

24. Hmotnosť a hybnosť SHB, vnútorná a vonkajšia sily SHB

Počet stupňov voľnosti „i“

Voľný hmotný bod - v priestore $i=3$ (x, y, z)

- na ploche $i=2$

- na kĺbe $i=1$

Sila, ktorá obmedzuje pohyb hmotného bodu = **vazba**

Napr. mal. kyvadlo

pohyb v rovine

l = kĺb - väzba

$i = 3 - 1 = 2$ d. voľnosti

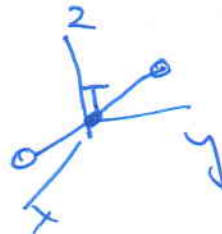
a to znamená φ

Soustava n hmotných bodov

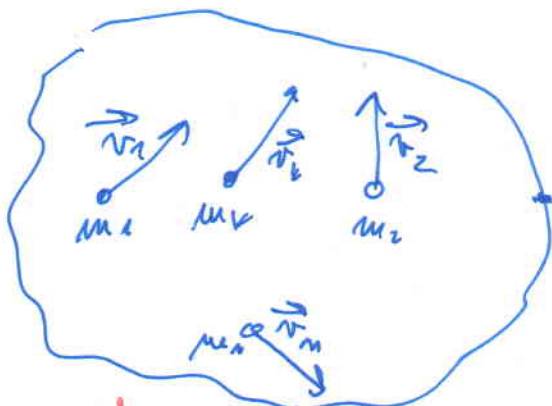
$$i = 3n - l$$

l ... počet väzieb

Dva body $i = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ d. voľnosti
spojení



x, y, z kĺbi
+ väzby
 a, b



Definície celkovej hmotnosti

Celková hmotnosť SHB:

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$$

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

Celková hybnosť SHB:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n$$

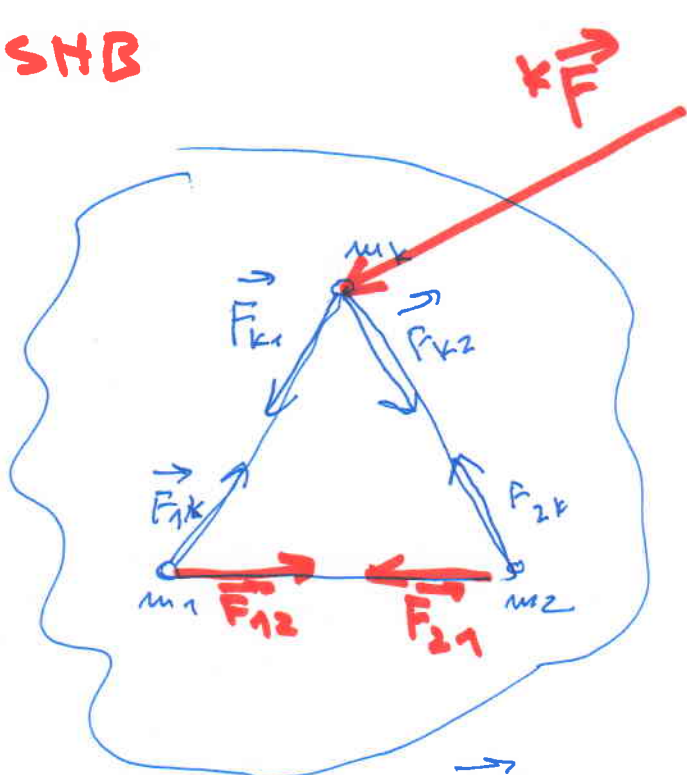
$$\vec{P} = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k$$

Vnitřní a vnější síly SHB

$k\vec{F}$ - vnější síla
na k -tý bod

na k -tý bod

$$\vec{F}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \vec{F}_{kj} + k\vec{F}$$



$$\begin{aligned} \vec{F}_{12} &= -\vec{F}_{21} \\ \vec{F}_{13} &= -\vec{F}_{31} \\ \vec{F}_{23} &= -\vec{F}_{32} \end{aligned}$$

Výsledná síla SHB

$$\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \vec{F}_{kj}$$

Součet vnitřních sil

$$\sum_{k=1}^n k\vec{F}$$

součet vnějších sil

Příklad: $n=3$

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1, j \neq k}^3 \vec{F}_{kj} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32}$$

ale $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \dots$ atd

$$\sum_{k=1}^3 \sum_{j=1, j \neq k}^3 \vec{F}_{kj} = \vec{0}$$

Zobecnění pro libovolné n :
Výsledná vnitřní síla SHB je rovna 0.

$$\Rightarrow \boxed{\vec{F} = \sum_{k=1}^n k\vec{F}}$$

Výsledná síla SHB je rovna výsledku vnější síle

25. Moment síle SHB

$$\vec{M}_{kj} = \vec{r}_k \times \vec{F}_{kj}$$

$$\vec{M}_{jk} = \vec{r}_j \times \vec{F}_{jk}$$

Výsledný moment těži
dvojitce.

$$\vec{M} = \vec{M}_{kj} + \vec{M}_{jk}$$

$$\text{ale } \vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$$

$$\vec{M} = (\underbrace{\vec{r}_k - \vec{r}_j}_{\vec{r}_{jk}}) \times \vec{F}_{kj} = 0$$

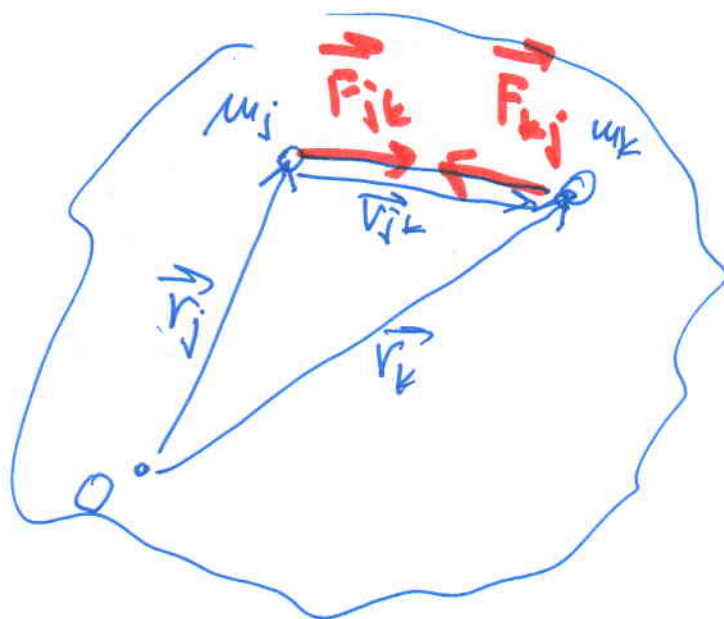
$$\vec{r}_{jk} = \vec{r}_k - \vec{r}_j \parallel \vec{F}_{kj}$$

Zobecnění

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{M}_{jk} = 0$$

Výsledný moment vřed vnitřních síle SHB
vzhledem k libovolnému bodu v pravo-
je nulový.

Vnitřní síly nemohou způsobit pohyb
soustavy. K pohybu je vřed zapotřebí
něčích vnějších síle.



26. Hmotný střed SHB, tížiště

Působení vnějších sil na SHB můžeme vyjádřit pomocí jediné síly. Výslednice $\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$.

Rěšen SHB $\Rightarrow$ n -případů rovnice
Jednoduchěji $\rightarrow$ **hmotný střed**

Hmotný střed

1, Je v něm soustředěna celá hmotnost SHB

$$M = \sum_{k=1}^n m_k$$

2, Chová se tak, jako by na něj působila výslednice vnějších sil

3, Jeho hybnost je rovna celkové hybnosti SHB.

$$M \vec{v}^* = \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k$$

* ... označujeme hmotnostní střed $\vec{r}^*$ $\vec{v}^*$

$$\frac{d(M \vec{v}^*)}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^n m_k \vec{v}_k$$

Po integraci

$$\vec{r}^* = \frac{\sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

$$\vec{r}^* = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} =$$

$$x^* = \frac{\sum_{k=1}^n m_k x_k}{\sum_{k=1}^n m_k} \quad | \quad y^* \quad | \quad z^* =$$

$$\vec{r}^* = (x^*, y^*, z^*)$$

Těžiště

Potud soustava na hmotnost $\ll$ hmotnost zemi

$\Rightarrow$ zemi lze považovat pro ... homogenní.

$\Rightarrow$ na hmotný bod působí rovnoběžné síly,
jejich výslednice prochází hmotným středem
SHB.

Dle se hmotný střed SHB $\equiv$ **těžiště**.

27. První impulsní věta

Zohlednění 2.N.Z. pro SHB

Pro k -tý bod

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k$$

$$\vec{F}_k =$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \vec{F}_{kj}$$

výslednice vnitřních sil na k -tý bod

$$+ \vec{F}_k$$

výslednice vnějších sil na k -tý bod

$$\vec{p}_k = m_k \vec{v}_k$$

Pro všechny body

$$\sum_{k=1}^n \frac{d\vec{p}_k}{dt} =$$

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{kj}$$

Výslednice vnitřních sil = 0

$$+ \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}}$$

První impulsní věta

Časová změna celkové hybnosti SHB je rovna výsledku vnější síle (působící na SHB).

Izolovaný soustav $\equiv$ soustava na kterou nepůsobí vnější síla.

$$\boxed{\vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konstanta}}$$

Celková hybnost izolovaného soustavy je konstantní

28. Druhá impulsová veta

Prí - k-ty bod

$$\frac{d\vec{b}_k}{dt} = \vec{M}_k$$

$$b_k = \vec{r}_k \times (\sum_{j=1}^N \vec{F}_{kj})$$

$$\vec{M}_k = \vec{r}_k \times \vec{F}_k = \left(\vec{r}_k \times \left(\vec{F} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \vec{F}_{kj} \right) \right)$$

$$= \left(\vec{r}_k \times \vec{F} \right) + \left(\vec{r}_k \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \vec{F}_{kj} \right)$$

Výsledný moment vnějších sil

$$\left(\vec{r}_k \times \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \vec{F}_{kj} \right)$$

Výslednice momentů vnitřních sil = 0

$$\boxed{\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}}$$

Druhá impulsová veta.

Čas mi změna momentu hybnosti SHB
vzhledem k libovolnému pevnému bodu je
rovná výslednému momentu soustředě síle
(vzhledem k těmuž bodu).

Izolovaná soustava

$$\boxed{\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \text{konstanta.}}$$

29. Tuhé těleso, skládání

Dokonalé tuhé těleso - vzdálenosti bodů se s časem nemění

Hustota tuhého tělesa - $\rho = \frac{dm}{dV}$

Hmotnost $m = \int_V \rho dV$

Poloha hmotného tělesa:

$$\vec{r}^* = \frac{\int \vec{r} dm}{\int dm}$$

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{\int x dm}{\int dm} \\ y^* &= \frac{\int y dm}{\int dm} \\ z^* &= \frac{\int z dm}{\int dm} \end{aligned}$$

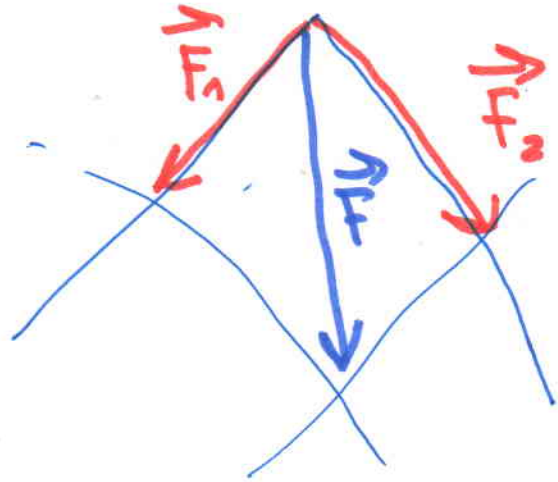
Počet stupňů volnosti: poloha je určena polohou tří bodů, které neleží v jedné přímce

$$i = 3n - e = 3 \cdot 3 - 3 = 6 \text{ d. volnosti}$$

Skládání síl

- 1, síly působící na těleso v jednom bodě
skládáme stejně jako síly působící na
určitý bod
- 2, síly v jedné přímce $\vec{F} = \sum_{k=1}^n \vec{F}_k$
výslednice působí kolektivně na
tuto přímce $\equiv$ klouzavý vektor.
- 3, Různoběžné síly v liché rovině

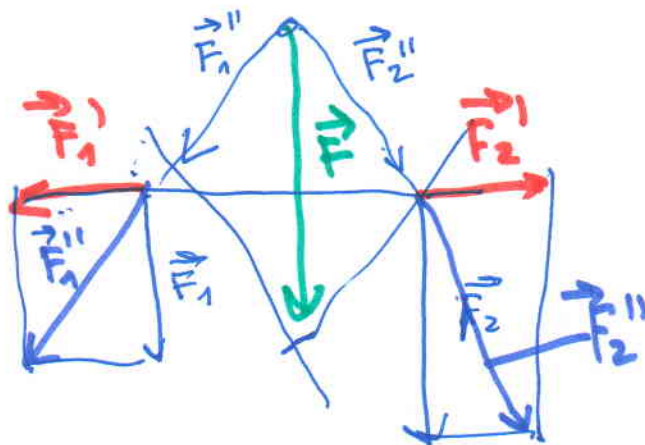
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$



4, Romocheēnīšāy v tēzē varīnē

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\vec{F}_1' = -\vec{F}_2'$$



30. Drögjice sil

0 zvrline lihordlüt

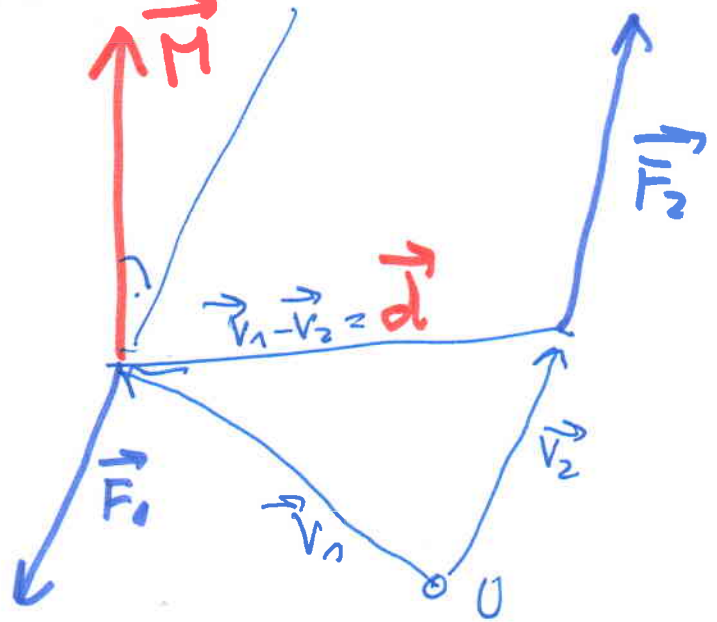
$\vec{d}$: ramer drögjice sil

$$\vec{d} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

$$\vec{M} = (\vec{v}_1 \times \vec{F}_1) + (\vec{v}_2 \times \vec{F}_2)$$

ale $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$

$$\vec{M} = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \times \vec{F}_1 = \vec{d} \times \vec{F}_1$$

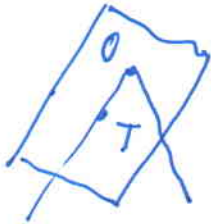


$$\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$$

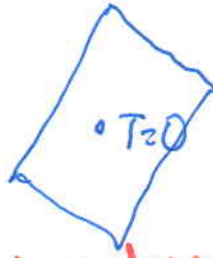
Moment drögjice je ramer' neklar a je
raren $\vec{M} = \vec{d} \times \vec{F}$, kde $\vec{d}$ je ramer drögjice sil.

31. Rovnováha tuhého tělesa

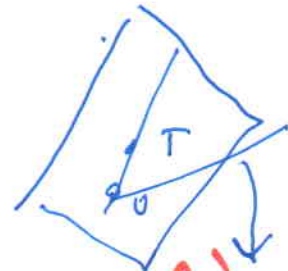
Těleso je v rovnováze pokud $\vec{F} = 0$ a $\vec{M} = 0$



Poloha
stála
(stabilní)

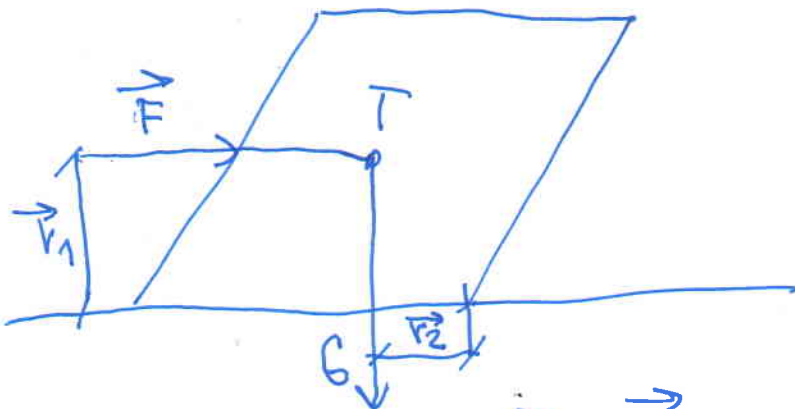


indifferentní



uvrátka
(labilní)

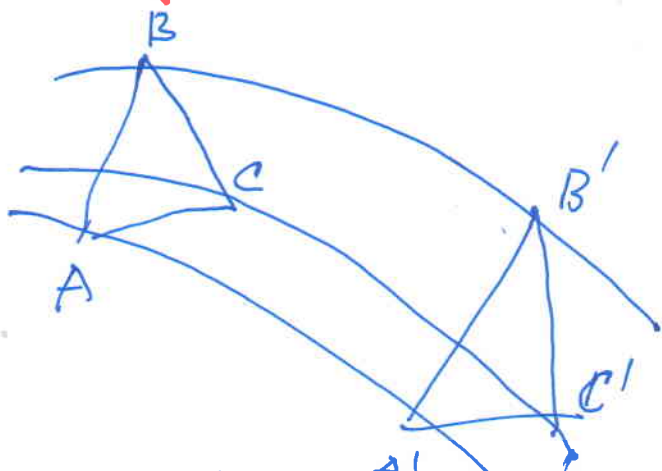
Stabilita proti převrácení



Převrácení $\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 > \vec{r}_2 \times \vec{G}$
 Těleso je lim stabilnější:
 1, čím je těžiště (G)
 2, čím má větší r_2
 (větší základna)
 3, čím je r_1 menší
 (těžiště nížle)

32. Polye tihēko ķēsa

Posuvņi polye

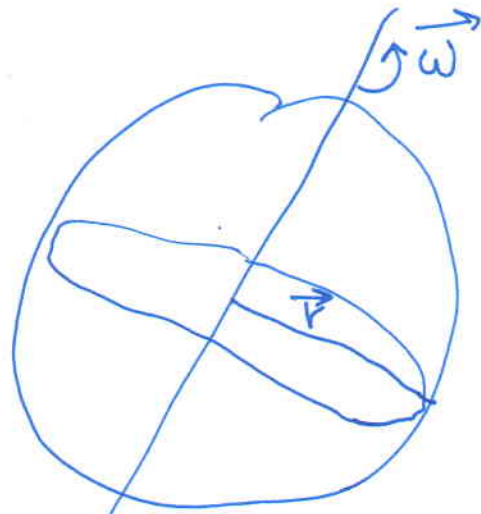


Pri posuvnē polye
zūstānā katrā priete ķēsa vienādība s pārdau!

Vēclau bdu ķēsa se polye bdi po slaujcl
vājēnē vānolēzēcl lēģēclēnā māj
vācēcl oāmācl nēcl vāclcl slaucl
vāclcl ⇒ Posuvņ polye jē polye
polyecl jēclēcl bdu māj. ķēclēcl.

Okružný pohyb těles okolo pevné osy

Všechny body opisují
kružnici obíhající se středem
na ose rotace.



1, Všechny body na ose
jsou kvalet a klidni

2, Všechny ostatní body
mají stejnou úhlovou rychlost $\vec{\omega}$

3, Obvodové rychlosti jsou závislé na
polohovém vektoru $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$

33. Kinetická energie tuhého tělesa

Kinetická energie tuh. tělesa je rovna součtu kinetické energie všech jeho jednotlivých bodů

$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

Posuvný pohyb

V tuhém tělese, skládající posuvný pohyb, mají všechny body stejnou rychlost $v_i = v$

Kinetická energie při posuvném pohybu

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 \quad [J]$$

$$v = r \cdot \omega$$

Obřadový pohyb

Jedliže těleso koná obřadový pohyb kolem 0 s okamžitou úhlovou rychlostí ω

$$E_k = \sum_{i=1}^n m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \cdot \omega^2 = \sum_{i=1}^n J \omega^2$$

$$\text{kde } J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \text{moment setrácení}$$

Moment setrácení je skalární kvantitativní míra setrácení relativní tuhosti tělesa při obřadovém pohybu kolem dané osy.

V tuhém tělese předpokládáme symetrii
vzhledem k osy $\Rightarrow$

Kinetická energie rotačního pohybu

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Kinetická energie tuhého tělesa, které
pohyb složený z translace a rotace

$$\tilde{E}_k = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2$$

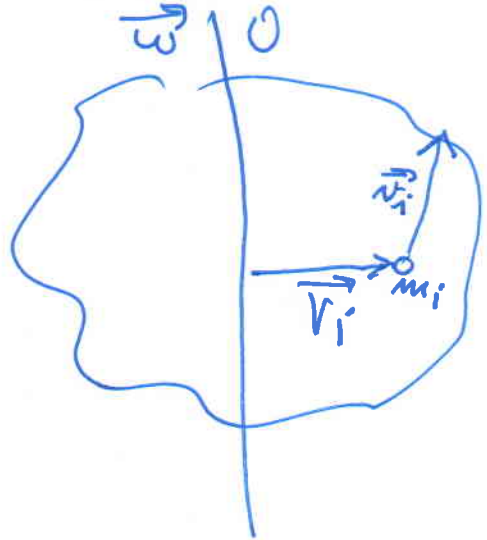
Königova
věta

34. Moment setrácuvosti

Rychlost bodu o poloměru $\vec{r}_i$
má velikost $|\vec{v}_i| = |\vec{r}_i \vec{\omega}|$

Velikost momentu hybnosti

$$|\vec{b}_i| = |m_i r_i^2 \omega|$$



Celkový moment hybnosti tuhého tělesa vzhlédem
k ose 0

$$b = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \cdot \omega$$

$$\vec{b} = J \cdot \vec{\omega}$$

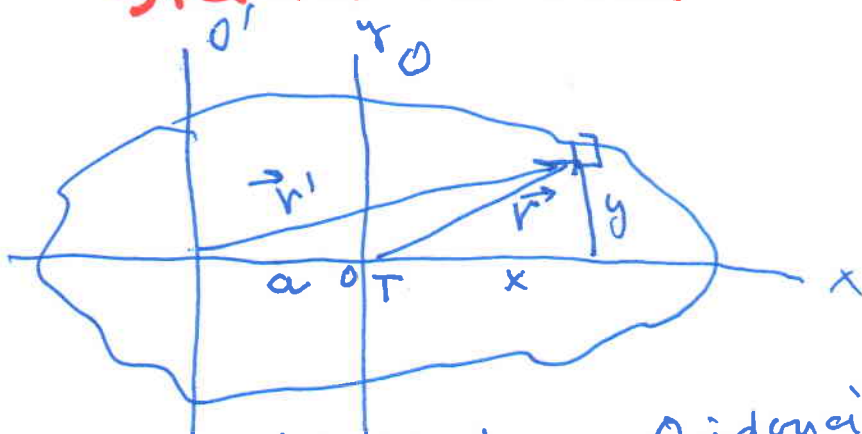
• Nepůsobí-li na tuhé těleso vnější moment
sily $\vec{M} = 0$; $\frac{d\vec{b}}{dt} = \vec{M}$,
pak $\vec{b} = \text{konst.} \Rightarrow \vec{b} = J \cdot \vec{\omega} = \text{konstanta}$
 $|\vec{b}| = |m_i r_i^2 \omega| = \text{konst.}$

Klasifikace:

Rozjedse-li kulička s rotací v páru
Dá ruce k tělu (v. se zmenš.) $\Rightarrow \omega$ se zvětší.
Chce zastavit otáčení. Dá páru od těla.

Hee musí se masnidat $\Delta E = W = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 - \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$
práce

Steinerova věta



moment vzhlédem k ose O jdoucí křistém

$$J_T = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

moment setračení vzhlédem k ose O' // O
vzdálenosti 'a'.

$$J' = \int (r')^2 dm = \int [(x+a)^2 + y^2] dm$$

$$J' = \int (x^2 + 2ax + a^2 + y^2) dm =$$

$$J' = \int (x^2 + y^2) dm + 2a \int x dm + \int a^2 dm$$

$$J = \int x dm = 0$$

$$J' = J_T + a^2 m$$

Steinerova věta

$$x^* = \frac{\int x dm}{\int dm}$$

Souřadnice
hmotného středu
= 0

35. Práce a výkon při otáčení tuhého tělesa okolo pevné osy

Skalární (nelohodí)

$$\text{Práce } dW = F \cdot ds = F \cdot r \cdot d\varphi$$

$$dW = M d\varphi$$

Při tom se změnu pohybové energie tělesa

$$E_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$dE_k = \frac{1}{2} J 2 \cdot \omega \cdot d\omega = J \omega d\omega$$

práce = změna energie

$$M d\varphi = J \omega d\omega \quad / \frac{1}{dt}$$

$$M \cdot \frac{d\varphi}{dt} = J \cdot \omega \frac{d\omega}{dt}$$

$$M \cdot \omega = J \cdot \omega \varepsilon$$

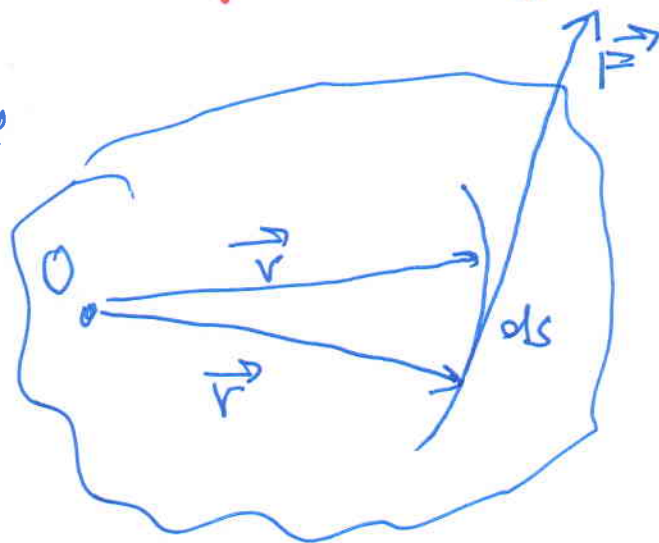
$$\boxed{\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}}$$

pohybová rovnice
pro otáčení tělesa
okolo pevné osy

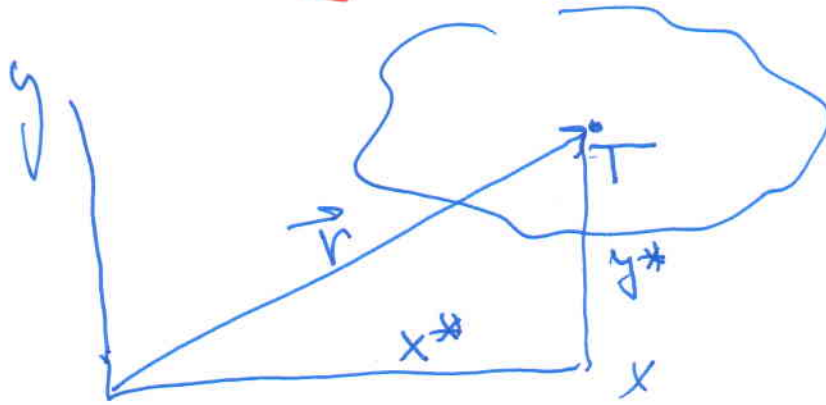
Výkon při ot. tuh. tělesa

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

$$\boxed{P = \vec{M} \cdot \vec{\omega}} \quad [W]$$



36. Rovinný pohyb tuhého tělesa



Pro těžiště I. pohybová rovnice

$$m \ddot{\vec{r}}^* = \sum_{k=1}^n {}^k \vec{F}$$

$$m \ddot{x}^* = \sum_{k=1}^n {}^k F_x$$

$$m \ddot{y}^* = \sum_{k=1}^n {}^k F_y$$

II. pohybová rovnice – pro rotační těleso
vzhledem k ose jdoucí kmotřím středem
a rovné kolmo k rovině XY

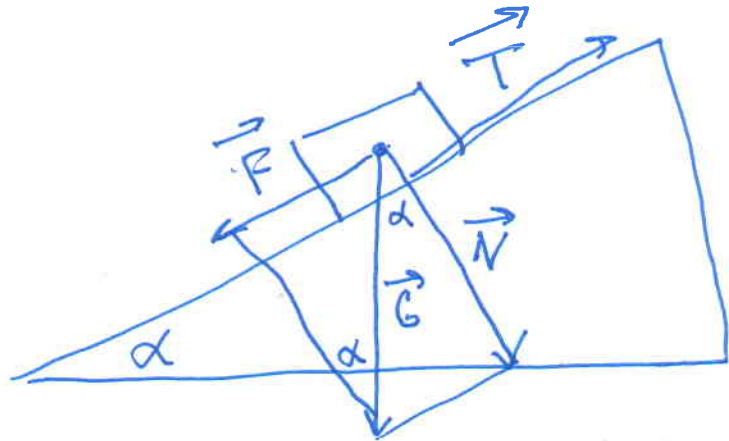
$$J_T \ddot{\epsilon} = \sum_{k=1}^n {}^k \vec{M}$$

37. Eksperimentālais mērījumu sončānietek samykato hēni

Tīrums — valīne
— samykato — statisko μ_0, α_0
— kinetisko μ, α

zīm.

- materiāls
- drusnais plodis
- relatīvais plodis
- relatīvā ātrums
- temperatūra



Tēse pried odturēniem (a palytenu dolei)

$$\vec{F} = \vec{T}$$

$$G \cdot \sin \alpha_0 = \mu_0 \cdot N = \mu_0 \cdot G \cdot \cos \alpha_0$$

$$\mu_0 = \frac{\sin \alpha_0}{\cos \alpha} =$$

$$\boxed{\mu_0 = \tan \alpha_0}$$

Zredāms nīkels α tak dlonks, arē deydē
k odturēni (h. palytenu dolei).

Jakmile se dá těleso do pohybu
dolů, snižujeme úhel α , až
se těleso pohybavalo dolů bez
zrychlení $\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{v}=\text{const.}$

$$\vec{F}_{\text{prk}} = \vec{F} - \vec{T}$$

pak platí $\vec{F}_{\text{prk}} = 0 = \vec{F} - \vec{T} =$

$$G \sin \alpha - \mu G \cos \alpha$$

$$\mu = \tan \alpha$$

	μ_0	α_0	μ	α
ocel na ledě	0,027	$1^{\circ}36'$	0,004	$48'$
ocel na oceli	0,1-0,3	$6^{\circ}-16^{\circ}$	0,07-0,25	$4^{\circ}-19^{\circ}$
drát na drátě	0,4-0,6	$23^{\circ}-32^{\circ}$	0,2-0,5	$12^{\circ}-25^{\circ}$