

KMITY

Kmity → děj pravidelně se opakuje v průběhu času

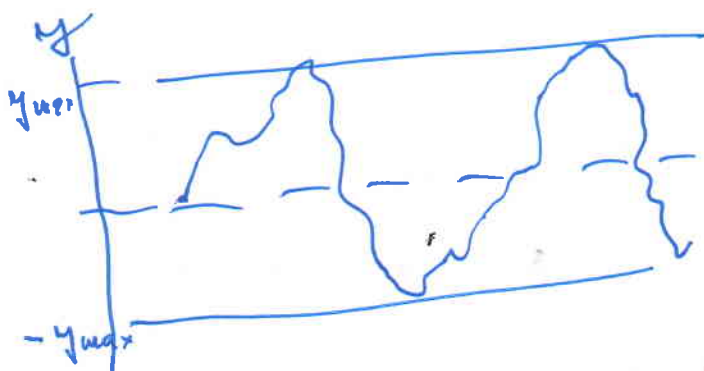
Fyzikální podstata — kyvadla
 — mechanické kmity { — struny
 — elektromagnetické kmity } mechan. kmity

— elektromagnetické kmity

Matematický popis pro všechny druhy kmitů je stejný.

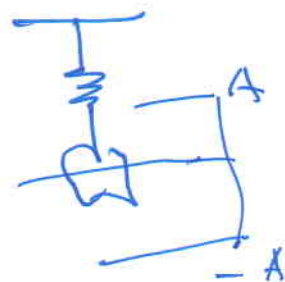
Kmitavý pohyb je takový pohyb, při kterém těleso nepřetržitě jistě hraničí od určité rovnovážné polohy

$$y(t) \leq |y|_{\max}$$



Kmitavý pohyb se nazývá **periodický**
 je zvlášť $y(t) = y(t+T) = y(t+k \cdot T)$
 $T [s]$ perioda
 $f = \frac{1}{T} [\frac{1}{s} = Hz]$ frekvence (kmitočty)

Lineární oscilátor - tělesa se při kmitání pohybují po přímce



Netlumení kmit - opakuje se do své idealizace

Tlumení kmit - teatne - utlumise

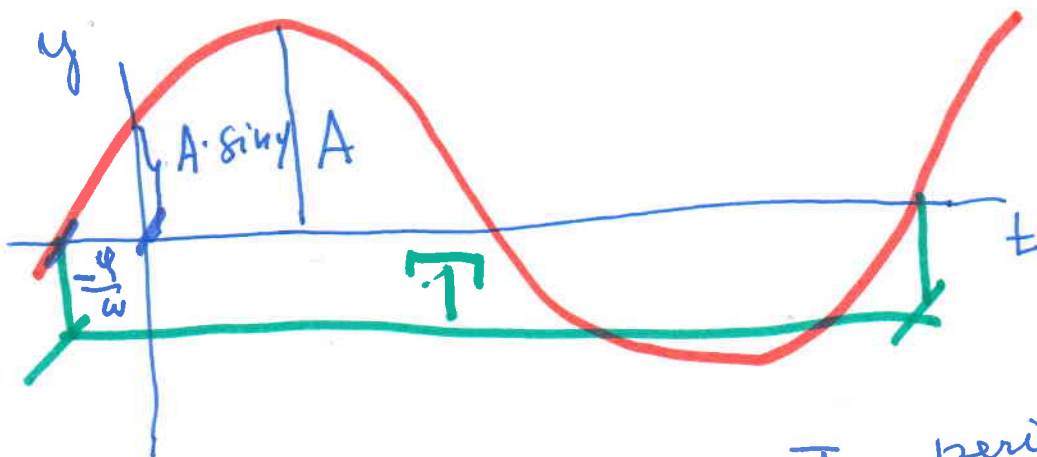
45. Volné harmonické kmity

Volné = nezlumené

Harmonické = funkcie $\begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases}$

Kmity - per. nepřehročí hranici

matematicky - $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$



y - výchylka

A - amplituda

$(\omega t + \varphi)$ - fáze

ω - úhlová rychlost $[s^{-1}]$

φ - fáze v počátku

T ... perioda $[s]$

$\frac{1}{T} = f [s^{-1} = Hz]$ frekvence

Funkce sinus je periodická s periodou 2π

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t + T) + \varphi$$

$$2\pi = \omega T$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

Výchylka $y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

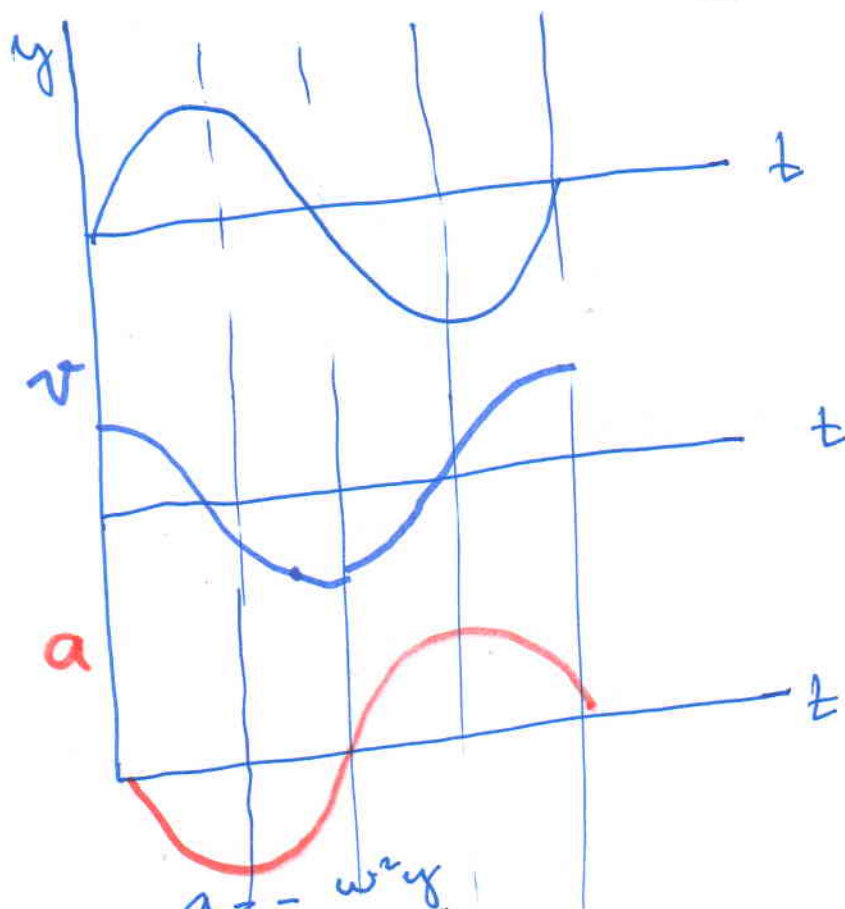
Rychlost

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

Zrychlení

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 y$$



$$a = -\omega^2 y$$
$$y'' = -\omega^2 y$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Diferenciální rovnice popisující pohyb harmonického kmitu.

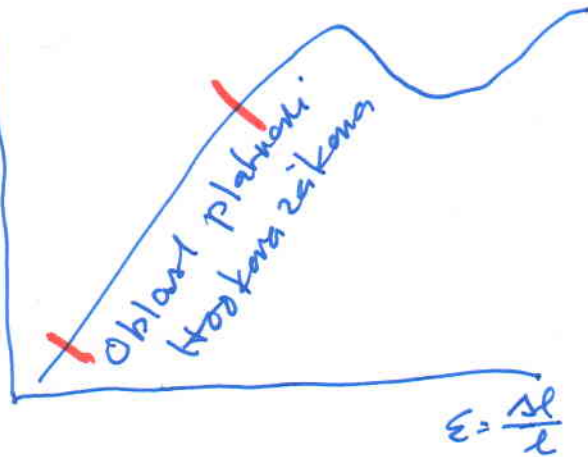
Dynamické posouzení!



$$F = -ky \quad \text{Sílová rovnice}$$

$$\sigma = \frac{F}{S} \left[\frac{N}{m^2} \right]$$

$k = \text{tuhost pružiny}$



$$F = -ky$$

$$ma = -ky$$

$$my'' + ky = 0 \quad / \quad \frac{1}{m}$$

$$y'' + \left(\frac{k}{m} \right) y = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Diferenciální rovnice popisují volné harmonické kmity

Řešení - výchylka

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \frac{k}{m} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Doba kmitu T závisí na amplitudě A .

46. Fyzikální kyvadlo

Tuhé těleso, které se otáčí okolo osy O neprocházející těžištěm

2 pohybové rovnice
pro otáčiví tuhé těleso

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\omega}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad v = l$$

$$l \perp F$$

$$|M| = -lmg \sin \varphi$$

$$-lmg \sin \varphi = J \cdot \varphi'' / \frac{1}{J}$$

$$\varphi'' + \left(\frac{lmg}{J} \right) \varphi = 0$$

$$\boxed{\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0}$$

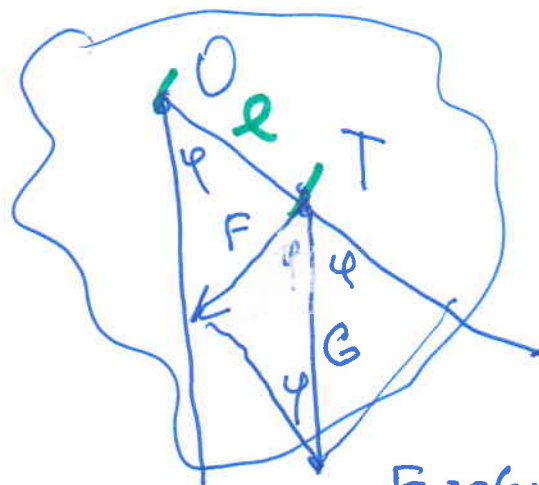
$$\omega^2 = \frac{lmg}{J} = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$$

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{J}{mgl}}}$$

Zvláštním případem fyzikálního kyvadla
je matematické kyvadlo pro který $J = ml^2$.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{ml^2}{mgl}}$$

$$\boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}}$$



$$F = -l \cdot \sin \varphi$$

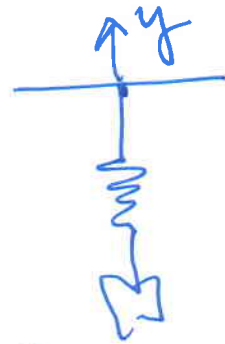
$$\sin \varphi = \varphi + \dots$$

$$\varphi < 5^\circ \cdot \sin \varphi \approx \varphi$$

47. Energi harmonického kmity

Při výhledu bude mít
těleso potenciální energii

$$E_p = W - \int_0^y F dy = - \int_0^y m a dy$$



$$E_p = - \int_0^y m \cdot (-\omega^2 y) dy$$

$$E_p = + m \omega^2 \int_0^y y dy = m \omega^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^y$$

$$E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = \omega A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

$$a = -\omega^2 y$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \omega^2 A^2 \cdot \cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) \right]$$

$$E_c = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 = \text{konst}$$

Je konstantní!
potřeba naměřit.

48. Tlumení kmitů

Volné (netlumené) kmity se idealizují

Tlumení kmitů – reálné. Amplituda s časem klesá
– příčina – kmit / v pružině
obalují proudící
zář. na hmotu a
nehybné těleso

Tlumič síla

$$F_t = -R_m \cdot v$$

R_m – mechanická
vzdálenost

$$F = -R_m \cdot y' + ky$$

Silová rovnice
tlumených kmitů

$$my'' + R_my' + ky = 0 \quad \frac{1}{m}$$

$$y'' + \frac{R_m}{m} y' + \frac{k}{m} y = 0$$

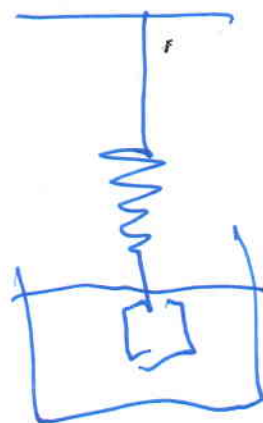
$$\frac{R_m}{m} = 2\delta$$

δ – koeficient tlumení

$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Dif. rov. popisující tlumené kmity.



$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = 0$$

Rešeni mumi bgt bram $y = C \cdot e^{\alpha t}$

$\alpha \dots$ kořen charakteristické rovnice.

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega^2 = 0$$

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1) $\delta^2 - \omega^2 < 0 \Rightarrow \delta < \omega \Rightarrow$ jsou kořeny komplexní $\sqrt{-1} = j$

$$\alpha_1 = -\delta + j\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

$$\alpha_2 = -\delta - j\sqrt{\omega^2 - \delta^2}$$

Označme $\omega_1^2 = \omega^2 - \delta^2$

$$\alpha_1 = -\delta + j\omega_1$$

$$\alpha_2 = -\delta - j\omega_1$$

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

Euler.

$$e^{j\omega_1 t} = \cos \omega_1 t + j \sin \omega_1 t$$

$$e^{-j\omega_1 t} = \cos \omega_1 t - j \sin \omega_1 t$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$y = e^{-\delta t} [C_1 \cos \omega_1 t + j C_1 \sin \omega_1 t + C_2 \cos \omega_1 t - j C_2 \sin \omega_1 t] =$$

$$= e^{-\delta t} [j(C_1 - C_2) \sin \omega_1 t + (C_1 + C_2) \cos \omega_1 t]$$

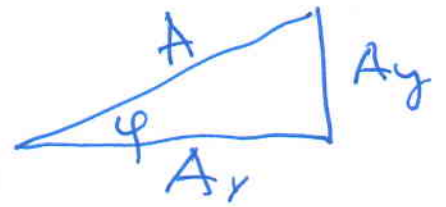
$C_1, C_2 \dots$ integrace konstanty $\Rightarrow$ můžeme zavést
finit konstanty

$$Ax = j(C_1 - C_2)$$

$$Ay = (C_1 + C_2)$$

$$y = e^{-\delta t} (Ax \cdot \sin \omega_1 t + Ay \cdot \cos \omega_1 t)$$

$$y = \bar{e}^{\delta t} (A \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega_1 t + A \sin \omega_1 t \cdot \sin \varphi)$$



$$A_x = A \cdot \cos \varphi$$

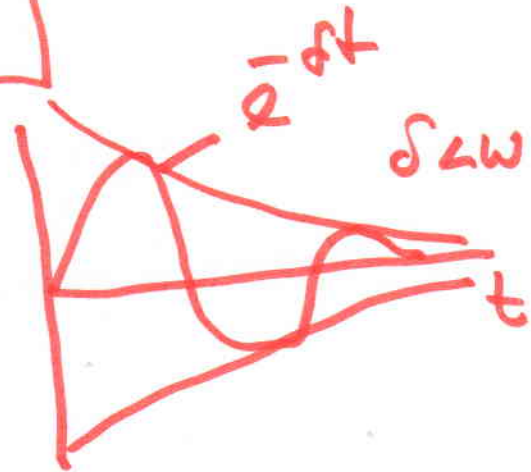
$$A_y = A \cdot \sin \varphi$$

$$y = A \bar{e}^{\delta t} \cdot \sin(\omega_1 t + \varphi)$$

pr $\delta < \omega$

y

δ -konstanta inflexion [$\bar{s}'$]



Übung b

$$b = \frac{y_1}{y_2}$$

$$t_2 = t_1 + T$$

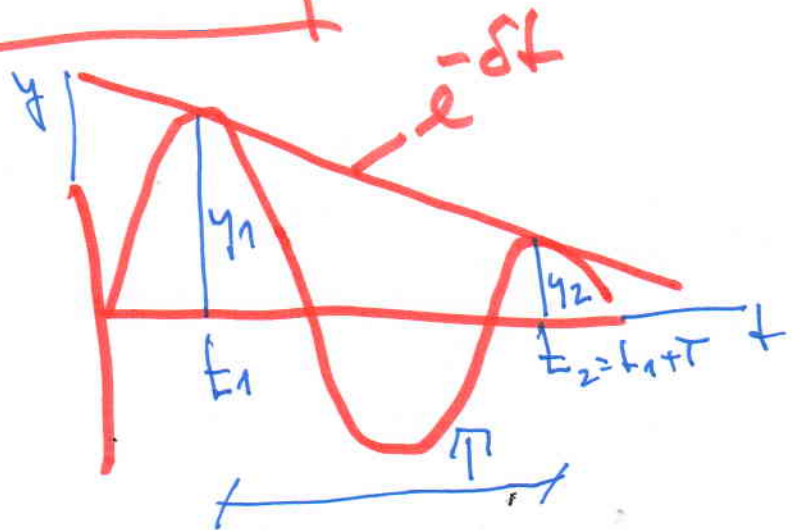
$$b = \frac{y_1}{y_2} = \frac{A e^{-\delta t_1} \sin(\omega t_1)}{A e^{-\delta t_2} \sin(\omega t_2)} = \frac{\cancel{e^{-\delta t_1}} \cdot \cancel{\sin(\omega t_1)}}{\cancel{e^{-\delta(t_1+T)}} \cdot \cancel{\sin(\omega(t_1+T))}} \quad \text{periodisch}$$

$$b = \frac{1}{e^{-\delta T}} = e^{\delta T}$$

$$b = e^{\delta T} \quad - \text{rituum}$$

Logarithmisch' decrement rituum $\mathcal{Q}$

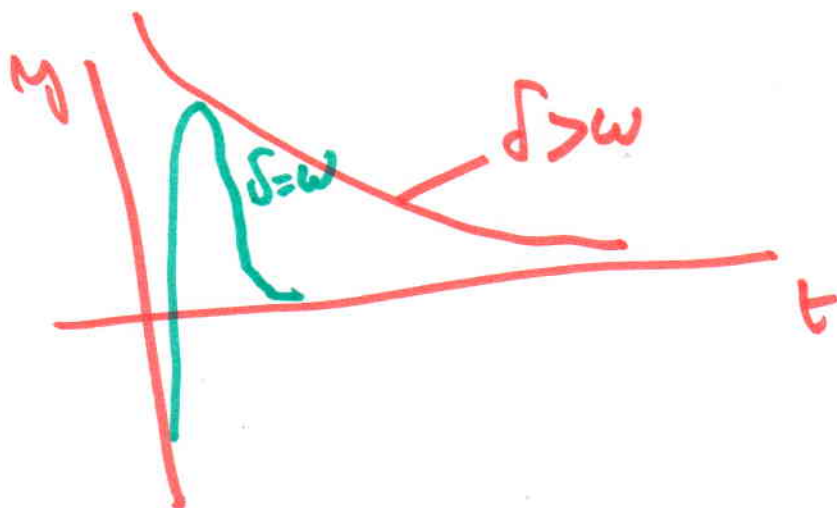
$$\mathcal{Q} = \ln b = \delta T$$



2. $\delta^2 - \omega^2 > 0 \Rightarrow \delta > \omega$
 $\Rightarrow$ oba koreny charakteristické rovnice
 jsou reálné různé

$$\beta_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega^2} \quad \beta_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

Obeuň tvar $y = c_1 e^{\beta_1 t} + c_2 e^{\beta_2 t}$
 nelze přerist pomocí Eulerova vzáhu na
 sin a cos. $\Rightarrow$ **Aperiodický**



3/

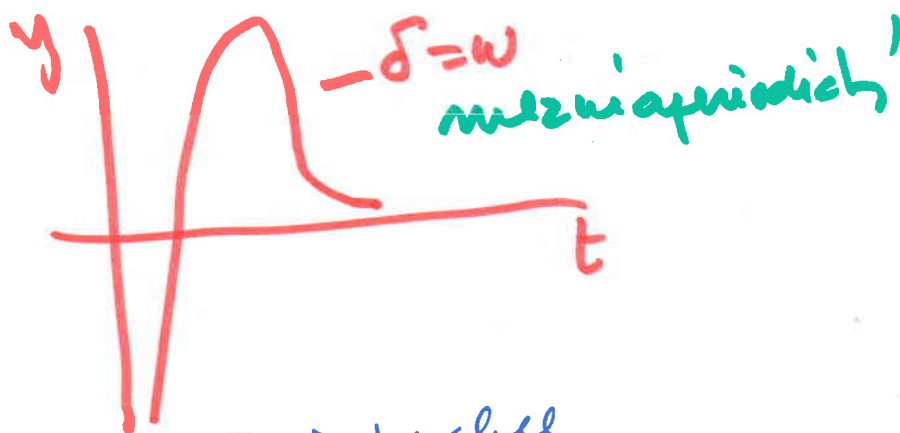
$$\delta^2 - \omega^2 = 0 \Rightarrow \delta = \omega =$$

= mezu' aperiadich' pohyb

$$\alpha_{1,2} = -\delta$$

$$y = c_1 e^{-\delta t} + c_2 \cdot \sqrt{t} e^{\delta t} = (c_1 + c_2 \sqrt{t}) e^{\delta t}$$

Mezu' p'uvu' pomoci Eulerova vzťahu
na $\sin$ a $\cos$.



Plum' si velmi rychle

za dobu $t = T$ jedné periody je
výška méně než 1% max. výšky.

Výsledek: píšeme kde kmita vrací
— váha
— rotační

$\delta = \omega \Rightarrow$ rychle ustávení

49. Vynucení kmitů

Chceme-li tlumění kmitů udržet kmitat, musíme z vnějšího zdroje doplnovat energii, kterou oscilátor při každém cyklu ztrácí.

To lze provést působením vnější periodické síly sinusového působení

Vnější síla (budící)

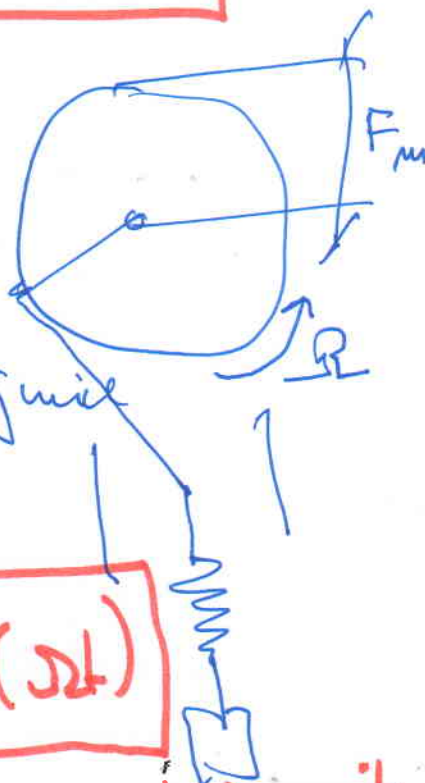
$$F_b = F_m \cdot \sin(\Omega t)$$

$$F = -F_t - ky + F_m \cdot \sin(\Omega t)$$

Silová rovnice

$$m y'' = -R m \omega y' - ky + F_m \cdot \sin(\Omega t)$$

$$y'' + \frac{Rm}{m} y' + \frac{k}{m} y = \frac{F_m}{m} \sin(\Omega t)$$



$$y'' + 2\delta y' + \omega^2 y = A_v \sin(\Omega t)$$

Dif. rov. popisující vynucení kmitů.

Řešení

$$y = A \cdot e^{\gamma t} \sin(\omega t + \varphi) + A_v \sin(\Omega t + \theta)$$

A_v - amplituda
vynucených
kmitů

Po čase utluhne $\Rightarrow$

$$y = A_v \sin(\Omega t + \theta)$$

Dosazením do diferenciálu lze
malíř $A_v = \frac{F_m}{m}$

$$\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2\Omega^2}$$

amplituda nucenýde kmitů bude maximální,
když jmenovatel bude co nejmenší.

Tj. když derivace jmenovatele pod odmocninou
bude = 0. (pode Ω).

$\Rightarrow$ Resonance může nastat
kmita budící sílou

Staví pozor - když ...
vůči musí zrušit
a pod ...
krok

50. Skládání kmitů

Při skládání harmonických kmitů platí princip **superpozice**.

Výsledný pohyb

1) Při pohybu podél téže přímky = algebraický součet

2) Při pohybu v různých směrech = vektorový součet

Skládání kmitů protiběžících v téže přímce

— kmitů se stejnou frekvencí $f_1 = f_2$ $\gamma = \angle_{2A}^0$

— kmitů blízkých frekvencí $f_1 \approx f_2$

— kmitů souměřitelných frekvencí $\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Kmity se stejnou frekvencí

$$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2)$$

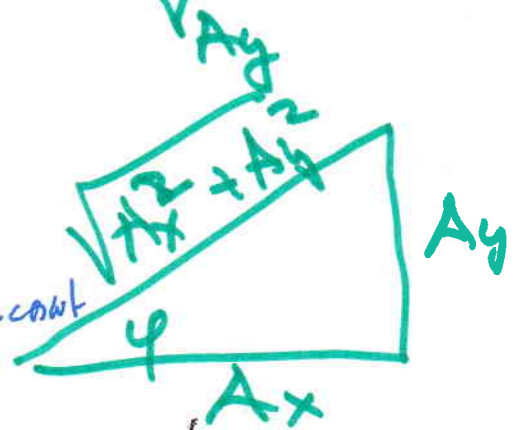
$$y = y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= A_1 \sin \omega t \cos \varphi_1 + A_1 \cos \omega t \sin \varphi_1 + \\ &+ A_2 \sin \omega t \cos \varphi_2 + A_2 \cos \omega t \sin \varphi_2 = \\ &= \underbrace{(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)}_{A_x} \sin \omega t + \underbrace{(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)}_{A_y} \cos \omega t \end{aligned}$$

$$y = A_x \cdot \sin \omega t + A_y \cdot \cos \omega t$$

$$y = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \omega t + \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \cdot \sin \varphi \cdot \cos \omega t$$



$$y = A^* \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\sin \varphi = \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2}}$$

$$\text{Kde } A^* = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} =$$

$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

1)

Jer-ei $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ (kmitly maji stejnou fázi)

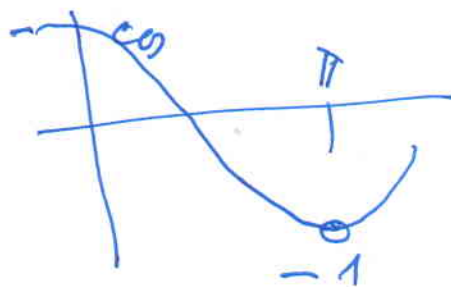
$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$$

$$\tan \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{A_y}{A_x} = 0$$

$$\text{když } A_1 = A_2 \Rightarrow A^* = 2A$$

2) $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$ fáze kmitů jsou opačné

$$A^* = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = A_1 - A_2$$



$$\tan \varphi = 0$$

$$\text{když } A_1 = A_2 \Rightarrow A = 0$$

Kmity blízkých frekvencí

Uvažujme kmity

$A_1 = A_2 = A$ = stejné amplitudy

$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi = 0$ nulová počáteční fáze

$f_1 \neq f_2$ jsou různé avšak blízké

$$y_1 = A \cdot \sin \omega_1 t$$

$$y_2 = A \cdot \sin \omega_2 t$$

$$y = y_1 + y_2$$

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= \\ &= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \end{aligned}$$

$$y = 2A \cdot \left[\cos \frac{1}{2} (\omega_1 - \omega_2) \cdot t \right] \cdot \sin \frac{1}{2} (\omega_1 + \omega_2) t$$

Výsledek

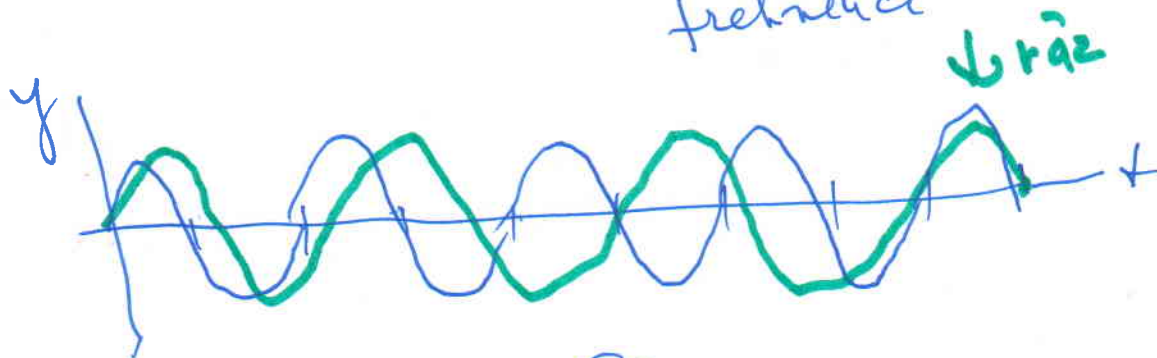
$$y = A' \cdot \sin \omega t$$

amplituda A'
kolísá mezi
hodnotami $\pm 2A$

Uzrívají

rázy

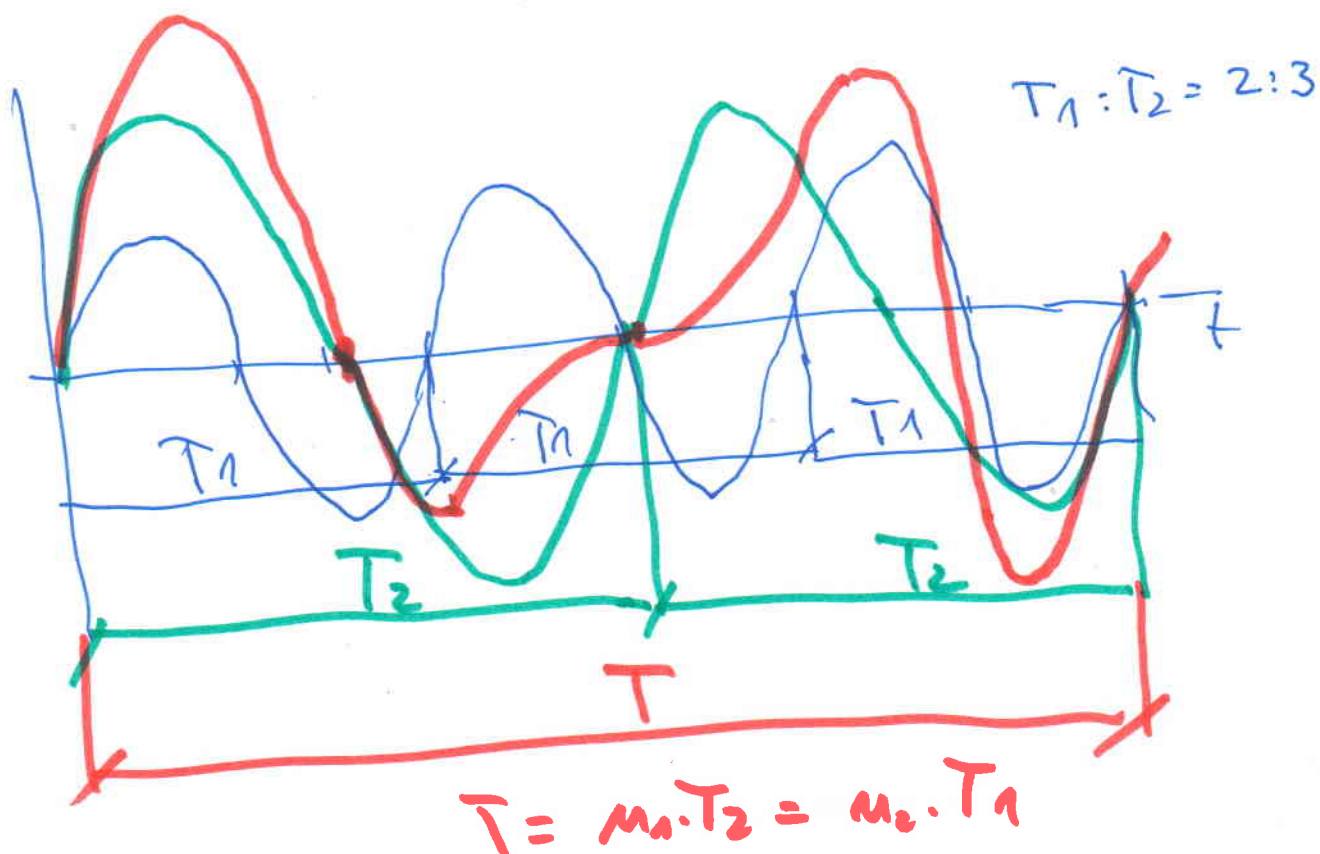
Počet rázů za 1 sekundu je
číselný vzhledem k rozdílu obou
frekvencí



Kmity souměřitelných frekvencí

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{m_2} = \text{racionální číslo}$$

$$y = y_1 + y_2 = A_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_1} + \varphi_1\right) + A_2 \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T_2} + \varphi_2\right)$$



Výsledný kmit není harmonický, je však periodický

Proč-li to jsou v rozsahu slyšitelnosti,
slyšíme ucho je vnímá odděleně, ale

dvou z nich.

Jeli poměr kmitů dáva malý celkový číslo:

= **lipozručný (konsonantní)**

v opačném případě **nesrozumitelný (dissonantní).**

Skládání různosměrných kmitů

Výsledkem je dále superpozici vektorové součtu
jednotlivých vln.

Uvažujme dva **Kolme** směry.

$$A_1 = A_2 = A$$

$$f_1 = f_2 = f$$

$$x = A \cdot \sin(\omega t)$$

$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$



$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$y = A \sin \omega t \cos \varphi + \boxed{A \cos \omega t \sin \varphi}$$

$$A^2 = A^2 (\underbrace{\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}_1)$$

$$A \cos \omega t = \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2 \omega t}$$

$$y = \cos \varphi \cdot A \sin \omega t + \sin \varphi \cdot \sqrt{A^2 - A^2 \sin^2 \omega t} =$$

$$y = \cos \varphi \cdot x + \sin \varphi \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$y - \cos \varphi \cdot x = \sin \varphi \cdot \sqrt{A^2 - x^2}$$

$$y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 \cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi (A^2 - x^2)$$

$$\boxed{y^2 - 2xy \cos \varphi + x^2 = A^2 \sin^2 \varphi}$$

**Rovnice
elipsy**

Osy souřadnic x a y jsou s osami x a y
Tvar závisí na fázovém posunu φ obou kmitů

Pro $\varphi = 0, \pi$ se elipsa rozpadá na 2 přímky

$$x^2 \pm 2xy + y^2 = 0 \quad y = \pm x$$



Je-li $\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x^2 + y^2 = A^2 \Rightarrow$ **kměnic**
o poloměru A .

Lissajousovy obrazy

měřeni frekvencí

	$\varphi = 0$	$\pi/4$	$\pi/2$	$3/4\pi$	π
Poměr kměnic					
1:1					
2:1					
3:1					
3:2					