Příklad 1

Pohyb hmotného bodu je popsán polohovým vektorem:

$$\vec{r} = \{(2+3t)\vec{i} + 4\vec{j}\}\,[m].$$

Určete:

- souřadnice pol. vek.
- velikost
- směrové kosiny
  - obecně
  - pro čas $t = 5\,s$

$$v_x = (2+3t)\,[m] \overset{5s}{=} \underline{\underline{17\,m}}$$

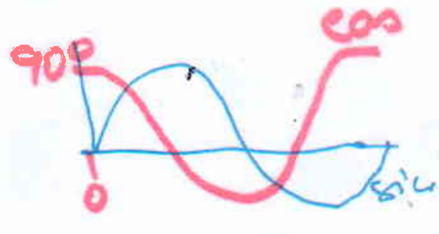
$$v_y = 4\,m \overset{5s}{=} \underline{\underline{4\,m}}$$

$$v_z = 0\,m \overset{5s}{=} \underline{\underline{0\,m}}$$

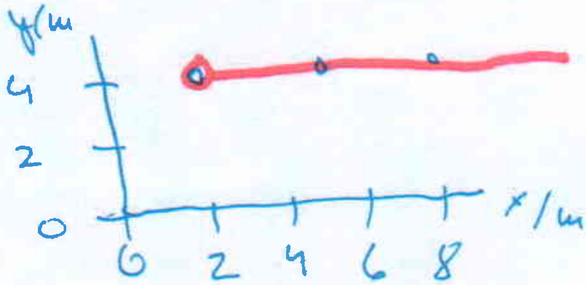
$$|\vec{r}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{4+12t+9t^2+16} = \sqrt{9t^2+12t+20} \overset{5s}{=} \underline{\underline{\sqrt{305}\,[m]}}$$

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{|\vec{r}|} = \frac{2+3t}{\sqrt{9t^2+12t+20}} \overset{5s}{=} \frac{17\,m}{\sqrt{305}\,m} = 0{,}97 \Rightarrow \alpha = 13^\circ 15'$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{|\vec{r}|} = \frac{4\,m}{\sqrt{305}\,m} = \frac{4}{17{,}46} = 0{,}23 \Rightarrow \beta = 76^\circ 45'$$



$$\cos\gamma = \frac{v_z}{|\vec{r}|} = 0 \Rightarrow \gamma = 90^\circ$$



Příklad 2

1.4.

Pohyb je určen zrychlením

$\vec{a} = [\overset{a_x}{2}\,\vec{i} + 3\,\vec{j}\,]$ [m/s]

v čase $t=0$ je $\vec{v}(0) = 4\,\vec{i}$ $[\frac{m}{s}]$ a
$\vec{r}(0) = (5\,\vec{i} - 4\,\vec{j}\,)$ [m]

okrajové podmínky

$t=0 \Rightarrow$ počáteční podmínky

Určete rychlost $\vec{v}$ a polohový vektor $\vec{r}$.

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$\int d\vec{v} = \int \vec{a}\, dt$

$\int dv_x = \int a_x dt = \int 2 dt = 2t + v_{x0}$

Okrajové podmínky
$v_x = 2t + v_{x0}$
$4 = 2\cdot 0 + v_{x0}$
$4 = v_{x0}$

$\boxed{v_x = 2\cdot t + 4}$

$v_y = \int 3 dt$
$v_y = 3\cdot t + v_{y0}$
$0 = 3\cdot 0 + v_{y0}$
$0 = v_{y0}$

$\boxed{v_y = 3\cdot t}$

$v_z = \int 0 dt$
$v_z = v_{z0} = 0$

$$\boxed{\vec{v} = [(2t + 4)\,\vec{i} + 3t\,\vec{j}\,]\ [\tfrac{m}{s}]}$$

$r_x = \int (2t + 4) dt = \frac{2}{2} t^2 + 4t + r_{x0}$

$5 = 0^2 + 4\cdot 0 + r_{x0}$
$5 = r_{x0}$

$\boxed{r_x = (t^2 + 4t + 5)\,m}$

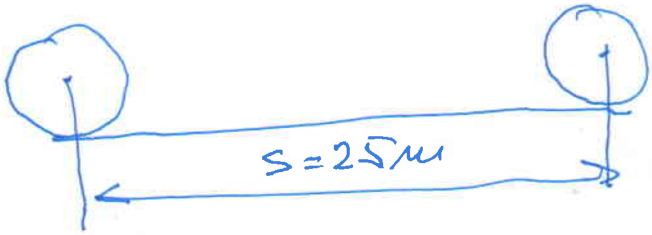
$r_y = \int 3t\, dt = \frac{3}{2} t^2 + r_{y0}$
$-4 = \frac{3}{2} 0^2 + r_{y0}$
$-4 = r_{y0}$

$\boxed{r_y = (\frac{3}{2} t^2 - 4)\,[m]}$

$r_z = \int 0 dt = r_{z0}$
$0 = r_{z0}$

$$\boxed{\vec{r} = [(t^2 + 4t + 5)\,\vec{i} + (\tfrac{3}{2} t^2 - 4)\,\vec{j}\,]\ [m]}$$

Vypočtěte úhlové zrychlení (zpoždění) kola auta, které z rychlosti 45 km/h zastaví na trati 25 m dlouhé. Průměr kola je 8 dm. Za jak dlouho se zastaví?



$$45\,\frac{km}{h} = \frac{45000\,m}{3600\,s} = 12{,}5\,\frac{m}{s}$$

$$s = v_0 \cdot t - \frac{a}{2} t^2$$

$$v = v_0 - at$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$$

$$v = r \cdot \omega$$

Kolo se zastaví

$v = 0$

Tedy $0 = v_0 - at$

$$t = \frac{v_0}{a} \qquad t = \frac{12{,}5\,\frac{m}{s}}{3{,}125\,\frac{m}{s}} \doteq \underline{\underline{4\,s}}$$

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{\cancel{a}}{2} \cdot \frac{v_0^2}{a^{\cancel{2}}}$$

$$s = \frac{v_0^2}{2a} \qquad a = \frac{v_0^2}{2s} =$$

$$a = \frac{(12{,}5\,\frac{m}{s})^2}{2 \cdot 25\,m} = \underline{\underline{3{,}125\,\frac{m}{s}}}$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$$

zastavení $\omega = 0$

$$0 = \omega_0 - \varepsilon t$$

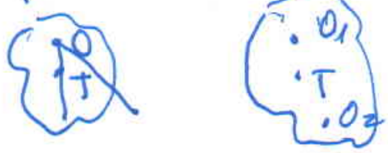
$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{v_0}{r \cdot t} =$$

$$\boxed{\varepsilon = \frac{12{,}5\,\frac{m}{s}}{0{,}4\,m \cdot 4\,s} = \underline{\underline{7{,}8\,s^{-2}}}}$$

Příklad 4
matematické kyvadlo

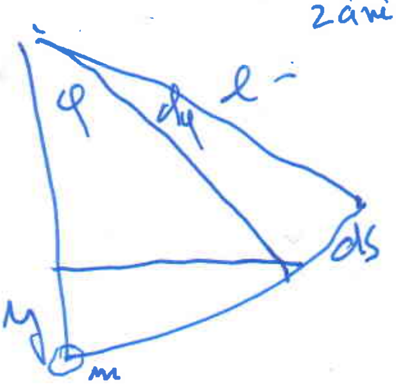
Fyzikální

Reverzní



$T_1 = T_2$ pro O_1, O_2

závěs = hinge [hindž]



$$ds = l \cdot d\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = l \cdot \frac{d\varphi}{dt} = l \cdot \varphi'$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 (\varphi')^2$$

$$E_p = mgy = mgl - mgl\cos\varphi$$

$$\left((\varphi')^2\right)' = 2 \cdot \varphi' \cdot \varphi''$$

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2} m l^2 (\varphi')^2 + mgl - mgl\cos\varphi = \text{konst}$$

Derivace rovnice podle času

$$2 \cdot \frac{1}{2} m l^2 \varphi' \varphi'' + 0 + mgl \sin\varphi \cdot \varphi' = 0 \quad \Big| \frac{1}{m l^2 \varphi'}$$

$$\varphi'' + \frac{g}{l} \sin\varphi = 0$$

$\sin\varphi = \varphi + \ldots\ldots$

pokud $\varphi < 5^\circ \Rightarrow$

$\sin\varphi \doteq \varphi$

$$\varphi'' + \overbrace{\boxed{\frac{g}{l}}}^{\omega^2} \varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0}$$

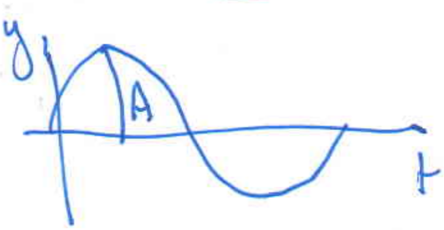
$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\boxed{T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Dif. rovnice popisující volné harmonické kmity

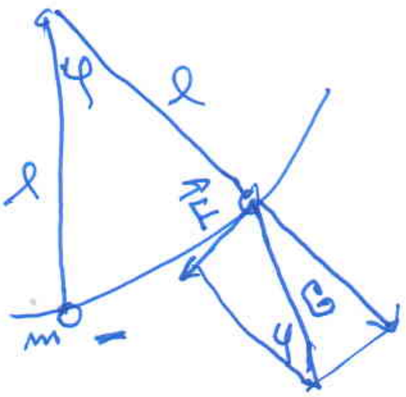
Řešení: $\boxed{y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$

$A = r$



Příklad 5

Řešte matematické kyvadlo pomocí II. pohybové rovnice



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad G = mg$$

$$|\vec{M}| = -l \cdot G \cdot \sin\varphi = -l\, mg \sin\varphi$$

$$F = mg \cdot \sin\varphi$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{V}$$

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

velikost $|\vec{b}| = |l| \cdot |mv| = l \cdot m \cdot \omega \cdot l$ $\quad l \perp p$

skalární $\quad \omega = \varphi'$

$$M = \frac{db}{dt}$$

$$-l\, mg \sin\varphi = \frac{d(l^2 m\omega)}{dt}$$

$$m l^2 \varphi'' + l\, mg \sin\varphi = 0 \quad \frac{1}{ml^2}$$

$$\varphi'' + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega^2}\varphi = 0$$

$\sin\varphi = \varphi + \ldots\ldots$

když $\varphi < 5^0$

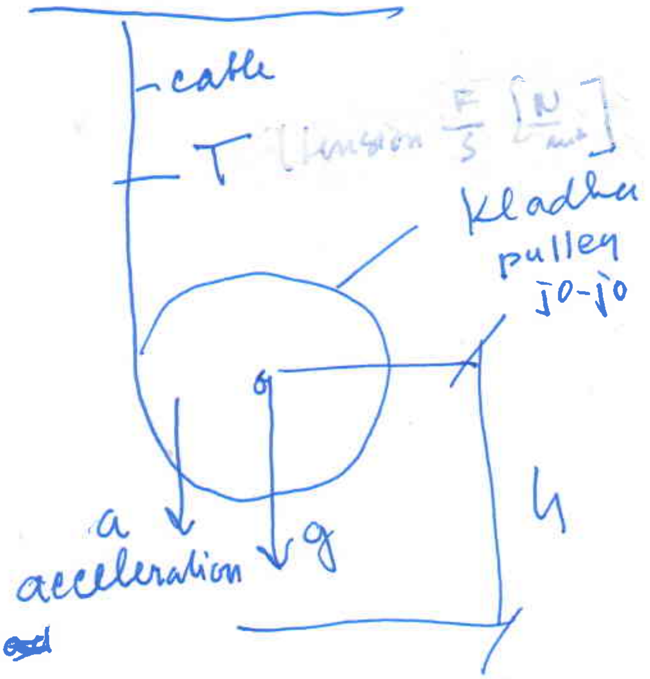
$\sin\varphi \doteq \varphi$

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2\varphi = 0}$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Příklad 6



$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = a \cdot t$$

$$v = r \cdot \omega \qquad \omega = \frac{v}{r}$$

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$\cancel{m} g \cdot \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{a} \cancel{t^2} = \cancel{\tfrac{1}{2}} \cancel{m} (a t)^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cancel{m} r^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} \quad (a^2 t^2)$$

$$g = a + \frac{1}{2} a$$

$$g = \frac{3}{2} a$$

$$\underline{\underline{a = \frac{2}{3} g}}$$

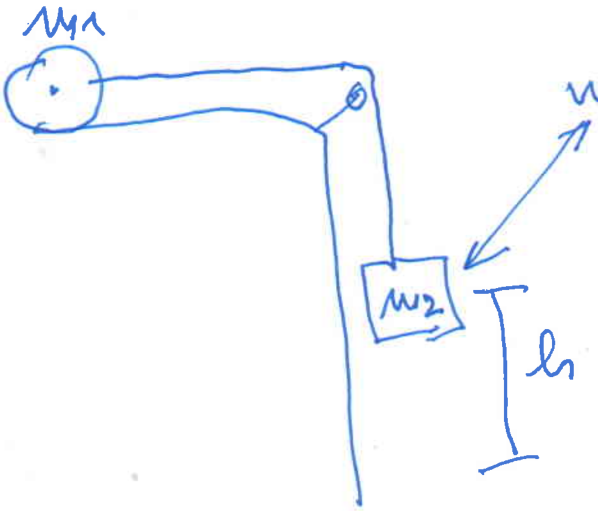
Napětí v niti: $T = mg \mp ma = mg \mp m \cdot \frac{2}{3} g$

Tension in the cable

up
Nahoru $+$ $T = \frac{5}{3} mg$

down
Dolů $-$ $T = \frac{1}{3} mg$

Příklad 6



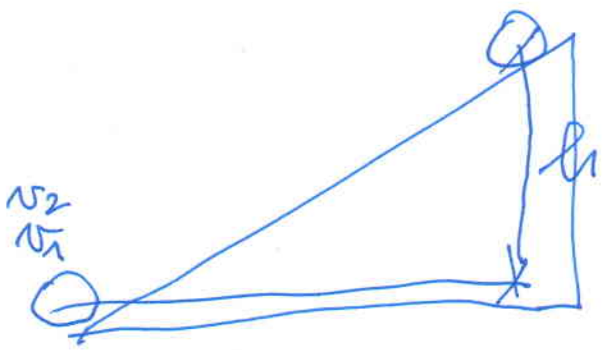
$$m_2 g h = \frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 + \frac{1}{2} J_1 \omega^2$$

$$h = \frac{1}{2} a t^2$$

$$v = a t$$

$$J = \frac{1}{2} m_1 r_1^2$$

$$v = \omega \cdot r$$



$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

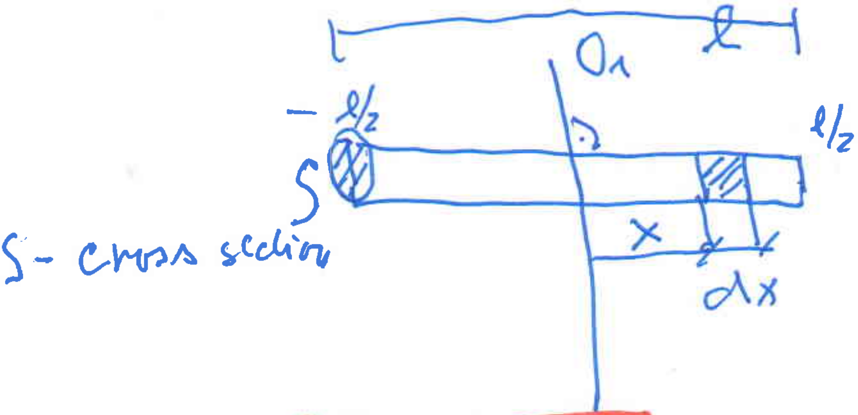
1, Přemí v_1 with friction

2, Smykem v_2 · without friction
without rotational motion

Prikead 7

(3.7)

[Oin]
a thin rod about axis through its midpoint



$$\boxed{J = \int r^2 dm}$$

$$dm = (S \cdot dx) \cdot \rho$$

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \cdot S\rho\, dx = S\rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-l/2}^{l/2} =$$

$$J = S\rho \left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right) = \frac{1}{12} (S\rho l) \cdot l^2$$

$$S l \cdot \rho = m$$

$$J = \frac{1}{12} m l^2$$

$$J_2 = J_1 + a^2 m$$

O_2 Steinerova veta

$$J_2 = \frac{1}{12} m l^2 + \left(\frac{l}{2} \right)^2 m = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4} \right) m l^2$$

$$J_2 = \frac{1 + 3}{12} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$$

$$O_2 = \int r^2 dm = \int_0^l x^2 \cdot (S\rho\, dx) = S\rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^l =$$

$$(S\rho l) = m$$

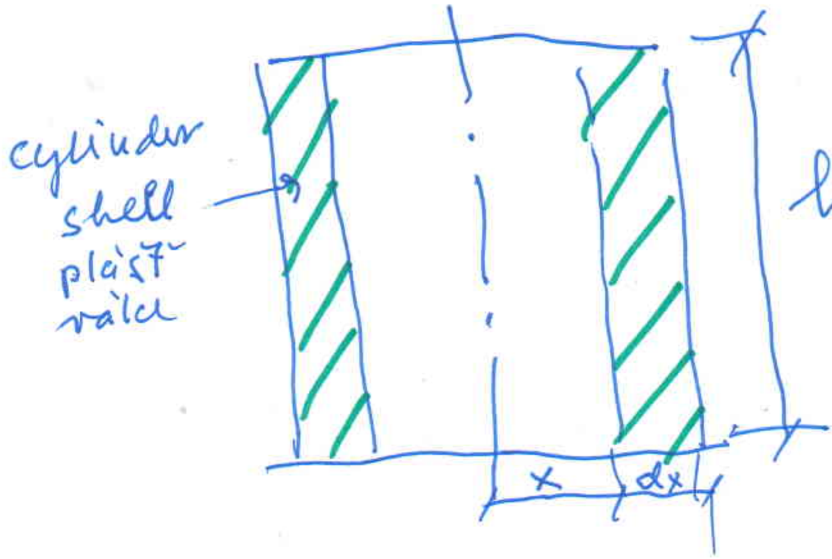
$$O_2 = \frac{1}{3} m l^2$$

axis going through its end

Příklad 8 (3.6)

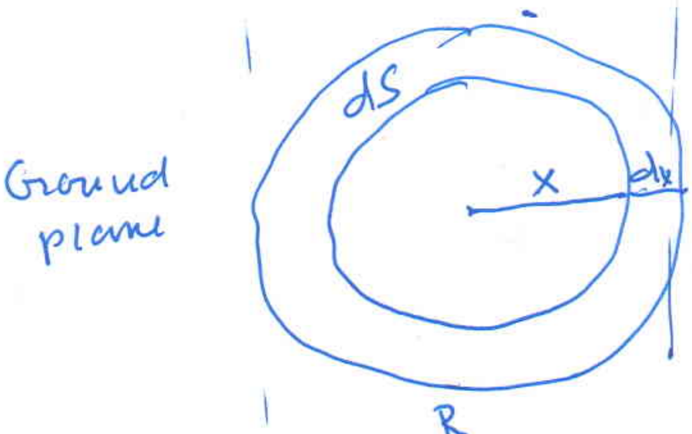
cylinder

thin pipe



$$J = \int r^2\, dm$$

$$dm = \underbrace{\underbrace{(2\pi x)\cdot dx}_{ds}\cdot h}_{dV}\cdot \rho$$



ring = prsten

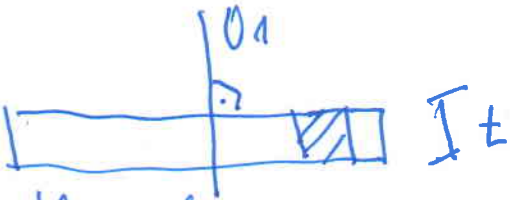
$$J = \int_0^R x^2\, 2\pi x\, dx \cdot h \cdot \rho = 2\pi h\rho \int_0^R x^3\, dx =$$

$$J = 2\pi h\rho \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^R = 2\pi h\rho \cdot \frac{R^4}{4} =$$

$$\pi R^2 \cdot h \cdot \rho = m$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2}$$

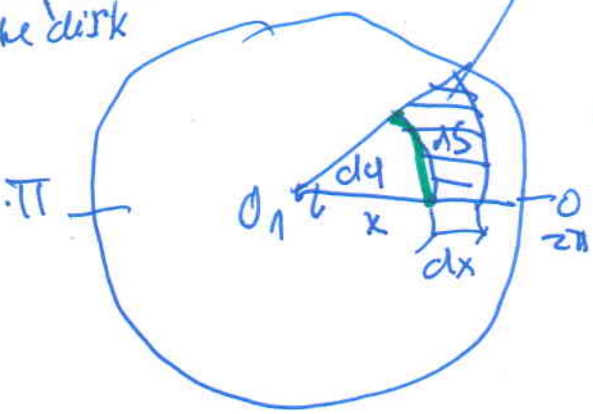
Příklad 9 (3.2)



circular disc of thickness „t"

axis going through the center of disk perp. to the disk

circular sector



$$dm = \underbrace{\Big[\overbrace{(x \cdot d\varphi)}^{dS} \cdot dx\Big] \cdot t}_{dV} \cdot \rho$$

$$J = \int r^2 dm = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{R} x^2 \cdot x \cdot d\varphi \cdot dx \cdot t \cdot \rho$$

$$J = 2 \cdot \int_0^{\pi} d\varphi \cdot \int_0^{R} t\rho \cdot x^3 dx$$

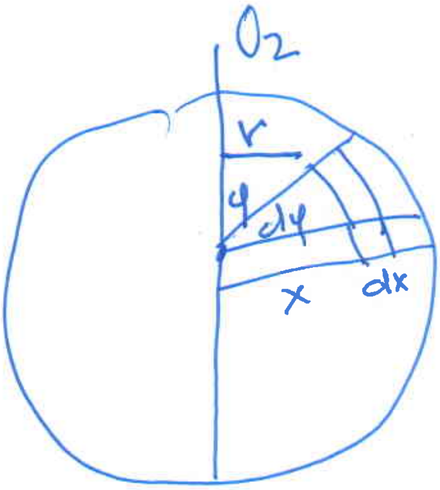
$$J = 2 \cdot \big[\varphi\big]_0^{\pi} \cdot t\rho \cdot \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{R} =$$

$$J = 2\pi \cdot t\rho \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}\underbrace{(\pi R^2 \cdot t \cdot \rho)}_{m} \cdot R^2 =$$

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2}$$

Příklad 10

with axis going through its center, laying in disk plane



$$dm = \left[(x \cdot d\varphi) \cdot dx \cdot\right] \cdot t \cdot \rho$$

r - radius of rotation

$$\sin\varphi = \frac{r}{x}$$

Poloměr otáčení

$$r = x \cdot \sin\varphi$$

$$J_2 = \int r^2 \, dm = 2\int_0^{\pi} x^2 \sin^2\varphi \, d\varphi \cdot \int_0^{R} x \, t \rho \cdot dx$$

$$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi) \, d\varphi = \left[\frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right]_0^{\pi} =$$

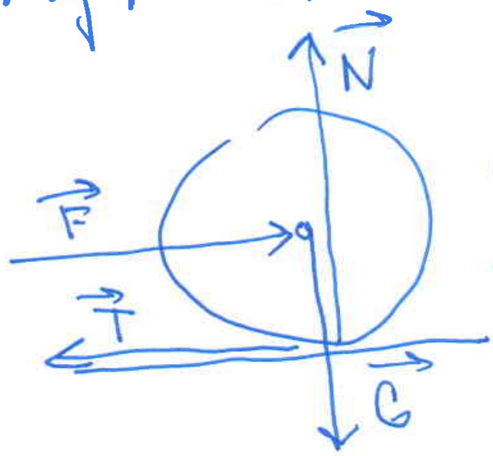
$$= \frac{1}{2}\left[\pi - 0 - 0 + 0\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$J_2 = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \int_0^{R} x^3 t \cdot \rho \, dx \doteq$$

$$J_2 = \pi \cdot t \cdot \rho \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^{R} = \underline{\underline{\frac{1}{4} m R^2}}$$

Příklad 11

Popište pohyb homogenního válce, který se valí bez klouzání po vodorovné rovině x působením síly F. Určete sílu F?



with friction
⇒ with rotation

$$m a_x = F - T$$

$$m a_y = G - N = 0$$

$$J \cdot \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

$$J \cdot \varepsilon = r \cdot T \qquad r \perp T$$

$$v_y = 0 \Rightarrow a_y = 0 \qquad G = N$$

$$J = \frac{1}{2} m r^2$$

$$v = r \cdot \omega$$

$$a = r \cdot \varepsilon \rightarrow \varepsilon = \frac{a_x}{r}$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \cdot \varepsilon = r \cdot T$$

$$\frac{1}{2} m r^2 \cdot \frac{a_x}{r} = r \cdot T$$

$$T = \frac{1}{2} m a_x$$

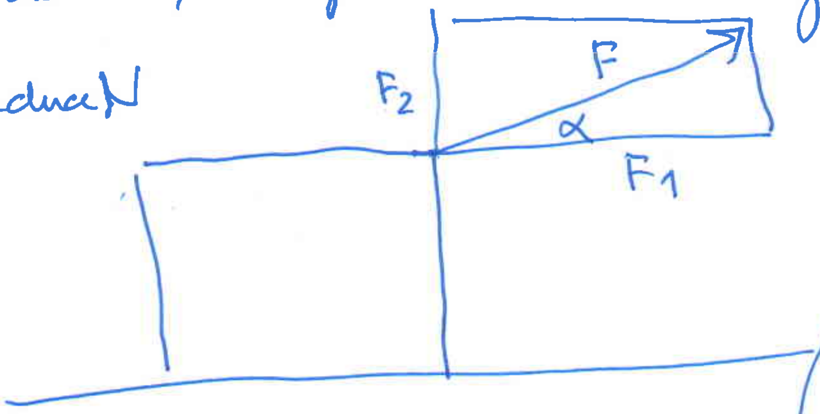
$$m a_x = F - \frac{1}{2} m a_x$$

$$\underline{\underline{F = \frac{3}{2} m a_x}}$$

Příklad 12

Pod jakým úhlem je nutné táhnout břemeno, které se pohybuje konstantní rychlostí, aby tažná síla byla minimální?

force F_2 reduces N



$F_2 = F \cdot \sin\alpha$

$F_1 = F \cdot \cos\alpha$

$$F \cdot \cos\alpha - \mu N = 0$$

$$F \cdot \cos\alpha - \mu(G - F\sin\alpha) = 0$$

$$F = \frac{\mu G}{\cos\alpha + \mu \sin\alpha}$$

[nju:mereitə]

$\frac{\text{numerator}}{\text{denominator}}$

[dinomineitə]

minimum $\quad \frac{dF}{d\alpha} = 0$

zlomek = fraction [frækšn]

$$F' = \frac{0 - \mu G(-\sin\alpha + \mu \cdot \cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu \sin\alpha)^2} = 0$$

$$\Rightarrow (-\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 0$$

$$\underline{\underline{\mu = \operatorname{tg}\alpha}}$$

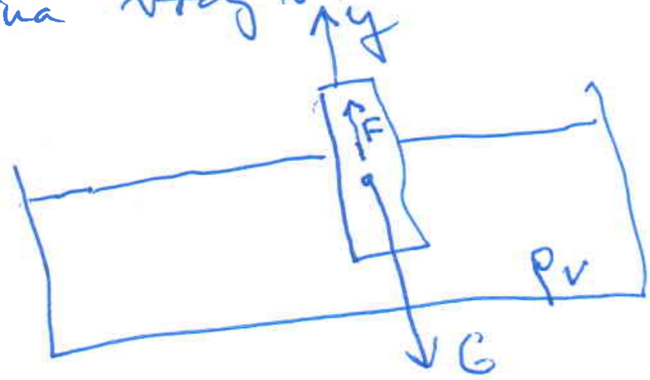
Příklad 13

Dřevěný válec ponořený do $2/3$ výšky vytáhneme z vody. Jakou práci vykonáme? Poloměr válce je 10 cm, výška 60 cm, hustota dřeva 600 kg/m³. Předpokládejte, že hladina vody v nádobě se nemění.

$r = 0{,}1\,m$

$v = 0{,}6\,m$

$\rho_D = 600\,\frac{kg}{m^3}$



$$dW = F \cdot dy = \int_0^{2/3 v} (G - F_{vz})\,dy =$$

$$W = \int_0^{2/3 v} (\pi r^2 \cdot v \cdot \rho_D \cdot g - \pi r^2 \cdot y \cdot \rho_V g)\,dy =$$

$$W = \left[\pi r^2 v \cdot \rho_D \cdot g \cdot y - \pi r^2 \frac{y^2}{2} \rho_V g\right]_0^{2/3 v} =$$

$$W = \pi r^2 v \cdot \rho_D \cdot g \cdot \frac{2}{3} v - \pi r^2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} v^2 \rho_V \cdot g =$$

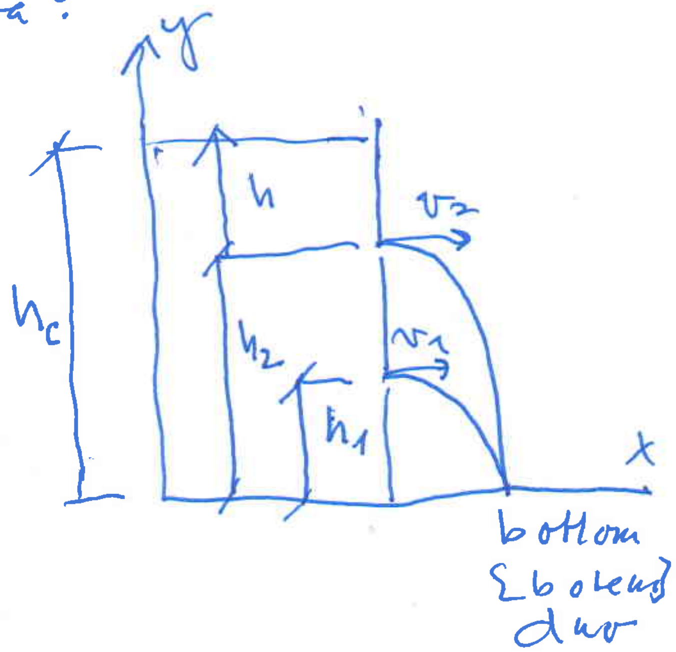
$$W = \pi r^2 v^2 g \frac{2}{3} \left(\rho_D - \frac{1}{3} \rho_V\right)$$

$$W = 3{,}14 \cdot (0{,}1\,m)^2 \cdot (0{,}6\,m)^2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2} \cdot \left(600 - \frac{1000}{3}\right)\frac{kg}{m^3}$$

$$\underline{\underline{W \doteq 20{,}1\,J}}$$

Příklad 14

Vertikálně nádoby s vodou jsou nad sebou dva otvory ve vzdálenosti h_1 a h_2 ode dna. Jak vysoko musí být voda v nádobě, aby z obou otvorů stříkala voda na vodorovnou rovinu do téhož místa?



$$hpg = \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{2hg}$$

generally

$$v_1 = \sqrt{2g(h_2 - h_1 + h)}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$x = v.t \longrightarrow t = \frac{x}{v}$$ Horizontal motion

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2$$ Freefall

$$\boxed{y = H - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v^2}}$$ parabola

If $y = 0$ $\quad 0 = H - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v^2}$

Otvor 1. $\quad 0 = h_1 - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x_1^2}{v_1^2} \longrightarrow x_1^2 = \frac{2h_1v_1^2}{g}$

Otvor 2 $\quad 0 = h_2 - \frac{1}{2}g\frac{x_2^2}{v_2^2} \qquad x_2^2 = \frac{2h_2 \cdot v_2^2}{g}$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$\frac{\cancel{2}h_1v_1^2}{\cancel{g}} = \frac{\cancel{2}h_2v_2^2}{\cancel{g}}$$

$$h_1 \cdot (2g(h_2 - h_1 + h)) = h_2(2gh)$$

$$h_1h_2 - h_1h_1 + h_1h = h_2h$$

$$h = h_1$$

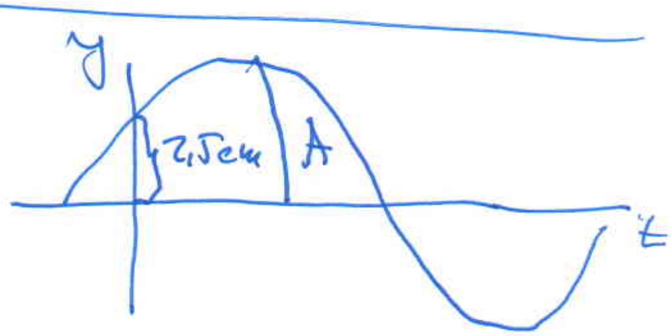
$$\boxed{h_c = h_2 + h_1}$$

Příklad 15

5.4

Napište rovnici kmitavého pohybu hmotného bodu, jestliže max. zrychlení $a_{max} = 50\frac{cm}{s^2}$ a perioda kmitů je $T = 2s$. Vzdálenost kmitajícího bodu od rovnovážné polohy je v čase $t = 0$ rovna 2,5cm.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2s} = \underline{\underline{\pi s^{-1}}}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = A\omega \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \varphi)}_{max = 1}$$

$$a_{max} = -\omega^2 A$$

$$A = \left| \frac{a_{max}}{\omega^2} \right| = \frac{0{,}5\,ms^{-2}}{(\pi \cdot s^{-1})^2} \doteq 5 \cdot 10^{-2} m$$

$$\underline{\underline{A = 5 \cdot 10^{-2} m}}$$

$$t = 0 \Rightarrow y = A \cdot \sin\varphi$$

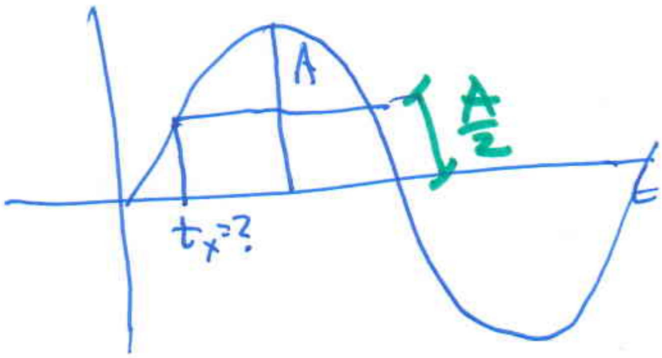
$$\sin\varphi = \frac{y(0)}{A} = \frac{2{,}5 \cdot 10^{-2} m}{5 \cdot 10^{-2} m} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{\varphi = 30° = \frac{\pi}{6}}}$$

$$\underline{\underline{y = 5 \cdot 10^{-2} m \cdot \sin\left(\pi s^{-1} \cdot t + \frac{\pi}{6}\right)}}$$

Příklad 16 5.7

Těleso koná harmonický pohyb, doba periody je $T = 6s$, počáteční fáze je 0.
Za jak dlouho od počátku pohybu je výchylka z rovnovážné polohy rovna polovině amplitudy?



$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t_x) = \frac{1}{2} A \qquad \varphi = 0$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{6s} = \frac{\pi}{3s}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{A} = \cancel{A} \cdot \sin \omega t_x$$

$$\sin \boxed{\frac{\pi}{6}} = \sin \boxed{\frac{\pi}{3s} t_x}$$

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3s} \cdot t_x$$

$$\underline{\underline{t_x = \frac{1}{2} s}}$$

Typy příkladů ke zkoušce

1, $\vec{a} = [3\vec{i}t + 2t\vec{j}] \to \vec{v} \to \vec{V} = ?$

2, Pohyby
- volný pád
- ~~rov~~ rovnoměrný
- šikmý vrh

3, Zákon zachování energie

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{konst}$$

4, $$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{M}$$

5, Kinetická energie tuhého tělesa

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

6, momenty setrvačnosti
- tenká tyčka
- válec
- kruhový disk

7, $$S_1 v_1 = S_2 v_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + h\rho g + p = \text{konst.}$$

8, kmity

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$