 u_0^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + u_0^2 (\underbrace{\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2}_1)} =$$

$$u_0^* = \sqrt{u_0^2 + u_0^2 + 2 u_0^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Analýza

$$u_0^* = \sqrt{2u_0^2 + 2u_0^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

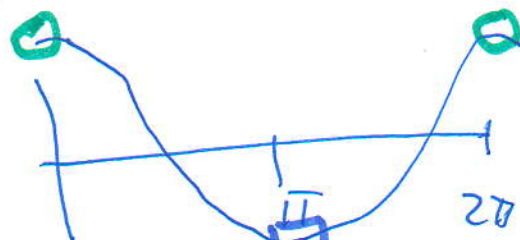
parametr

1, u_0^* je **maximální** když $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = +1$

Tedy

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 2k\pi$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$



$$k = 2\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x - x_1) - \frac{2\pi}{\lambda} (x - x_2) = 2k\pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = 2k\pi$$

parametr

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Delta x = k \cdot \lambda$$

$$\Rightarrow u_0^* = 2u_0 \text{ maximum}$$

2) u_0^* je **minimální** $\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = -1$

parametr

$$\varphi_1 - \varphi_2 = (2k+1)\pi$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta x = (2k+1)\pi$$

$$\Delta x = (2k+1) \frac{\lambda}{2}$$

parametr

$$u_0^* = 0 \text{ minimum}$$

5. Stojalí vlnění

Vvažujeme dvě koherentní vlny podélující se
v opačných směrech osy x .

$$u_1(x, t) = u_0 \cdot \sin(\omega t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$u_2(x, t) = u_0 \cdot \sin(\omega t + \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$u = u_1 + u_2 = u_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} - u_0 \cos \omega t \sin \frac{2\pi x}{\lambda} + u_0 \sin \omega t \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda} + u_0 \cos \omega t \sin \frac{2\pi x}{\lambda}$$

$$u = \underbrace{2u_0 \cdot \cos \frac{2\pi x}{\lambda}}_{\text{Amplituda}} \cdot \sin \omega t$$

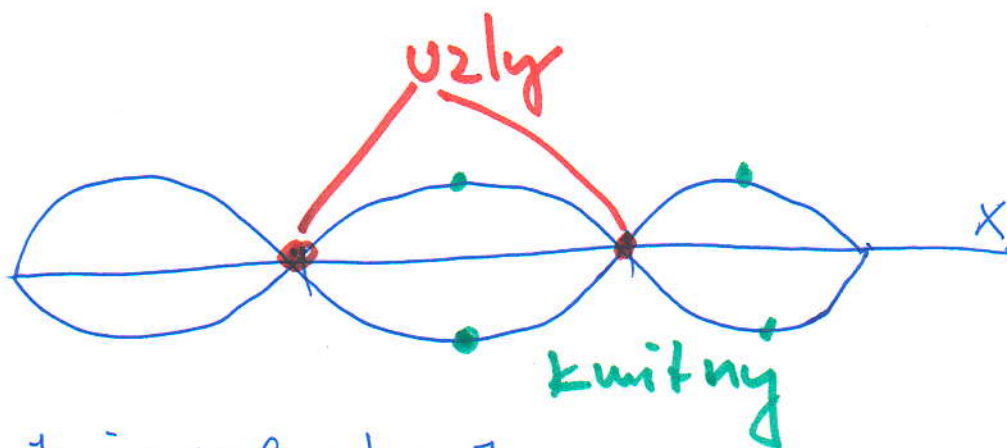
Amplituda závisí na poloze kmitajícího bodu $[x]$.

Fáze kmitů všech částic stejná a nezávisí
na poloze x .

Takové vlnění se nazývá **stojalé vlnění**.
[Všechny body kmitají se stejnou frekvencí, ale různou
amplitudou].

Fázová rychlost $= 0$

Při stojalém vlnění nedochází k šíření energie.



Vznikají uzly a kmitny

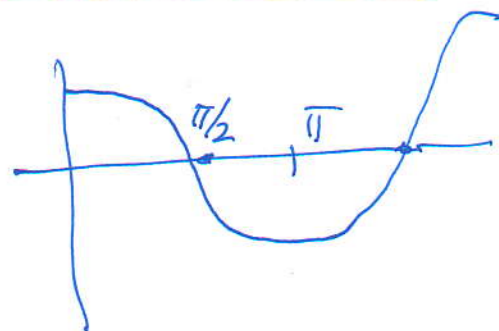
V uzlech platí

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = 0$$

památka

$$\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

$$x = \frac{2k+1}{4} \cdot \lambda$$



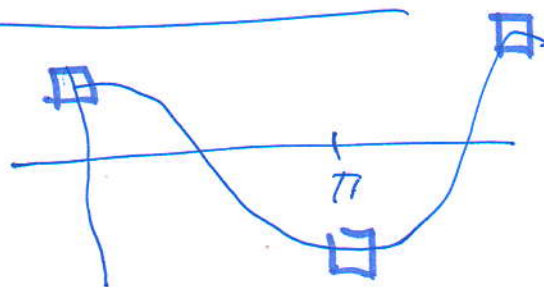
$$k=0, 1, 2, \dots$$

nepamátka

kmitny

$$\cos \frac{2\pi x}{\lambda} = \pm 1$$

památka



$$\frac{2\pi x}{\lambda} = k \cdot \pi \quad k=0, 1, 2, \dots$$

$$x = k \cdot \frac{\lambda}{2}$$

nepamátka

Volný a pevný konec

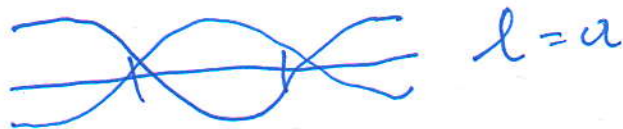
Částice na volném konci nemůže energii předávat, protože s žádným prostředkem nesousedí. Vlnění se odráží se stejnou fází.
Na volném konci vzniká kmitua.

Na pevném konci je částice klidná $\Rightarrow$ ani zde se energie nepředává.

Všední energie se odráží zpět.

Vzniká uzly.

Volný konec



Pevný konec



$\Rightarrow$ mohou existovat jen kmity určitých frekvencí a vlnových délek $\equiv$ **rezonance**.

Těleso $\equiv$ rezonátor, např. - struny
pišťaly

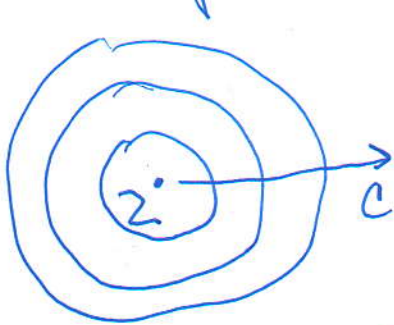
6. Dopplerův jev

Jedná se o zdánlivou změnu kmitočtu při relativním pohybu zdroje a přijmače
1842 Christian Doppler (Salzburg) Rak - fyz - mal.

uvažujme zdroj zvuku Z o kmitočtu f_0

0, Je-li Z (zdroj) i P (pozorovatel) v klidu pozorovatel přijímá $f_0 = \frac{c}{\lambda_0}$

1, Zdroj v klidu, pozorovatel se pohybuje rychlostí u směrem ke zdroji



pozorovatel se vzhledem k postupující vlně pohybuje relativní rychlostí $(c+u)$

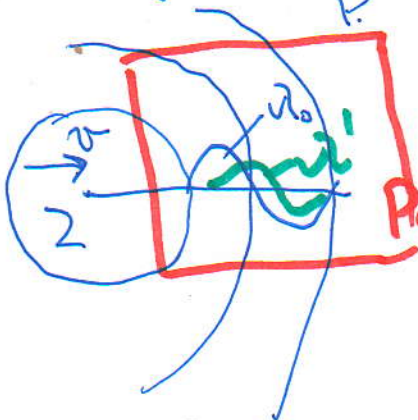
Přijímá kmitočet f_1

$$f_1 = \frac{c+u}{\lambda_0} = \frac{c+u}{c} \cdot f_0$$

$$f_1 = \frac{c+u}{c} \cdot f_0$$

2, P v klidu
Z rychlostí v směrem k P

P zdroj si posune $\Rightarrow$ vlna se zkrátí λ'



$$f_2 = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{c \cdot v} \cdot f_0$$

Podstatný princip

Využití měření rychlosti pohyb komet