

Kinematika hmotných bodů

(4) Pohyb hmotných bodů

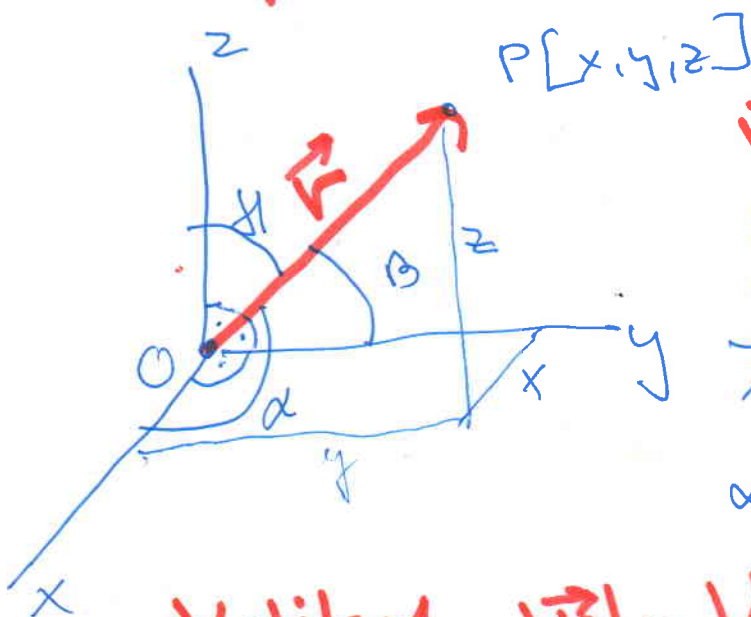
Kinematika = popis pohybu $\begin{cases} \text{dráha} \\ \text{rychlost} \\ \text{zrychlení} \end{cases}$

Dynamika = příčina pohybu $\equiv$ síla

Hmotný bod – má vědu výsledku tělesa
(hmotnost, rychlost, zrychlení)
– nemá nemá rozměr
= pouze jeden bod
 $\Rightarrow$ nemůže rotovat $\Rightarrow$ pouze
posuvný pohyb, ne rotační

Poloha + dráha

Kartesky souřadný systém $x \perp y \perp z$



$\vec{r} \dots$ polohový vektor

x, y, z souřadnice
 r_x, r_y, r_z vektoru $\vec{r}$

$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ jednotkové vektory

α, β, γ úhly

Velikost $|\vec{r}| = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2}$

$\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} \text{ [m]}$

Směrní cosiny

$$\cos \alpha = \frac{v_x}{|\vec{v}|} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{v_y}{|\vec{v}|}$$

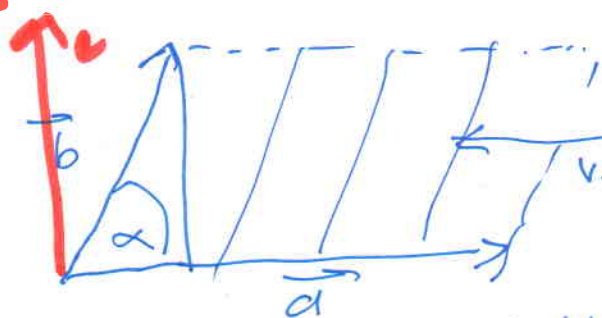
$$\cos \gamma = \frac{v_z}{|\vec{v}|}$$

vektory - veličn. $\vec{v}, \vec{a}, \vec{p}$
směr

skalár - veličn.
 A, V, m

Vektorní součin

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$



Velikost

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$$

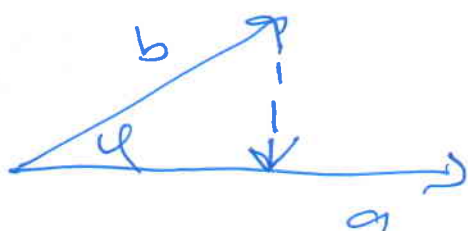
velikost
plochy

směr $\vec{c}$

- pravidlo pravé ruky:
převrtnout směr $\vec{a} \rightarrow \vec{b}$,
palec paralelně směru $\vec{c}$

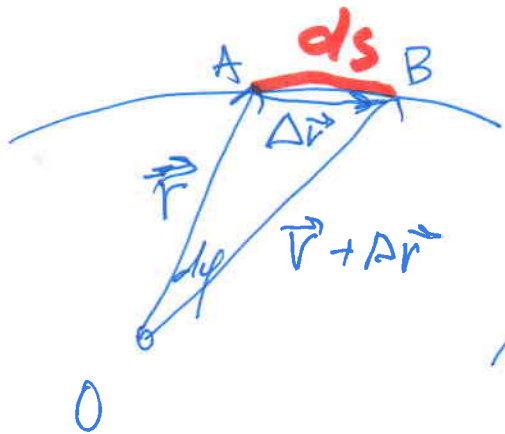
Skalární součin

$$c = \vec{a} \cdot \vec{b}$$



$$|c| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

5. Okamžitá rychlost



střední rychlost

$$v_s = \bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \approx \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta t} \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Okamžitá rychlost

Bod B → přemísťujeme těsně k bodu A

$$\Rightarrow \Delta t \rightarrow 0$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}}$$

Okamžitá rychlost je definována jako derivace polohového vektoru podle času.

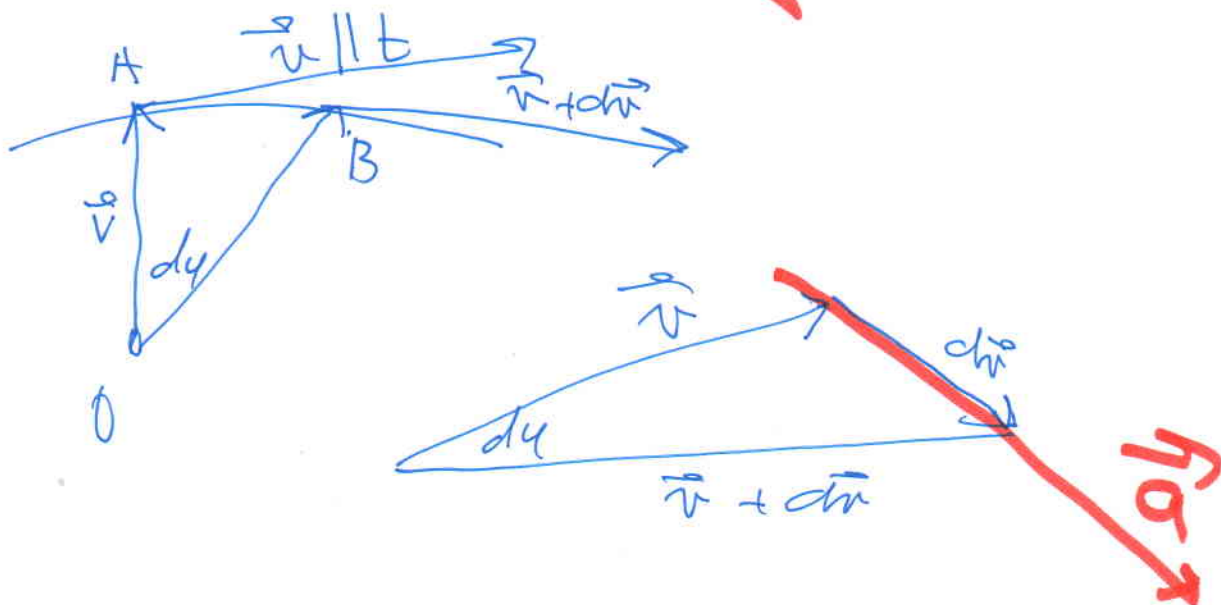
$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad , \quad v_y = \frac{dy}{dt} \quad , \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$\vec{v} = (v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Velikost

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

6. Okamžití zrychlení



Střední zrychlení

$$a_s = \bar{a} = \frac{|\Delta \vec{v}|}{\Delta t} \quad \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

Okamžití zrychlení

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}}$$

Okamžití zrychlení je definováno jako derivace rychlosti podle času

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt}$$

$$\vec{a} = (a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

(6)

Opakování!

$$y = ax^m$$

$$y' = a \cdot m \cdot x^{m-1}$$

$$y = a$$

$$y' = 0$$

$$y = \sin x$$

$$y' = \cos x$$

$$y = \sin x^2$$

$$y' = (\cos x^2) \cdot 2x$$

$$y = \cos x$$

$$y' = -\sin x$$

Integrální funkce

$$y = \int ax^m dx$$

$$y = \frac{a \cdot x^{m+1}}{m+1} + \text{konstanta}$$

$$\left(\frac{ax^{m+1}}{m+1} + c \right)' = \frac{a \cdot (m+1) \cdot x^m}{m+1} + 0 = \underline{ax^m}$$

Určité integrály

$$\int_a^b x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_a^b = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}$$

8. Obecný pohyb

$\vec{a} = 0$ — rovnoměrný pohyb

$\vec{a} = \text{konst} \neq 0$ — rovnoměrně zrychlený (zpožděný) pohyb

$\vec{a} = \vec{a}(t)$ — obecný zrychlený pohyb

1, $\boxed{\vec{a} = \text{konst} \neq 0}$ — rovnoměrně zrychlený / zp. pohyb

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Separace proměnných

$$d\vec{v} = \vec{a} dt$$

Integrát

$$\int d\vec{v} = \int \vec{a} dt$$

$$\vec{v} + c_1 = \vec{a}t + c_2$$

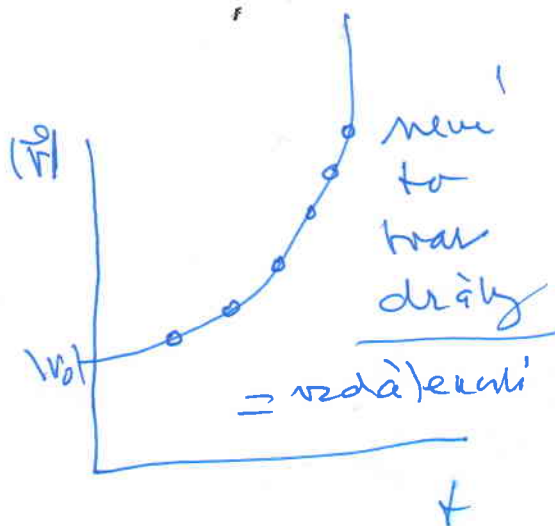
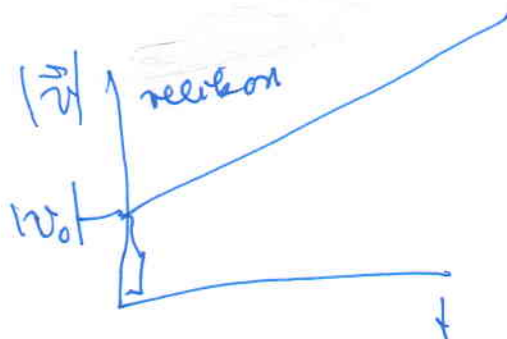
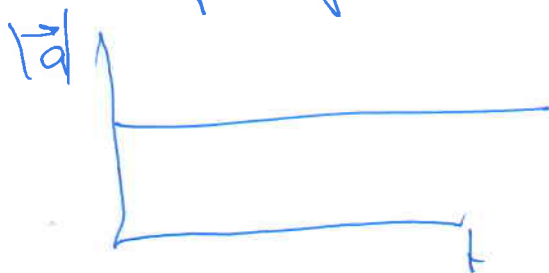
$$\vec{v} = \vec{a}t + \underbrace{(c_2 - c_1)}_{\vec{v}_0}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int d\vec{r} = \int \vec{v} dt = \int (\vec{a}t + \vec{v}_0) dt$$

$$\boxed{\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{a}t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0}$$

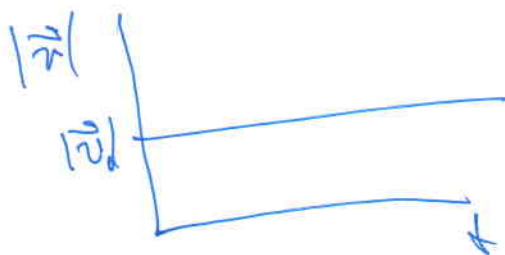


2) $\vec{a} = 0$ rovnoměrný pohyb

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\int d\vec{v} = \int \vec{a} dt = \int 0 dt$$

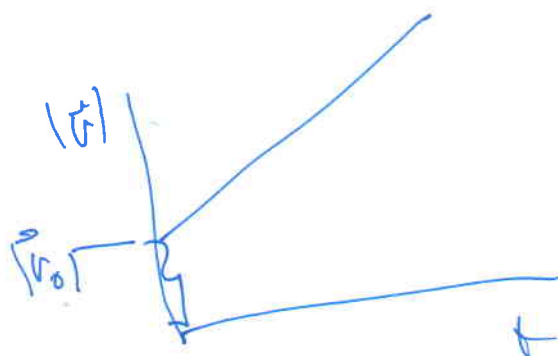
$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}_0}$$



$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int d\vec{r} = \int \vec{v} dt = \int \vec{v}_0 dt$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{v}_0 \cdot t + \vec{r}_0}$$



Přímový pohyb

$$\vec{a} = (a_x, 0, 0)$$

Rovnoměrně zrychlený
přímový

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int dv_x = \int a_x dt$$

$$v_x = a_x \cdot t + v_{x0}$$

$$v_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int dv_x = \int v_x dt$$

$$v_x = \frac{a_x}{2} t^2 + v_{x0} t + v_{x0}$$

Rovnoměrný přímý

$$a_x = 0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int dv_x = \int 0 dt$$

$$v_x = v_0$$

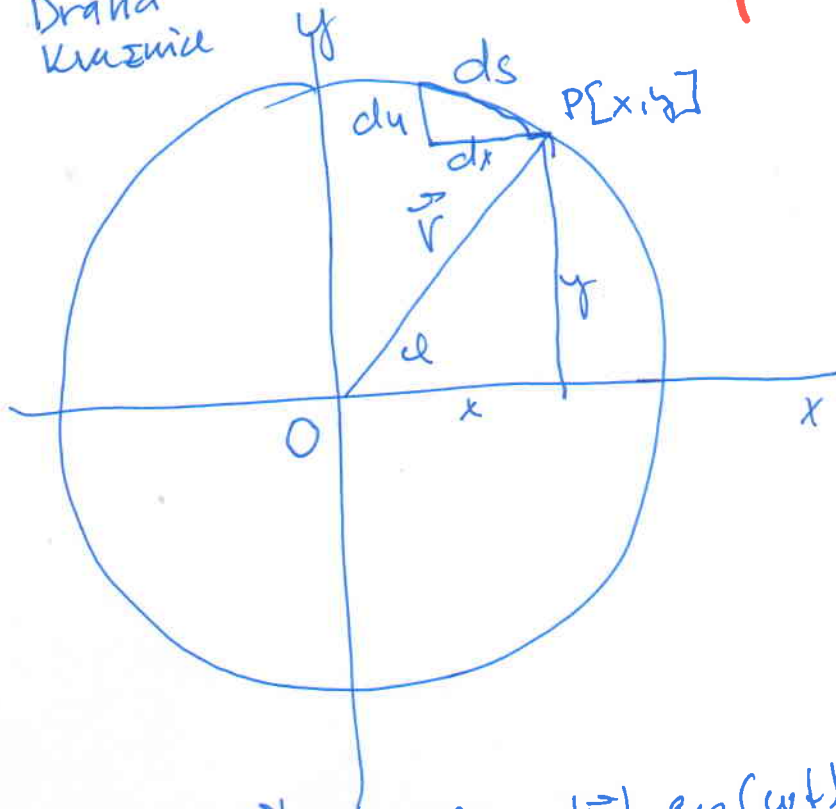
$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\int dx = \int v_x dt = \int v_{x0} dt$$

$$x = v_{x0} \cdot t + x_0$$

10. Rovnoměrný kruhový pohyb

Dráha
Kružnice



$\vec{v} \dots \vec{\omega}$... úhlová dráha
 $\vec{v} \dots \vec{\omega}[s]$... úhlová rychlost
 $\vec{a} \dots \vec{\epsilon}[s]$... úhloví zrychlení

$\phi = \omega \cdot t$
 úhel narůstá rovnoměrně
 ~ časem

$$x = |\vec{r}| \cdot \cos \phi = |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t)$$

$$y = |\vec{r}| \cdot \sin \phi = |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t)$$

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j}$$

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t) \vec{i} + |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t) \vec{j}$$

Delka dráhy

$$s = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\omega |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t)$$

$$\frac{dy}{dt} = \omega |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t)$$

$$dx = -\omega |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t) dt$$

$$dy = \omega |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t) dt$$

$$S = \int_0^t \left(\omega^2 |\vec{r}|^2 \sin^2(\omega t) + \omega^2 |\vec{r}|^2 \cos^2(\omega t) \right) \cdot dt$$

$$S = \int_0^t \underbrace{\omega^2 |\vec{r}|^2 (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))}_{1} dt$$

$$S = \omega \cdot |\vec{r}| \cdot t = |\vec{r}| \cdot \varphi$$

$$S = |\vec{r}| \cdot \varphi \quad (\text{celý kruh } S = 2\pi r)$$

Rychlost obrotů

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{r} = |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t) \vec{i} - |\vec{r}| \sin(\omega t) \vec{j}$$

$$\vec{v} = -\omega |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t) \vec{i} + \omega |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t) \vec{j}$$

Zrychlení

$$\vec{a} = -\omega^2 |\vec{r}| \cdot \cos(\omega t) \vec{i} - \omega^2 |\vec{r}| \cdot \sin(\omega t) \vec{j}$$

Tedy $\boxed{\vec{a} = -\omega^2 \vec{r}}$

Dorůadí

$$|\vec{a}| = |-\omega^2 \vec{r}| = \frac{\omega^2 r}{1}$$

$$\Rightarrow \boxed{r = r \cdot \omega}$$

$$|\vec{a}| = \frac{v^2}{r}$$

Vztah mezi
obrotovou a
úhlovou rychlostí
(skalární)
 $v = \omega r$
 $\omega > \text{konstanta}$

Tedy

$$\vec{a}_t = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{d(r \cdot \omega)}{dt} = 0$$

$$|\vec{a}_t| = 0$$

$\varphi = \omega t$
celý obrot $\Rightarrow$ perioda T

$$2\pi = \omega \cdot T$$
$$T = \frac{2\pi}{\omega} [s]$$

perioda

$$f = \frac{1}{T} [\text{s}^{-1} = \text{Hz}]$$

frekvence

Rovnoměrně zrychlený kruhový pohyb

Jen skalární

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} [\text{s}^{-2}]$$

Rovnoměrně zrychlený kruhový $\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \text{konst} \neq 0}$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} \quad \text{separate a integrate}$$

$$\int d\omega = \int \varepsilon dt$$

$$\boxed{\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$$

$$\int d\varphi = \int \omega dt = \int (\varepsilon t + \omega_0) dt$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{2} \varepsilon t^2 + \omega_0 t + \varphi_0}$$

Alt

$$v = r \cdot \omega = r \cdot \varepsilon \cdot t + r \cdot \omega_0$$

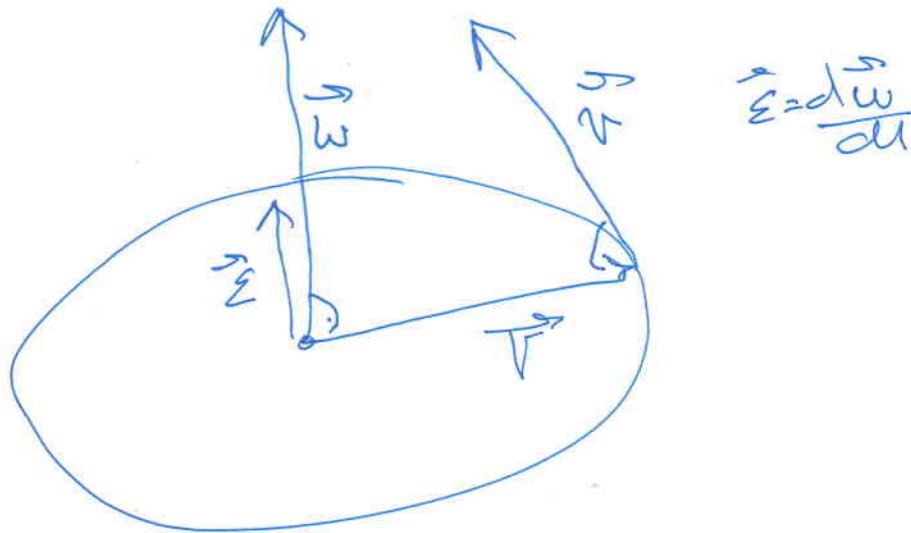
$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(r \cdot \varepsilon t + r \omega_0)}{dt} = r \cdot \varepsilon \quad \text{new} = 0$$

$$a_n = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{r^2 \varepsilon^2 + r^2 \varepsilon^4}$$

nesmēfaji dr šādu krūšņa

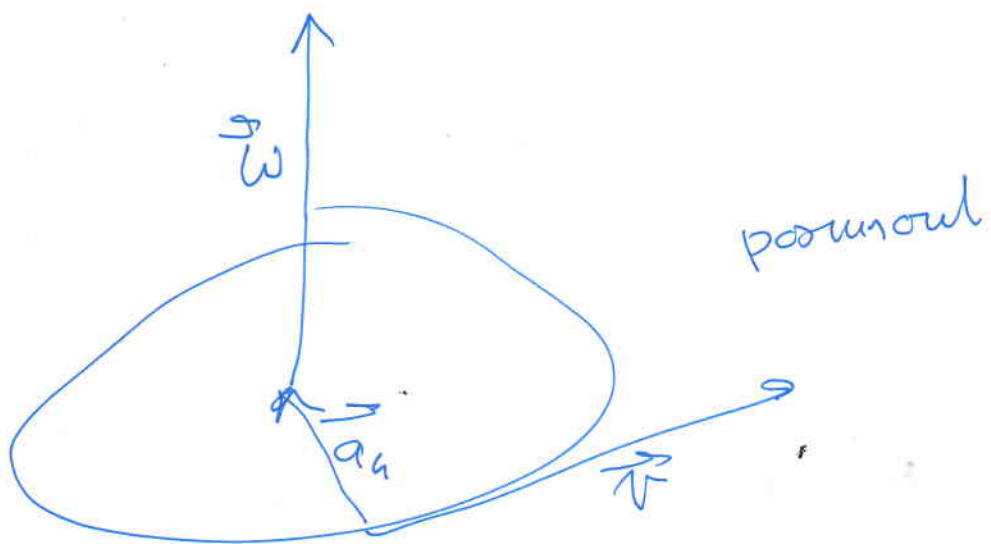
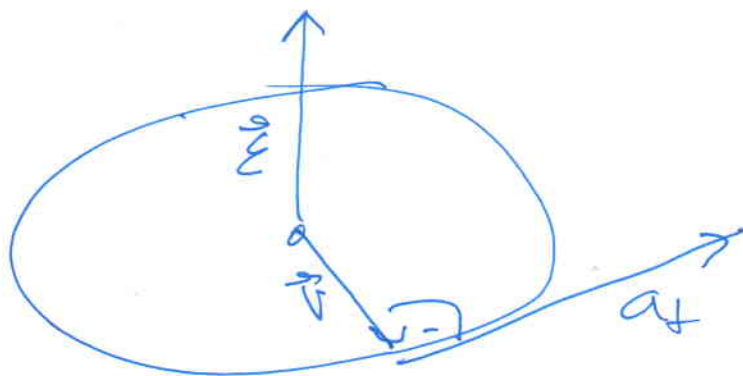
Vektoru $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\right)}_{\vec{a}_t} + \underbrace{\left(\vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt}\right)}_{\vec{a}_n}$$

$$\vec{a}_t = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

$$\vec{a}_n = \vec{\omega} \times \vec{r}$$



normal