

12. Newtonovy zákony

Galileo Galilei, filosof a fyzik, matematik, astronom

Pisa 1564 - 1642

Studoval v Pise, ale byl vyhnán

Přišel do Padovy a tam vyučoval na úrov. geometrie, mechaniky
za publikování svých názorů souken $\Rightarrow$ astronomii, domáci vědu!

- vynalezl dalekohled
- formuluje 1. newt. zákon.
Dráha při zrychlení je úměrná čtverci času!!!

Johannes Kepler

Stuttgart 1571 - 1630

1600 - přišel do Prahy a stal se asistentem Tycho Brahe

(Kepler - špatně viděl ale dobře počítal
Brahe - dobře viděl ale špatně počítal)

Podle Braheho se dal číselně vyjádřit pohyb a astronomie
u Rudolfa II.

1. Planety obíhají po elipsách; slunce v ohnisku

2. Plochy poplavených za čas = konst



$$s_1 = s_2(t)$$

$$3. \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

Na základě analýzy pohybu Měsíce kolem Země,
planet kolem Slunce a znalosti Keplerových zákonů
Newton 1687 v knize „Mechanika“

$$\vec{F} = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \vec{v}_0 \quad [N]$$

$$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \left[\frac{N \cdot m^2}{kg^2} \right]$$

gr. konstanta

Isaac Newton, fyzik, matematik
Londýn 1643 - 1727

Hamotns - kvantitatīvi skalārai mēra
tīkrojda a sekvācijdi veatnadi
tēles [kg]

Hybual - kvantitatīvi vektorai
mēra mehaniehebr polzta
 $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$ [kg $\frac{m}{s}$]

Sila - kvantitatīvi vektorai mēra
vzājemēbr pūstēai tēles, klēi mē
za nāsledēli zmēnu polzta mēbr slaru
tēles

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ [kg} \cdot \frac{m}{s^2} = N \text{]}_{\text{Newton}}$$

1. Zákon setrvačnosti

Každé těleso setrvává ve stavu klidu, nebo rovnoměrného přímočarého pohybu, pokud není nuceno působením jiných těles, tento stav změnit

2. Zákon síly

Časová změna hybnosti tělesa je rovna působící síle a má svou stejnou směr a smysl

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

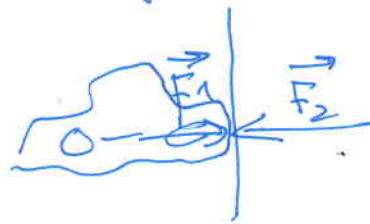
$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

$$F = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$$

3. Zákon akce a reakce

Síly vzájemného působení těles jsou stejné velikosti, ležící v téže přímce a mají vzájemně opačný smysl.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$



13. Řešení pohybových rovnic

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$F_x = m x''$$

$$F_y = m y''$$

$$F_z = m z''$$

Základní úloha dynamiky

Jsou zadány $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$

Úkol určit působící sílu

Postup řešení

- 1, zvolíme vztahový systém
- 2, vyjádříme kinematické veličiny $\vec{v}(t)$, $\vec{a}(t)$
- 3, napíšeme rovnici $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

Obrácení úloha dynamiky

máme danu působící sílu a hledáme
kinetické charakteristiky pohybu $\vec{a}(t)$
 $\vec{v}(t)$
 $\vec{r}(t)$

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$$F_x = m a_x$$

$$F_y = m a_y$$

$$F_z = m a_z$$

$$a_x = \frac{F_x}{m}$$

$$a_y = \frac{F_y}{m}$$

$$a_z = \frac{F_z}{m}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}$$

$$\int dv_x = \int a_x dt = \int \frac{F_x}{m} dt$$

$$v_x = \frac{F_x}{m} \cdot t + v_{x0}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt}$$

$$\int dx = \int v_x dt = \int \left(\frac{F_x}{m} \cdot t + v_{x0} \right) dt = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + v_{x0} t + x_0$$

$$x = \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + v_{x0} t + x_0$$

Obdobně pro souřadnici y a z.

Tedy například

$$\vec{r} = \left[\left(\frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2 + v_{x0} t + x_0 \right) \vec{i} + \left(\frac{1}{2} \frac{F_y}{m} t^2 + v_{y0} t + y_0 \right) \vec{j} + \left(\frac{1}{2} \frac{F_z}{m} t^2 + v_{z0} t + z_0 \right) \vec{k} \right]$$

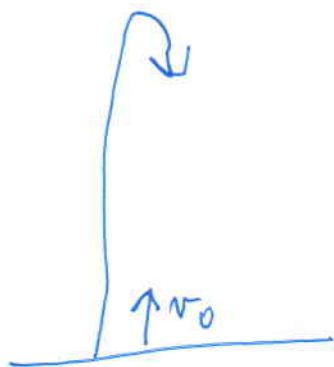
Připomínání

1, Volný pád z výšky h

$$s = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = gt$$

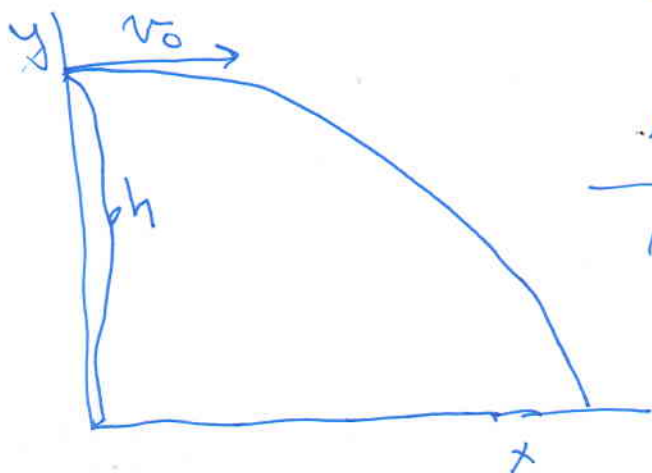
2, Vrh směle vzhůru



$$s = v_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$v = v_0 - gt$$

3, Vodorovný vrh



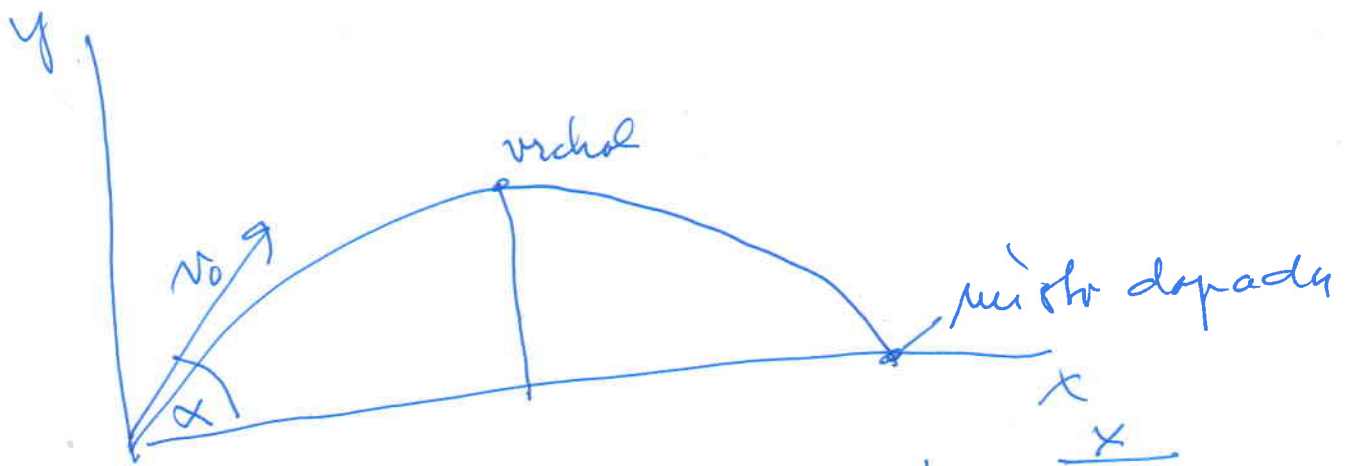
$x = v_0 t$ ← hornoměrny / pohyb

$$y = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = h - \frac{1}{2}g \cdot \frac{x^2}{v_0^2}$$

parabola

4, Sikiun' vch



$$x = v_0 \cdot t \cos \alpha$$

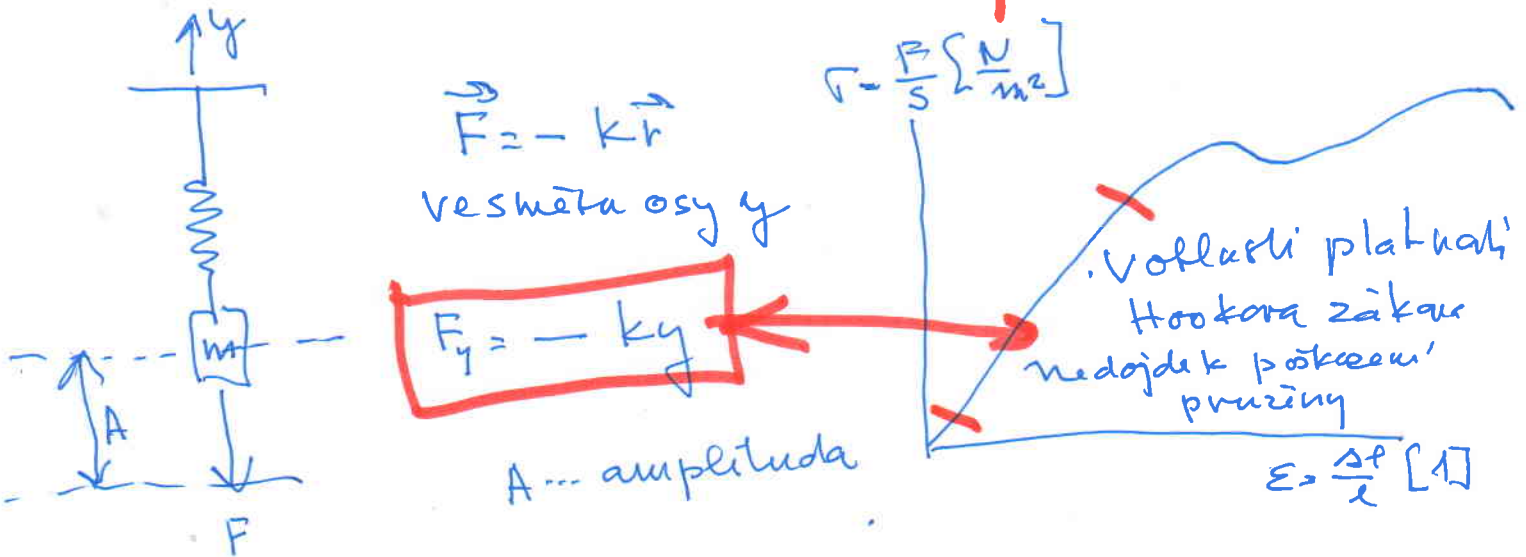
$$y = v_0 \cdot t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2$$

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha \cdot x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

parabola

14. Lineární harmonický oscilátor



$$F = -ky$$

Silová rovnice

$k \dots$ tuhost pružiny
 $k = \frac{F}{y} = \text{síla při (teoretickém) je dnožném prodloužení}$

$$m y'' = -ky \quad / \cdot \frac{1}{m}$$

$$y'' + \left(\frac{k}{m}\right)y = 0$$

$$\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ **mezivlní na A.**

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Diferenciální rovnice popisující volné (nevládnoucí) lineární kmity (harmonický oscilátor).

$y'' \dots$ 1. a 2. derivace $\Rightarrow$ diferenciální rovnice
 $y' \dots$ 1. derivace $\Rightarrow$ diferenciální rovnice
 $y \dots$ 0. derivace $\Rightarrow$ diferenciální rovnice

ω^2 jsou konstanty $\Rightarrow$ s konstantními koeficienty
 pravá strana $= 0$ = homogenní

Tedy diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty, homogenní.

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

Riešení bude ve tvaru

$$y = C \cdot e^{\lambda t}$$

$C \dots$ konstanta

$\lambda \dots$ kořen charakterist. rovnice

$$y' = C \lambda \cdot e^{\lambda t}$$

$$y'' = C \lambda^2 e^{\lambda t}$$

Dosadíme

$$C \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega^2 \cdot C e^{\lambda t} = 0$$

$$j = \sqrt{-1}$$

$$C e^{\lambda t} (\lambda^2 + \omega^2) = 0$$

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0$$

$$\lambda^2 = -\omega^2$$

$\leftarrow$ charakteristická rovnice

Kořeny charakteristické rovnice

$$\lambda_{1,2} = \pm j\omega$$

Tedy řešení

$$y = C_1 e^{+j\omega t} + C_2 e^{-j\omega t}$$

$$e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$$

$$y = C_1 \cos \omega t + C_1 j \sin \omega t + C_2 \cos \omega t - C_2 j \sin \omega t$$

$$y = (C_1 + C_2) \cos \omega t + (C_1 - C_2) j \sin \omega t$$

je u každé součásti

a pro $t=0$ je $(C_1 + C_2) = A$
výhybka A

$$y = A \cdot \cos \omega t$$

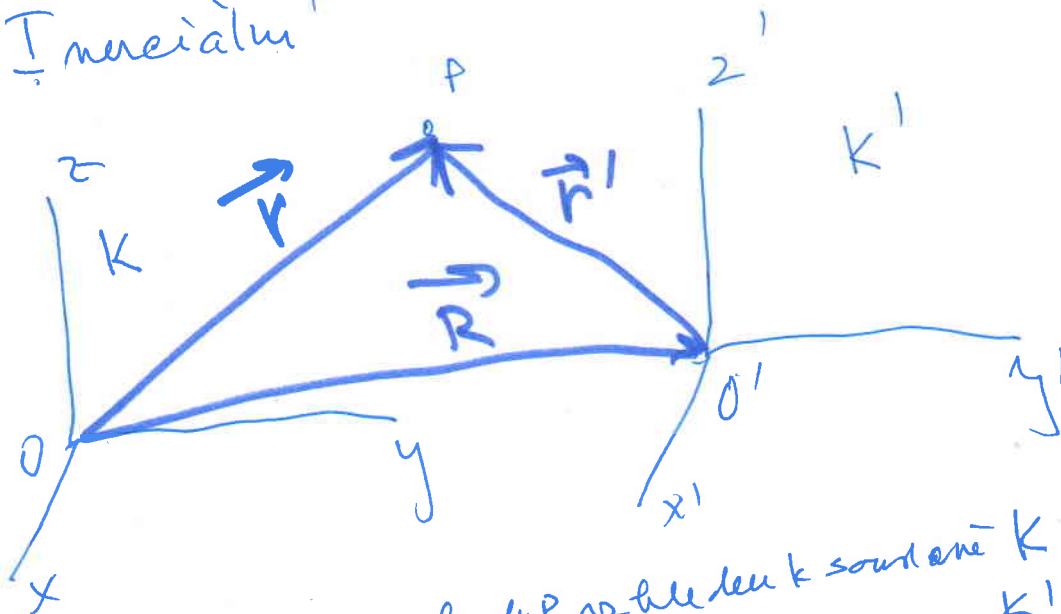
$$y = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

Rovnice výhybky

15. Pohyb v neinerciálních soustavách

Somlarn - $\left\{ \begin{array}{l} \text{inerciālu} - \begin{array}{l} \text{~ klāds} \\ \text{~ polgrie rro: pārvietāšs} \end{array} \\ \text{neinerciālu} - \text{polgrie rezģlešs} \end{array} \right. \text{plate' 1. N. 7.}$

1. Inercialni



→ ... pelajaran matematika sudah selesai sourane K
K'

$\vec{r}$ — polowa
 $\vec{r}'$ —
 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ — wektor

$\vec{r}$ — položaj
 $\vec{r}'$ — " —
 $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$ — vektor vzajemného posunutí
 $\Rightarrow$ dr' relativní vy

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{R}}{dt}$$

$$\vec{N}' = \vec{T} - \vec{N}$$

Je-li $\vec{u} = \vec{v} - \vec{u}$ $\Rightarrow$ pak systém K' je inerciální

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{u} \cdot \frac{1}{c} \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dr}{dt}$$

$$\int d\vec{r}' = \int d\vec{r} - \vec{u} dt$$

$\Rightarrow \left| \frac{dr}{dt} \right|$... relativní rychlost bodu
vzhledem soustavě K¹

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$... absoluten rychlost
vzhledem k soustavě K

$\rightarrow u = \frac{dR}{dt}$... másira ychilok

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u} \cdot t$$

Galileovy transformáční rovnice

$$r'_x = r_x - u_x \cdot t$$

$$r'_y = r_y$$

$$r'_z = r_z$$

$$\vec{a}' = \frac{d\vec{v}'}{dt} \dots \text{relativní zrychlení vzhledem k systému } K'$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \dots \text{absolutní} \dots$$

$$\vec{a}_u = \frac{d\vec{u}}{dt} \dots \text{úhlové zrychlení}$$

$$\frac{d\vec{v}'}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} - \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right) = 0$$

$$\vec{a}' = \vec{a} \dots m$$

$$m\vec{a}' = m\vec{a}$$

$$\vec{F}' = \vec{F}$$

Pohybujeme-li se systémem K' rovnoměrně přímočaově vzhledem k systému K , platí v obou systémech stejná pohybová rovnice $\vec{F}' = \vec{F}$.

2, $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Systém K' není inerciální

$$\frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_u \quad / \cdot m$$

$$m \cdot \vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_u$$

$$\vec{F}' = \vec{F} + \vec{F}_s$$

$$\text{kde } \vec{F}_s = -m\vec{a}_u \text{ je}$$

sehranová síla

Řešíme-li dynamický problém v soustavě K' ,
který se pohybuje s malým zrychlením $\vec{a}_u$,
musíme k sílám, které působí přídát
ještě sehranovou sílu $\vec{F}_s = -m\vec{a}_u$.

autobus $\begin{cases} \text{při rozjezdu} \\ \text{při zastavování} \\ \text{v zatáčkách} \end{cases}$

Pozorovat na chodce
se diví!

16. Mechanická práca výkon

Mechanická práca je skalárni kvantitatívna miera predočtu mechanického pohybu.



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad [N \cdot m = J] \text{ Joule}$$

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$|W| = |\vec{F}| \cdot |d\vec{r}| \cdot \cos \alpha$$

Mechanický výkon

$$P = \frac{dW}{dt} \quad \left[\frac{J}{s} = W \right] \text{ watt}$$

(Práca za čas)

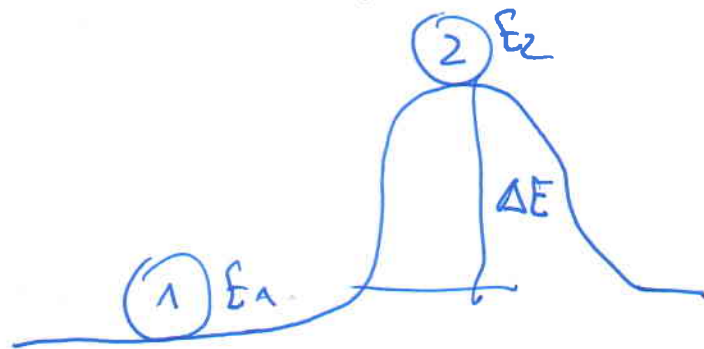
17. Kinetická energie

Doplnění jsme pro učené stavu pohybovali
7 bodů

$$\begin{pmatrix} x, y, z \\ v_x, v_y, v_z \\ m \end{pmatrix} = 7$$

Jde to je jednoduché?

Ano - pomocí stavové veličiny ... energie



Hledáme energii závislou na rychlosti

$$\begin{aligned} dW &= \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\frac{dx}{dt} \cdot dx + \frac{dy}{dt} \cdot dy + \frac{dz}{dt} \cdot dz \right) = \\ &= m \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z) = \\ &= \frac{1}{2} m [v_x^2 + v_y^2 + v_z^2]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) \end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2)$$

Pokud je výchozí rychlost = 0

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

[J]

Energie závislá na rychlosti

Energie zăvîslă na polare (v grav. poli)

$$W = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot d\vec{r} = \int_0^h mg \cdot dr \quad a=g$$

$$E_p = mg [r]_0^h$$

$$E_p = mgh [J]$$

Potenciălu' energie zăvîslă na polare

19. Zāķon zacharānī eurgu

$E_k + E_p = \text{konstanta}$ — u poci konzeruānīnīde

Sil < $\begin{cases} \text{geantacū sila} \\ \text{elastīdā sila} \end{cases}$

Disipatīvū sils — napī lēnī

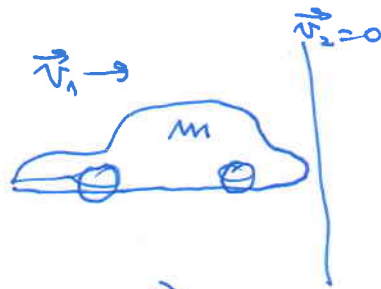
Čast eurgu se pūtemuī na jiron
(mechanichī)

energij napī. tepelaru

20. Impuls síly

Budeme sledovat účinky síly působící během určitého časového intervalu

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



$$\vec{F} \cdot dt = d\vec{p}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_1}^{\vec{p}_2} d\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = \vec{F}(t_2 - t_1)$$

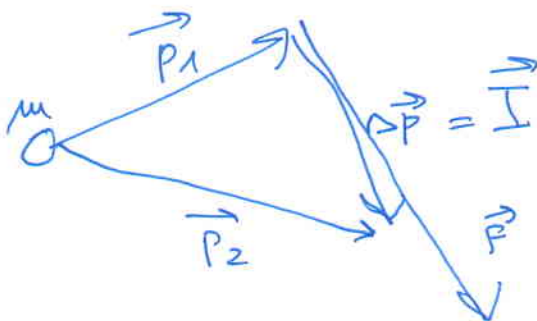
časový účinek
síly

I... impuls
síly

Impuls síly je rovn časnému účinku síly $\vec{F}$ v intervalu t_1, t_2
pro něj $\vec{I} = \vec{F}(t_2 - t_1)$ a platí

$$\vec{I} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \Delta\vec{p}$$

Impuls síly $\vec{I}$ působící v určitém časovém intervalu na hmotný bod je roven vektorové změně hybnosti $\Delta\vec{p}$ tohoto bodu.



Je-li výsledná síla působící na HB
rovná nule, $\vec{F} = 0$, pak je jeho hybnost
konstantní $\vec{p} = \text{const.}$

(Bod je buďto v klidu, nebo
rovnouměrně přímočarou pohybu).

To je **zákon zachování hybnosti**.

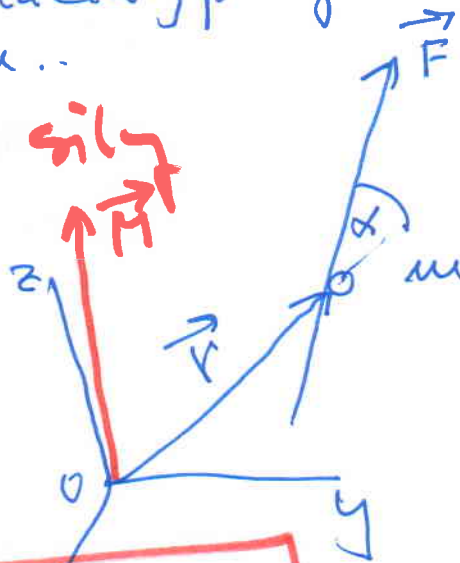
(který vyplývá z 1. NZ).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{konstanta}$$

21. Moment sily

Moment sily $\vec{M}$ je kvantitativní vektorová míra zájmu působení těles, které usiluje za následek otáčivý pohyb vzhledem k danému bodu.

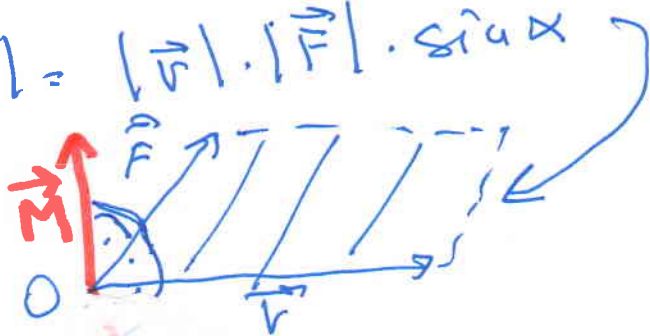
$\vec{M}$... moment sily



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \quad [\text{m} \cdot \text{N}]$$

Směr vektoru $\vec{M}$ dle pravidla pravé ruky.

Velikost $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin \alpha$



$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad \text{Determinant}$$

$$= \vec{i} y F_z - \vec{j} z F_x + \vec{k} x F_y - \vec{k} y F_x - \vec{j} x F_z + \vec{i} z F_y$$

Rotacii impuls

$$\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$$

[mN·s]

22. Moment hybnosti

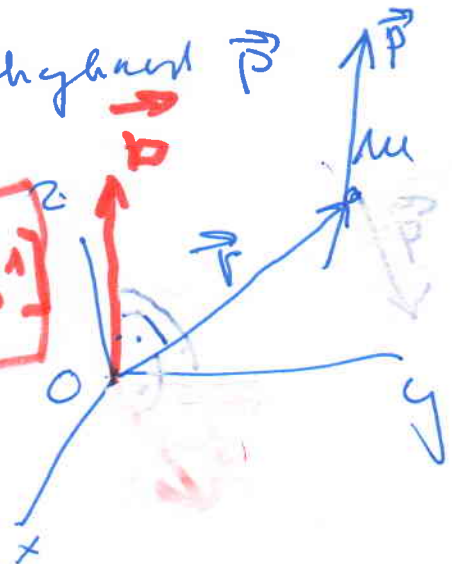
moment hybnosti $\vec{L}$ (točičný) je

kvantitativní nehmotnou měrou rotačního pohybu vzhledem k uvažovanému bodu.

Pohyb hmotný bodu má hybnost $\vec{p}$

Pak $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad [\text{kg m}^2 \text{s}^{-1}]$$



23. Souvislost momentu síly $\vec{M}$ a momentu hybnosti $\vec{b}$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) &= \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} \right) + \left(\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} \right) \\ &= \underbrace{(\vec{v} \times m\vec{v})}_{\vec{v} \parallel m\vec{v} \Rightarrow 0} + \underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})}_{\vec{M}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}}$$

II. pohybová rovnice

Časově změna momentu hybnosti HB vzhledem k pevnému bodu je rovna momentu síly (vzhledem k témuž bodu), působící na HB těleso.

Pokud $\boxed{\vec{M} = 0} \Rightarrow \frac{d\vec{b}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{b} = \text{konstanta}}$

Je-li výsledný moment sil na HB nulový $\vec{M} = 0$, pak moment hybnosti je konstantní $\vec{b} = \text{konstanta}$.

Posuvný pohyb

Otáčivý pohyb

sila $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$

moment sily $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

hybnosť $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

moment hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

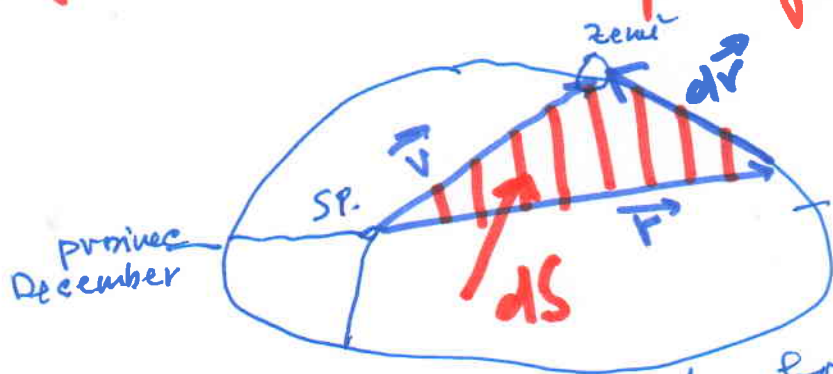
impuls sily $\vec{I} = \int \vec{F} dt = d\vec{p}$ rotačný imp. $\vec{L} = \int \vec{M} dt = d\vec{L}$

I. pohybová rovnica $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ II. poh. rov. $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$

"Gift"

Centrální pohyb

central motion



elipse

The Sun is in focus of the ellipse

Síla $m\vec{r}$ do je důležitá produ **centrální síla**.
 Slunce je v ohnisku
 Plocha opsaná polohou $\vec{r}$ za dobu dt je dS

$$d\vec{S} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times d\vec{r})$$

Plošná rychlost

area velocity

$$\vec{w} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\vec{b} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$\vec{b} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$\vec{w} = \frac{1}{2} (\vec{r} \times \vec{v})$$

$$\boxed{\vec{b} = 2m\vec{w}}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{dt}$$

ale $\vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{b} = \text{konstanta}$

$\Rightarrow \vec{r} = \text{konst}$

$$\Rightarrow dS_1 = dS_2$$