VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

FYZIKA

MODUL 1

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

STUDIJNÍ OPORA
PRO STUDIJNÍ PROGRAM ***Stavební inženýrství***
v kombinované formě studia

OBSAH

1 Úvod 5

1.1 Cíle 5

1.2 Požadované znalosti 5

1.3 Doba potřebná ke studiu 5

1.4 Klíčová slova 5

2 Fyzikální veličiny a jednotky 6

2.1 Definice fyzikální veličiny 6

2.2 Jednotka fyzikální veličiny 6

2.3 Mezinárodní soustava jednotek 7

2.3.1 Základní jednotky (a veličiny) 7

2.3.2 Odvozené jednotky 7

2.3.3 Násobné a dílčí jednotky 7

2.3.4 Vedlejší jednotky 8

2.3.5 Rozměr (dimenze) fyzikální veličiny 8

2.4 Fyzikální rovnice 9

2.4.1 Rozměrová zkouška fyzikální rovnice 9

3 Vektory ve fyzice 10

3.1 Skaláry a vektory ve fyzice 10

3.2 Souřadná soustava 10

3.3 Vektor 10

3.3.1 Zápis vektoru pomocí souřadnic 11

3.3.2 Směr vektoru, směrové kosiny 11

3.3.3 Velikost vektoru 11

3.4 Operace s vektory 12

3.4.1 Sčítání vektorů (vektorový součet a rozdíl) 12

3.4.2 Násobení vektoru číslem 12

3.4.3 Skalární součin 12

3.4.4 Vektorový součin 13

3.4.5 Pokročilejší operace s vektory 14

4 Derivace a integrály ve fyzice 15

4.1 Derivace 15

4.1.1 Parciální derivace 16

4.1.2 Derivace vektorů 16

4.1.3 Výpočty derivací 16

4.1.4 Algebraická pravidla 16

4.1.5 Základní vzorce derivace funkcí 17

4.1.6 Lokální extrémy 18

4.1.7 Analýza chování funkce 18

4.2 Integrál 19

4.2.1 Algebraická pravidla ... 19
4.2.2 Tabulka integračních vzorců ... 20
5 Kinematika hmotného bodu ... 21
5.1 Klasická mechanika ... 21
5.2 Vztažný systém ... 21
5.2.1 Parametrické rovnice trajektorie ... 23
5.2.2 Rychlost ... 24
5.2.3 Zrychlení ... 25
5.3 Klasifikace pohybů ... 26
5.3.1 Přímočarý pohyb ... 26
5.3.2 Křivočarý pohyb ... 27
5.3.3 Kruhový pohyb ... 28
5.3.4 Úhlová dráha ... 29
5.3.5 Souřadnice při kruhovém pohybu ... 29
5.3.6 Úhlová rychlost ... 29
5.3.7 Úhlové zrychlení ... 29
5.3.1 Souvislost obvodových a úhlových veličin ... 30
5.3.2 Perioda, frekvence, kruhová frekvence ... 30
6 Vrhy těles v gravitačním poli ... 32
6.1 Vrh šikmý ... 32
6.2 Volný pád ... 33
6.3 Vrh svislý vzhůru ... 34
6.4 Vrh vodorovný ... 34
7 Inerciální a neinerciální vztažné soustavy ... 36
7.1 Inerciální vztažná soustava ... 36
7.2 Neinerciální vztažná soustava ... 36
7.3 Posouvající se neinerciální soustava ... 36
7.4 Rotující neinerciální soustava ... 37
7.4.1 Síla Eulerova ... 38
7.4.2 Síla Coriolisova ... 38
7.4.3 Síla odstředivá ... 38
7.4.4 Země jako neinerciální vztažná soustava ... 38
8 Porovnání rovnic translačních a rotačních ... 40
9 Závěr - shrnutí ... 41
10 Studijní prameny ... 41
10.1 Seznam použité literatury ... 41
10.2 Seznam doplňkové studijní literatury ... 41
10.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny ... 41

1 Úvod

Tento učební text má název Kinematika hmotného bodu a tvoří první modul Mechaniky, která je vyučována v prvním ročníku povinného předmětu s názvem Fyzika. Modul definuje fyzikální veličiny a popisuje základní operace s vektory. Hlavní kapitoly popisují pohyb hmotného bodu v prostoru a čase a současně v příkladech a otázkách kontrolují připravenost studentů při samostudiu.

1.1 Cíle

Získání základních teoretických a praktických znalostí a návyků v oblasti fyziky: Kinematika hmotného bodu. Jedná se zejména o definici a rozdělení fyzikálních veličin a základní operace se skaláry a vektory. Současně je cílem schopnost zavést soustavu souřadnic, klasifikovat jednotlivé typy pohybů fyzikálním názvoslovím a sestavit pohybové rovnice.

1.2 Požadované znalosti

Předpokládají se znalosti fyziky z gymnázií a středních technicky zaměřených škol, a to jak rozsahem, tak i řazením jednotlivých částí. Konkrétněji se předpokládá znalost základních fyzikálních veličin, schopnost převodů jednotek a aplikace základního matematického aparátu.

1.3 Doba potřebná ke studiu

6 hodin

1.4 Klíčová slova

Kinematika, hmotný bod, okamžitá rychlost, okamžité zrychlení, skalár, vektor, souřadná soustava, trajektorie, translační pohyb, rotační pohyb, vrhy v gravitačním poli, pohybová rovnice.

2 Fyzikální veličiny a jednotky

Abychom se v jednotlivých fyzikálních veličinách dobře orientovali, používáme smluvené značky pro jednotlivé fyzikální veličiny: objem V, hmotnost m, teplota T, rychlost v, elektrický náboj Q, síla F, … Značky vznikly většinou jako první písmeno z anglického názvu příslušné fyzikální veličiny.

2.1 Definice fyzikální veličiny

Fyzikální vlastnosti, stavy a změny v přírodě, které je možno změřit a následně vyjádřit číselnou hodnotou, vyjadřujeme **fyzikálními veličinami** (např. objem, hmotnost, teplota, elektrické napětí, …).

2.2 Jednotka fyzikální veličiny

Měřit fyzikální veličinu znamená určit její hodnotu. Tu určíme tak, že ji porovnáme s určitou předem smluvenou hodnotou veličiny téhož druhu, kterou zvolíme za měřící **jednotku** (**jednotku fyzikální veličiny**). Tato jednotka představuje stálou a pevnou hodnotu veličiny, s níž potom porovnáváme veličiny téhož druhu. Výsledkem porovnání měřené fyzikální veličiny se zvolenou měřící jednotkou je číselná hodnota. Číselná hodnota fyzikální veličiny udává, kolikrát je hodnota měřené veličiny větší než zvolená měřící jednotka.

Ve skutečnosti je to jednodušší, než jak to vypadá! Např. měřící jednotka délky je metr. 1 metr je přitom přesně definován a je neměnný. Budeme-li chtít určit délku stolu, vezmeme délkové měřidlo (truhlářský dvoumetr). A na něm po přiložení ke stolu přečteme, že stůl je dlouhý 1,5 metru. A to je číselná hodnota fyzikální veličiny délka; tato číselná hodnota říká, že délka stolu je 1,5krát větší než jeden metr (měřící jednotka).

Hodnota fyzikální veličiny je tedy určena číselnou hodnotou a příslušnou měřící jednotkou. Hodnota fyzikální veličiny = číselná hodnota · jednotka.

Je-li *X* obecně symbol fyzikální veličiny, $\{X\}$ její číselná hodnota a $[X]$ měřící jednotka, platí:

$$X = \{X\} \cdot [X] \qquad (1)$$

Číselná hodnota $\{X\}$**označuje kvantitu** (množství), **měřící jednotka** $[X]$ **kvalitu** fyzikální veličiny.

Platí-li např. pro velikost rychlosti: $v = 15\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}$,

pak $\{v\} = 15$ a $[v] = m \cdot s^{-1}$.

Číselná hodnota fyzikální veličiny nemá sama o sobě žádný smysl, neboť hodnotu fyzikální veličiny můžeme vyjádřit v různých jednotkách. Proto je nutné **uvádět číselnou hodnotu fyzikální veličiny vždy s její jednotkou!**

Zápis $l = 25$ nemá smysl (předpokládáme, že l značí délku). Není uvedena jednotka – může tedy být $l = 25\ \mathrm{mm}$, nebo $l = 25\ \mathrm{cm}$, nebo $l = 25\ \mathrm{m}$. Zápis bez jednotek prostě není přípustný, neboť vede k nejednoznačnosti.

2.3 Mezinárodní soustava jednotek

Mezinárodní soustavu jednotek tvoří tyto skupiny jednotek:

2.3.1 Základní jednotky (a veličiny)

Definují se přírodním dějem. Jde o 7 jednotek a veličin:

Veličina		**Jednotka SI**	
Název	**Symbol**	**Název**	**Značka**
délka	l	metr	m
hmotnost	m	kilogram	kg
čas	T	sekunda	s
elektrický proud	I	ampér	A
termodynamická teplota	T	kelvin	K
látkové množství	n	mol	mol
svítivost	I	kandela	cd

tab. 1 Přehled základních veličin a jednotek

2.3.2 Odvozené jednotky

Odvozují se ze základních jednotek pomocí definičních vztahů odpovídajících fyzikálních veličin: $\frac{m}{s} = \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}, \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, … Některé z nich mají své názvy podle význačných fyziků - např. $\mathrm{N} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$ (newton), $\mathrm{J} = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}$ (joule), … Mezi jednotky odvozené patří též dvě doplňkové jednotky: **radián** (rad) jako jednotka rovinného úhlu a **steradián** (sr) jako jednotka prostorového úhlu. Tyto jednotky nelze vyjádřit pomocí jednotek základních – považujeme je za bezrozměrné. Je-li např. αoznačení rovinného úhlu, lze psát $\alpha = \pi\ \mathrm{rad}$, ale při přepisu do soustavy SI se píše jen $\alpha = \pi$, tj. $[\alpha] = 1$.

2.3.3 Násobné a dílčí jednotky

Tvoří se ze základních a odvozených jednotek pomocí mocnin o základu 10. Přehled předpon násobků a dílů jednotek je uveden v tab. 2. V některých případech je možné též použít předpon **centi-** (se značkou c), **deci-** (d) a **hekto-** (h) - např. $1\ \mathrm{cm} = 0{,}01\ \mathrm{m}$, $1\ \mathrm{dm} = 0{,}1\ \mathrm{m}$, $1\ \mathrm{hl} = 100\ \mathrm{l}$, … **Pozor!** Je zde jedna výjimka: **kilogram** je jednotka základní, nikoli násobná (příslušná násobná jednotka je 1 tuna – viz vedlejší jednotky).

Jednotky násobné				Jednotky dílčí		
exa-	E	10^{18}	základní veličina	mili-	m	10^{-3}
peta-	P	10^{15}		mikro-	µ	10^{-6}
tera-	T	10^{12}		nano-	n	10^{-9}
giga-	G	10^{9}		piko-	p	10^{-12}
mega-	M	10^{6}		femto-	f	10^{-15}
kilo-	k	10^{3}		atto-	a	10^{-18}

tab. 2 Přehled násobných a dílčích jednotek

2.3.4 Vedlejší jednotky

Jejich používání je příslušnou normou dovoleno, i když do jednotek soustavy SI nepatří. Povolení bylo uděleno na základě praktických důvodů. Jedná se např. o tyto jednotky: minuta (min), hodina (h), litr (l), tuna (t), … Při výpočtech je ale převádíme na jednotky soustavy SI.

2.3.5 Rozměr (dimenze) fyzikální veličiny

Rozměr fyzikální veličiny je **zápis její jednotky do součinu mocnin jednotek základních veličin**, rozšířený o dvě doplňkové jednotky pro rovinný (**grad**) a prostorový úhel (**rad**).

Postupujeme takto: Chceme určit rozměr fyzikální veličiny, která je dána definiční rovnicí nebo vzorcem (dále jen vzorcem). Pokud je některou z veličin, figurujících ve vzorci, jiná než základní veličina, nahradíme ji její definiční rovnicí. To opakujeme tak dlouho, dokud ve vzorci nevystupují jen základní veličiny, bezrozměrné veličiny a bezrozměrné koeficienty. Pokud ve vzorci vystupuje veličina základní, nahradíme ji symbolem její jednotky z tab. 1. Pokud ve vzorci figuruje číselný koeficient nebo bezrozměrná veličina, nahradíme je jedničkou. Tím získáme rozměr fyzikální veličiny.

Příklad

Máme určit rozměr práce. Práce je určena mimo jiné vzorcem $W = Fs$, kde F je síla, s je délka dráhy. Síla je určena vzorcem $F = ma$, kde m je hmotnost a a je zrychlení, zrychlení je dáno rovnicí $a = \frac{v}{t}$, rychlost je určena rovnicí $v = \frac{s}{t}$. Pokud známe více rovnic pro určení některé z veličin, vybereme tu nejjednodušší, stačí totiž sledovat její rozměr, ne velikost. Rozměr pak určíme takto:

$$W = Fs = mas = m\frac{v}{t}s = \frac{mvs}{t} = \frac{mss}{tt} = ms^2t^{-2},$$
$$[W] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}.$$

2.4 Fyzikální rovnice

Vztahy mezi fyzikálními veličinami popisují fyzikální rovnice. Ve fyzikální rovnici tedy vystupují nejen číselné hodnoty a matematické funkce, ale vždy i příslušné jednotky fyzikálních veličin.

Každá fyzikální rovnice (dále pouze rovnice) splňuje pravidlo, že **rozměr (jednotka) levé strany musí být roven rozměru (jednotce) pravé strany**.

2.4.1 Rozměrová zkouška fyzikální rovnice

Vlastnost popsanou v přecházejícím odstavci využívá velmi dobrá pomůcka pro kontrolu rovnic, kterou je **rozměrová zkouška**. Pokud chceme zkontrolovat správnost rovnice, provedeme porovnání rozměru pravé a levé strany fyzikální rovnice. Pokud je rozměr shodný, je předpoklad (nikoliv jistota), že rovnice je správná. Pokud porovnání rozměru nevychází, hledáme chybu v rovnici, přičemž podle odchylek v rozměrech pravé a levé strany dokážeme většinou odhadnout, která veličina a na kterém místě v rovnici chybí, přebývá nebo je v jiné mocnině, než má být.

Příklad

Předpokládejme, že chceme pomocí rozměrové zkoušky ověřit správnost rovnice $Fs = mv$ *, kde* F *je síla,* s *je délka dráhy,* m *je hmotnost a* v *je rychlost. Za veličiny dosadíme jejich jednotky a upravíme na rozměry jednotek.*

$$\mathrm{N \cdot m = kg \cdot m \cdot s^{-1}}\ ?$$
$$\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2} \neq kg \cdot m \cdot s^{-1}}$$

Je zřejmé, že kontrola nesouhlasí. Buď chybí na levé straně $m^{-1} \cdot s$ *nebo chybí na pravé straně* $m \cdot s^{-1}$*. Správná rovnice je* $Fs = \frac{1}{2}mv^2$ *(pro daný případ je práce rovna kinetické energii a ne hybnosti).*

Kontrolní otázky

1. *Co vyjadřujeme pomocí fyzikálních veličin?*
2. *Kolik je veličin v mezinárodní soustavě SI a jaké to jsou?*
3. *Proč číselná hodnota fyzikální veličiny nemá sama o sobě žádný smysl?*
4. *Jak vznikají odvozené jednotky?*
5. *Jaké základní pravidlo musí splňovat fyzikální rovnice?*

3 Vektory ve fyzice

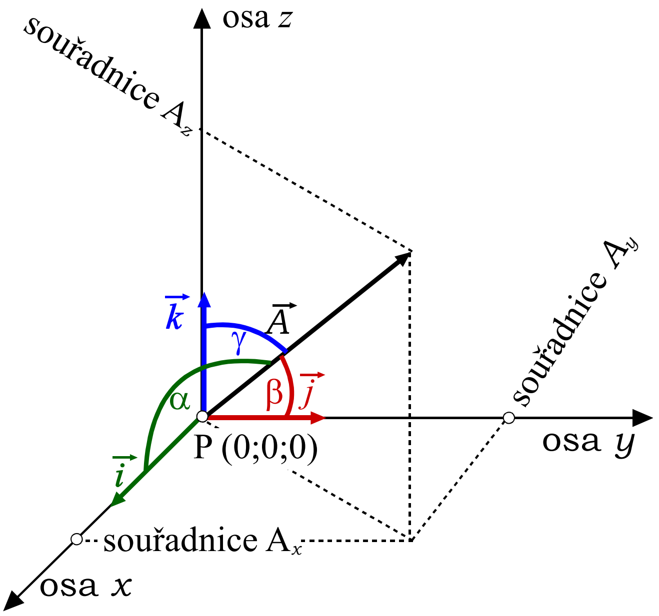
3.1 Skaláry a vektory ve fyzice

Veličiny ve fyzice rozdělujeme na skaláry, vektory a tenzory. Pro naše potřeby se budeme zajímat jen o **skaláry** a **vektory**. Skalární fyzikální veličina má velikost a **nemá směr**, jako např. čas, práce, energie apod. Vektorová fyzikální veličina má velikost a **má směr**. Příkladem je rychlost, zrychlení, síla a další. Zde se budeme zabývat vektorovými veličinami.

3.2 Souřadná soustava

Pro popis vektorových veličin zavedeme souřadnou soustavu. Souřadných soustav je mnoho, nejznámější je **kartézská souřadná soustava** (obr. 1), kterou budeme používat. Kartézská souřadná soustava je určena třemi navzájem **kolmými osami** x, y, z, uspořádanými **pravotočivě**. Je to takové uspořádání os, které splňuje následující pravidlo: Otáčením osy x k ose y míří osa z ve směru, ve kterém utahujeme šroub nebo zavrtáváme vývrtku do zátky láhve.

Součástí kartézské souřadné soustavy (dále jen souřadné soustavy) jsou **základní vektory**. Jsou to vektory $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ ležící v osách x, y, z, jejichž velikost je 1.



obr. 1 Vektor v kartézské souřadné soustavě

3.3 Vektor

Ve fyzice je **vektor** veličina charakterizovaná **velikostí** (počtem jednotek) a **směrem**. Graficky je vektor znázorněn jako orientovaná úsečka (šipka), např. na obr. 1 je to vektor $\vec{A}$. Vektor má svůj **počátek**, který se často klade do počátku P souřadné soustavy a **koncový bod**, který se nachází ve směru vektoru ve vzdálenosti odpovídající **velikosti vektoru** od počátku.

Vektor budeme zapisovat **symbolem veličiny, nad kterou znázorníme šipku**, v literatuře se vektory často zapisují tučně.

3.3.1 Zápis vektoru pomocí souřadnic

Vektor je nejčastěji popsán svými třemi průměty A_x, A_y, A_z do souřadných os. Jsou to **souřadnice vektoru**. Pomocí souřadnic vektor zapíšeme v jednom z tvarů

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x\vec{\jmath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k}. \qquad (2)$$

Základní vektory pak mají souřadnice

$$\vec{\imath} = (1,0,0),\ \vec{\jmath} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1). \qquad (3)$$

3.3.2 Směr vektoru, směrové kosiny

Směr vektoru lze vyjádřit pomocí směrových kosinů. Jde o kosinové funkce úhlů, které svírá vektor se souřadnými osami, tedy

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{A_x}{A}, \\ \cos\beta &= \frac{A_y}{A}, \\ \cos\gamma &= \frac{A_z}{A}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Pro směrové kosiny platí

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \qquad (5)$$

Pro základní vektory potom platí

$$\begin{aligned} &\vec{\imath}: \cos\alpha = 1,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 0, \\ &\vec{\jmath}: \cos\alpha = 0,\ \cos\beta = 1,\ \cos\gamma = 0, \\ &\vec{k}: \cos\alpha = 0,\ \cos\beta = 0,\ \cos\gamma = 1. \end{aligned} \qquad (6)$$

3.3.3 Velikost vektoru

Velikost vektoru je v grafickém znázornění jeho délka. Budeme ji značit buď **symbolem vektoru bez šipky**, nebo symbolem vektoru v absolutní hodnotě. Pomocí souřadnic získáme velikost vektoru rovnicí

$$A = \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \qquad (7)$$

Z uvedeného vyplývá, že základní vektory mají velikost 1,

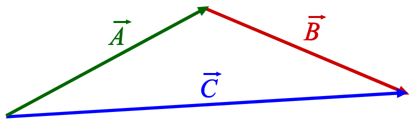
$$|\vec{\imath}| = |\vec{\jmath}| = \left|\vec{k}\right| = 1. \qquad (8)$$

3.4 Operace s vektory

Předpokládejme vektory $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ a $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, které spolu svírají úhel ϕ, dále předpokládejme číslo k. V následujících odstavcích popíšeme operace mezi vektory a mezi vektory a čísly. Pokud bude výsledkem vektor, zapíšeme ho ve tvaru $\vec{C} = (C_x, C_y, C_z)$, pokud bude výsledkem číslo, zapíšeme ho ve tvaru čísla c.

3.4.1 Sčítání vektorů (vektorový součet a rozdíl)

Pomocí souřadnic získáme vektorový součet nebo rozdíl operací



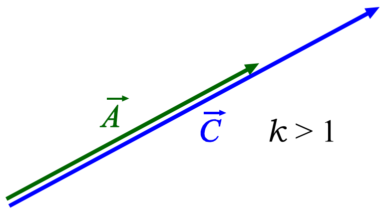
obr. 2 Vektorový součet

$$\vec{C} = \vec{A} \pm \vec{B} = (A_x \pm B_x, A_y \pm B_y, A_z \pm B_z). \tag{9}$$

Z obr. 2 vyplývá, jak provést vektorový součet $\vec{A} + \vec{B}$ graficky. Ze stejného obr. vyplývá, jak provést graficky vektorový rozdíl, pokud si uvědomíme, že $\vec{B} = \vec{C} - \vec{A}$.

3.4.2 Násobení vektoru číslem

Výsledkem násobení vektoru číslem je vektor



obr. 3 Násobní vektoru číslem

$$\vec{C} = k\vec{A} = (kA_x, kA_y, kA_z). \tag{10}$$

Výsledný vektor $\vec{C}$ je směrově stejný s původním vektorem $\vec{A}$, přičemž se prodlouží pokud $k > 1$, zkrátí pokud $k < 1$.

3.4.3 Skalární součin

Skalární součin je součin dvou vektorů, jehož výsledkem je číslo (skalár). V souřadnicovém zápisu je skalární součin

$$c = \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z). \tag{11}$$

Skalární součin lze vypočítat pomocí velikosti vektorů a vzájemného úhlu vektorů ϕ

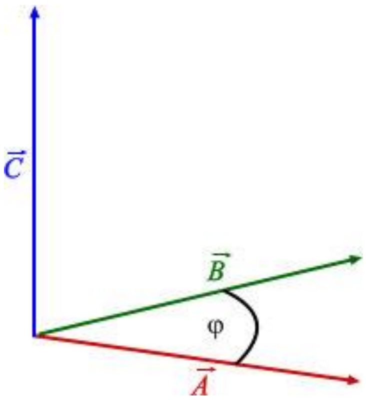
$$c = \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos\phi. \tag{12}$$

Z výše uvedených rovnic vyplývá, že

$$\begin{aligned} &c = \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}, \\ &\vec{A} \perp \vec{B} \ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0, \\ &\vec{A} \ || \ \vec{B} \ \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|. \end{aligned} \tag{13}$$

3.4.4 Vektorový součin

Výsledkem vektorového součinu je vektor kolmý na oba výchozí vektory. V souřadnicovém zápisu je vektorový součin



obr. 4 Vektorový součin

$$\begin{aligned} &\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \\ &= (A_yB_z - B_yA_z)\vec{i} + (A_zB_x - B_zA_x)\vec{j} \\ &+(A_xB_y - B_xA_y)\vec{k}. \end{aligned} \tag{14}$$

Velikost vektorového součinu lze vypočítat pomocí velikosti vektorů a vzájemného úhlu vektorů ϕ

$$|\vec{C}| = |\vec{A} \times \vec{B}| = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \sin\phi. \tag{15}$$

Z výše uvedených rovnic vyplývá, že

$$\begin{aligned} &\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}, \\ &\vec{A} \perp \vec{B} \ \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|, \\ &\vec{A} || \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

3.4.5 Pokročilejší operace s vektory

Dvojnásobný vektorový součin

$$\vec{D} = \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} \cdot (\vec{A} \cdot \vec{B}). \tag{17}$$

Smíšený součin vektorů

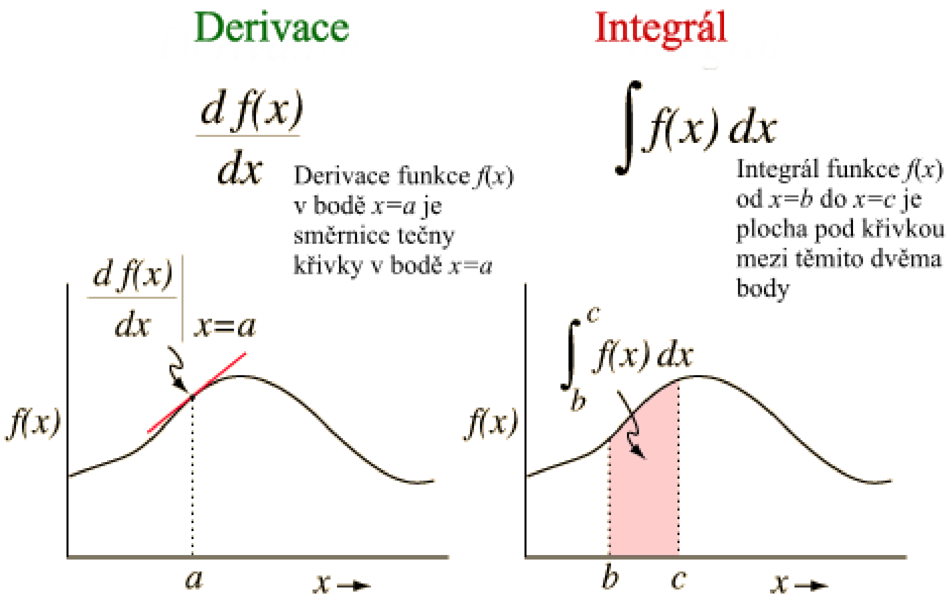
$$c = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}. \tag{18}$$

Kontrolní otázky

?

1. *Jak rozdělujeme veličiny ve fyzice?*
2. *Jak se liší skalární veličiny od vektorových?*
3. *Jaká je nejvyužívanější souřadná soustava ve fyzice?*
4. *Co jsou to vektory* $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$*?*
5. *Jak vypočteme velikost vektoru?*
6. *Co je výsledek skalárního součinu dvou vektorů?*
7. *Co je výsledek vektorového součinu dvou vektorů?*

4 Derivace a integrály ve fyzice



obr. 5 K vysvětlení derivace a integrálu

4.1 Derivace

V případě dvourozměrného křivky funkce $f(x)$, je derivace funkce v libovolném bodě (ve kterém existuje) rovna **směrnici tečny** této křivky v daném bodě.

Derivace funkce, jak ukazuje obr. 5, vyjadřuje strmost změny této funkce vzhledem k její nezávisle proměnné, či proměnným. Opačným procesem k derivování je integrování.

Pro změnu hodnoty se používá symbol Δ, takže tento poměr lze symbolicky zapsat jako $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Derivace je hodnota podílu pro Δx jdoucí k 0 (zapíšeme $\Delta x \to 0$). Nahradíme-li konečně malý rozdíl Δx nekonečně malou změnou $\mathrm{d}x$, získáme definici derivace $\frac{d\,y}{d\,x}$ (říkáme, že derivace je podílem diferenciálů závislé a nezávislé proměnné). Tento zápis se čte $\mathrm{d}y$ podle $\mathrm{d}x$. Tento výraz je považován za **symbol**, nikoliv za **zlomek**.

Nejběžnější **definice derivace** funkce je:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{19}$$

Derivace se značí více způsoby (a čte se):

a) $f'(x)$ (f *s čarou* x),

b) $\frac{d}{d\,x}$ (d *podle* dx *z* fx),

c) $\frac{d\,f}{d\,x}$ (df *podle* dx),

d) $\dot{x} = \frac{d\,x}{d\,t} = x'(t)$, ($x$ *s tečkou*) ve fyzice se používá pro derivování podle času (t).

Derivovat lze opakovaně, pak získáváme **druhou derivaci**, **třetí derivaci**, atd. Derivace vyšších řádů se ve fyzice označují exponentem, např. $\frac{d^2y}{dx^2}$ je druhá derivace. Derivace vyšších řádu podle času se označují více tečkami nad derivovanou veličinou, například $\ddot{x}$ je druhá derivace x podle času.

4.1.1 Parciální derivace

Při **parciální derivaci** se u funkce více proměnných považuje za proměnnou jenom ta, podle které se derivuje, ostatní jsou v tomto výpočtu považovány za konstanty. Parciální derivace se značí obdobně jako obyčejné derivace, pouze místo symbolu d se používá symbol ∂, např. $\frac{\partial f}{\partial y}$ značí parciální derivaci funkce f podle proměnné y.

4.1.2 Derivace vektorů

Derivací **vektoru** $\vec{v}$ podle proměnné t rozumíme vektor, jehož složky získáme derivací složek vektoru $\vec{v}$, tzn.

$$\frac{\overrightarrow{d\,v}}{d\,t} = \left(\frac{d\,v_x}{d\,t}, \frac{d\,v_y}{d\,t}, \frac{d\,v_z}{d\,t}\right)$$

4.1.3 Výpočty derivací

Derivace funkcí se počítají ze známých derivací několika základních funkcí (základní vzorce derivací) a jednoduchých algebraických pravidel pro jejich další úpravy.

4.1.4 Algebraická pravidla

Pro výpočet derivací platí:

- **Derivace součtu**:$(af + bg)' = af' + bg'$ pro libovolné funkce f, g a konstanty a, b. Speciálně $(\boldsymbol{af})' = \boldsymbol{af'}$, $(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})' = \boldsymbol{f'} + \boldsymbol{g'}$
- **Derivace součinu:** $(fg)' = f'g + fg'$pro všechny funkce f, g.
- **Derivace podílu:** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$pro všechny funkce f, g, kde $g \neq 0$.
- **Derivace složené funkce:** Pokud $f(x) = h(g(x))$, pak $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- **Derivace inverzní funkce:** Pokud jsou $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ obě diferencovatelné, pak

tehdy, kdy $\Delta x \neq 0$ pokud $\Delta y \neq 0$, platí $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dx}{dy}\right)^{-1}$.

4.1.5 Základní vzorce derivace funkcí

Funkce $y = f(x)$	**Vzorec pro derivaci**	**Podmínky platnosti vzorce**
$y = konst.$	$y' = 0$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = x^n \quad n \in N$	$y' = n.x^{n-1}$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = x^{-n} \quad n \in N$	$y' = -n.x^{-n-1}$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$y = x^r \quad r \in R$	$y' = r.x^{r-1}$	$x \in (0; +\infty)$
$y = e^x$	$y' = e^x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = a^x \quad 0 < a \wedge a \neq 1$	$y' = a^x.\ln a$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	$x \in (0; +\infty)$
$y = \log_a x \quad 0 < a \wedge a \neq 1$	$y' = \frac{1}{x.\ln a}$	$x \in (0; +\infty)$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \tan x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \in R - \{(2k+1).\frac{\pi}{2}; k \in Z\}$
$y = \cot x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$x \in R - \{k.\pi; k \in Z\}$

Příklady

$f(x) = 3;\ f'(x) = 0.$

$f(x) = x;\ f'(x) = 1.$

$f(x) = 2x;\ f'(x) = 2 \cdot 1 = 2.$

$f(x) = 5x^3;\ f'(x) = 15x^2; f''(x) = 30x.$

$f(x) = e^x;\ f'(x) = e^x.$

$f(x) = \ln x;\ f'(x) = x^{-1}.$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 7;\ f'(x) = 3x^2 + 4x - 5.$

$f(x) = \sin x \cdot \cos x;\ f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$

$f(x) = \frac{1}{\arcsin x};\ f'(x) = \frac{-1}{(\arcsin x)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

$f(x) = x^x = e^{x \ln x}; f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1).$

4.1.6 Lokální extrémy

Pokud má daná diferencovatelná funkce nějaký **lokální extrém** (maximum či minimum), je zřejmé, že její tečna v tomto bodě musí být vodorovná, tzn. **derivace této funkce musí být v tomto bodě nulová**. Pokud v tomto bodě lze spočítat i druhou derivaci, prozradí její znaménko, o jaký extrém se jedná:

- V bodech, kde je první derivace nula a druhá derivace je kladná, se nachází **lokální minimum**.
- V bodech, kde je první derivace nula a druhá derivace je záporná, se nachází **lokální maximum**.
- V bodech, kde je jak první, tak druhá derivace nulová, se nachází tzv. **stacionární bod**, který může a nemusí být extrémem.

Alternativou k rozlišení pomocí druhé derivace je znaménko první derivace: v bodě, kde má funkce lokální extrém, mění první derivace znaménko: pokud je nějaký bod lokálním minimem, pak v jeho levém okolí je první derivace záporná a v pravém okolí kladná, naopak v levém okolí lokálního maxima je první derivace kladná a v pravém záporná.

4.1.7 Analýza chování funkce

Předchozí odstavec popisuje způsob, jak pro danou funkci nalézt její lokální extrémy. To může sloužit k získání přehledu o **chování funkce**, např. při ručním náčrtu jejího **grafu**. Kromě analýzy extrémů lze využít derivací k následujícím pozorováním:

- V bodech, kde je **první derivace kladná**, je funkce **rostoucí**.
- V bodech, kde je **první derivace záporná**, je funkce **klesající**.
- V bodech, kde je **druhá derivace kladná**, je funkce **konvexní**.
- V bodech, kde je **druhá derivace záporná**, je funkce **konkávní**.
- V bodech, kde je **druhá derivace nulová**, se mohou vyskytovat **inflexní body**.

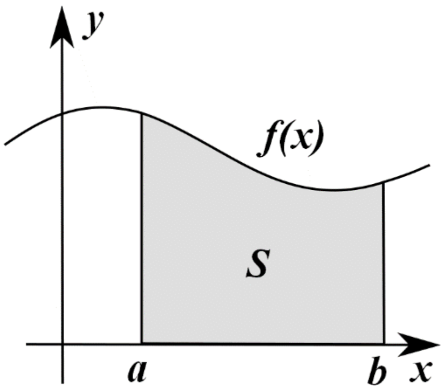
4.2 Integrál

Jednoduše řečeno je určitý integrál nezáporné funkce $f(x)$ mezi dvěma body a, b roven ploše obrazce omezeného přímkami $x=a$, $x=b$, osou x a křivkou definovanou grafem funkce f.

Integrál se značí stylizovaným protaženým písmenem S (z latinského *summa*). Integrál z předchozího odstavce by se značil jako

$\int_a^b f(x)\ dx$,

kde znaménko $\int$ značí integrování, a a b jsou integrační meze (jen u určitého integrálu), $\mathrm{d}x$ označuje proměnnou, podle které se integruje.



obr. 6 K vysvětlení integrálu

4.2.1 Algebraická pravidla

Pro výpočet integrálů platí zejména:

$$\int a\ f(x)\ \ dx = a \int f(x)\ \ dx$$

$$\int [f(x) \pm g(x)]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx$$

ednoduše řečeno je určitý integrál nezáporné funkce $f(x)$ mezi dvěma body a, b roven ploše obrazce omezeného přímkami $x=a$, $x=b$, osou x a křivkou definovanou grafem funkce f.

Integrál se značí stylizovaným protaženým písmenem S (z latinského *summa*). Integrál z předchozího odstavce by se značil jako

$\int_a^b f(x)\ dx$,

kde znaménko $\int$ značí integrování, a a b jsou integrační meze (jen u určitého integrálu), $\mathrm{d}x$ označuje proměnnou, podle které se integruje.

4.2.2 Tabulka integračních vzorců

U neurčitého integrálu je třeba k řešení přičíst integrační konstantu. Integrační konstantu zapíšeme až za konečný tvar výsledku.

Funkce $\boldsymbol{y = f(x)}$	**Vzorec pro neurčitý integrál** $\boldsymbol{\int f(x)dx = F(x) + c}$	**Podmínky platnosti vzorce** $\boldsymbol{(x \in D(f))}$
$y = 0$	$\int 0\ dx = c\ (c \in R)$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = 1$	$\int dx = x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = x^n, n \in N$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = ln\lvert x\rvert + c$	$x \in (-\infty; 0) \cup (0; \infty)$
$y = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = a^x\ (a > 0, a \neq 1)$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = sin\, x$	$\int sin\, x\, dx = -\, cos\, x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = cos\, x$	$\int cos\, x\, dx = sin\, x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = tan\, x$	$\int tan\, x\, dx = -\, ln\lvert\ cos\, x\ \rvert + c$	$cos\, x \neq 0, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k\ celé$
$y = cot\, x$	$\int cot\, x\, dx = ln\lvert\ sin\, x\ \rvert + c$	$sin\, x \neq 0, \quad x \neq k\pi,\ k\ celé$
$y = \frac{1}{cos^2 x}$	$\int \frac{1}{cos^2 x} dx = tan\, x + c$	$x \in \bigcup_{k \in Z} \left((2k-1)\frac{\pi}{2}; (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$
$y = \frac{1}{sin^2 x}$	$\int \frac{1}{sin^2 x} dx = -\, cot\, x + c$	$x \in \bigcup_{k \in Z} (kx, (k+1)\pi)$
$y = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsin\, x + c$	$x \in (-1{,}1)$
$y = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arccos\, x + c$	$x \in (-1{,}1)$
$y = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctan\, x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$
$y = -\frac{1}{1+x^2}$	$\int -\frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arccot}x + c$	$x \in (-\infty; +\infty)$

5 Kinematika hmotného bodu

Kinematika je část mechaniky, která se zabývá klasifikací a popisem různých druhů pohybu, ale nezabývá se jeho příčinami. Kinematika se tedy zaměřuje na sledování polohy, rychlosti apod.

5.1 Klasická mechanika

Klasická mechanika (dále jen mechanika) studuje mechanický pohyb. Kinematika se zabývá jeho popisem v prostoru a v čase a dynamika studuje příčiny pohybu.

Mechanický pohyb je změna vzájemné polohy těles v prostoru a v čase. Klasická mechanika splňuje podmínku, že rychlosti těles jsou mnohem menší než rychlost světla ve vakuu $c = 3 \cdot 10^8 \ m \cdot s^{-1}$.

- **Kinematika** – popis v prostoru a čase bez uvažování příčin pohybu a jeho změn.
- **Dynamika** – studium příčin pohybu a jeho změn. Zkoumá pohyb z hlediska působení sil.
- **Statika** – zvláštní část mechaniky, pohyb nenastává.

Klasická mechanika operuje s pojmem **hmotný bod**.

Hmotný bod je těleso nenulové hmotnosti, jehož geometrické rozměry jsou zanedbatelně malé. Jedná se o fyzikální fikci.

5.2 Vztažný systém

Pohyb je relativní, a proto je nutno zavést vztažný systém (vztažnou soustavu). Se vztažným systémem spojíme pohyb tělesa. Nejznámější vztažný systém je **pravoúhlý souřadný systém (kartézský)**, který je znázorněn na obr. 7.

Abychom určili polohu hmotného bodu, zavádíme tzv. **polohový vektor** $\vec{r}$. Polohový vektor (též průvodič nebo rádiusvektor) je spojnice počátku soustavy souřadnic a hmotného bodu s orientací k hmotnému bodu.

Polohový vektor určuje polohu bodu. Jeho počáteční bod leží v počátku souřadné soustavy a jeho koncový bod splývá s polohou, kterou určuje.

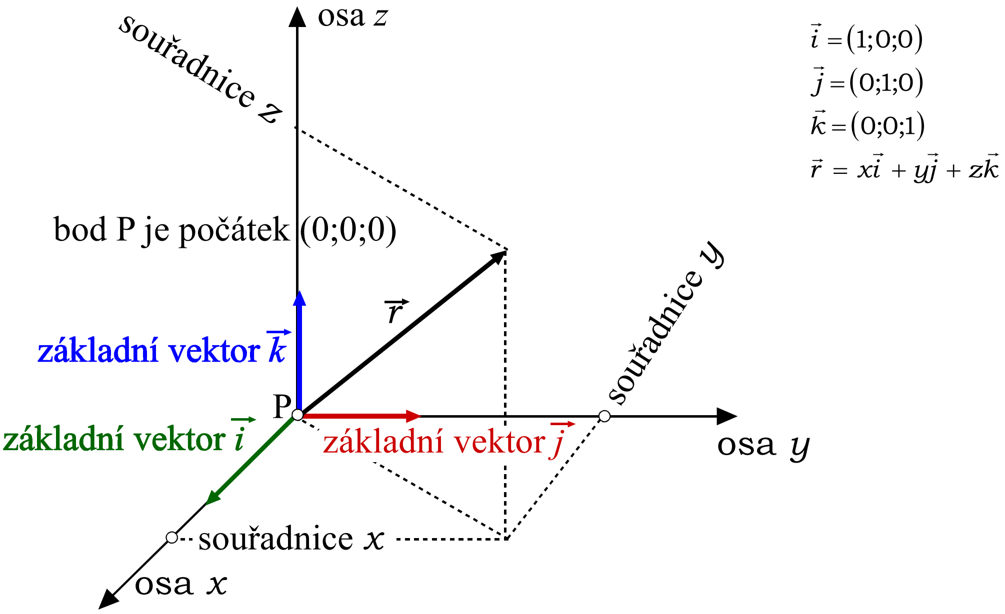
Velikost polohového vektoru je (všimněte si značení)

$$|\vec{r}| = r = \sqrt[2]{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (20)$$

Jednotkový polohový vektor je definován poměrem

$$\vec{r}_0 = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \quad . \qquad (21)$$

Jeho velikost je jedna a je bezrozměrný.



obr. 7 Kartézský souřadný systém

Množina koncových bodů polohového vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$je **trajektorie**. Je to křivka, po které se hmotný bod pohybuje.

Trajektorie (též pohybová křivka) je geometrická čára prostorem, kterou hmotný bod nebo těleso při pohybu opisuje. Jedná se tedy o množinu všech poloh (hmotného) bodu, v nichž se může v různých časových okamžicích nacházet.

Trajektorií může být přímka, kružnice, elipsa či jakákoliv obecná křivka. Podle tvaru trajektorie dále pohyb dělíme na přímočarý a křivočarý.

Tvar trajektorie je závislý na volbě vztažné soustavy (kartézská, sférická, polární).

Délka trajektorie se nazývá **dráha**. Je to vzdálenost, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu a značí se obvykle s.

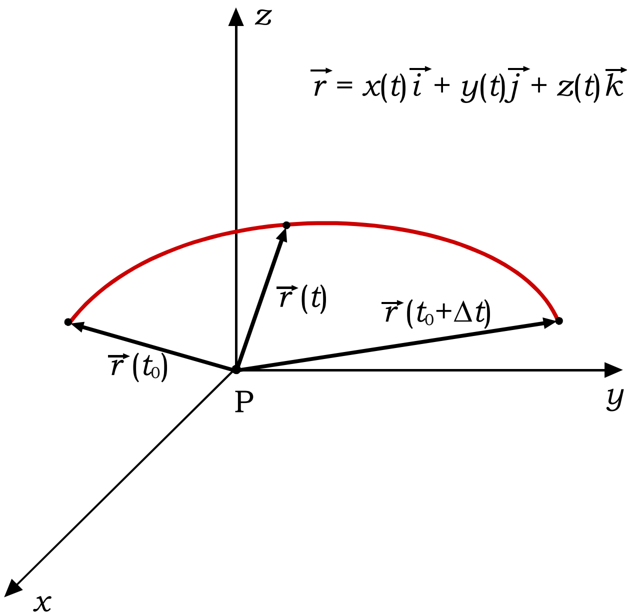
5.2.1 Parametrické rovnice trajektorie

Časová závislost polohového vektoru je vektorová rovnice popisující křivku v prostoru.

$$\vec{r} = f(t) = [x(t);\ y(t);\ z(t)]. \tag{22}$$

Každá souřadnice vektorové funkce představuje jednu parametrickou rovnici trajektorie.

Trajektorie je nakreslená na obr. 8. Každý polohový vektor, určující trajektorii, začíná v počátku souřadnic a končí na trajektorii. Vektor $\vec{r}\,(t_0)$ určuje polohu počátku trajektorie, vektor $\vec{r}\,(t_0 + \Delta t)$ určuje konec trajektorie, obecný bod na trajektorii je určen vektorem $\vec{r}\,(t)$. Množina všech koncových bodů polohových vektorů je trajektorie.



obr. 8 Trajektorie v souřadné soustavě

Příklad 1

Je dán polohový vektor $\vec{r} = (12;\ -5;\ 0)$ *cm. Jaká je jeho velikost?*

$$|\vec{r}| = \sqrt{(12)^2 + (-5)^2}$$
$$|\vec{r}| = \sqrt{169} = 13\ \text{cm}$$

Velikost zadaného vektoru je 13 cm.

Příklad 2

Jaká je velikost základních vektorů?

$$i = |\vec{i}| = \sqrt{1^2 + 0 + 0} = 1,$$
$$j = |\vec{j}| = \sqrt{0 + 1^2 + 0} = 1,$$
$$k = |\vec{k}| = \sqrt{0 + 0 + 1^2} = 1.$$

Základní vektory jsou jednotkové.

5.2.2 Rychlost

Okamžitá rychlost je dána změnou polohy za jednotku času. Určuje ji rovnice (je definována)

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t}. \tag{23}$$

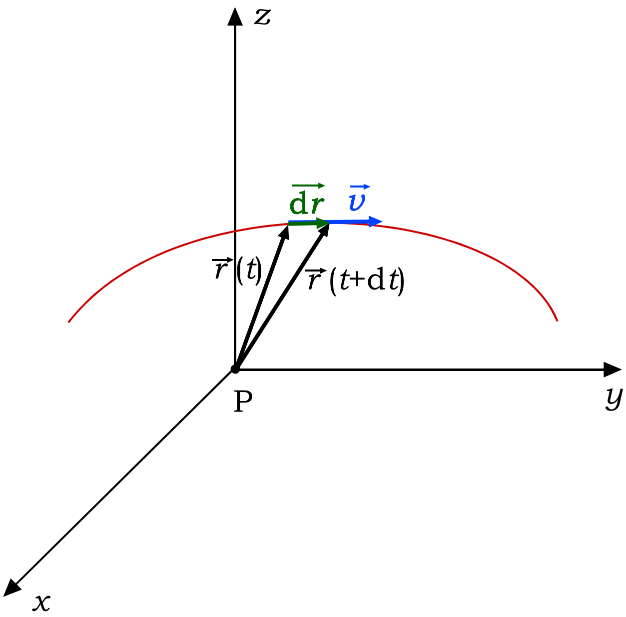
Jednotka rychlosti je $m \cdot s^{-1}$. Rovnici (23) čteme takto: **rychlost je derivace polohového vektoru podle času**. Okamžitá rychlost **má tečný směr k trajektorii**. Rovnice (23) představuje 3 složkové rovnice.

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{d\,x}{d\,t}\ , \\ v_y &= \frac{d\,y}{d\,t}\ , \\ v_z &= \frac{d\,z}{d\,t}\ . \end{aligned} \tag{24}$$

Velikost rychlosti se zjišťuje jako velikost vektoru, tedy

$$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{\sqrt{d\,x^2 + d\,y^2 + d\,z^2}}{d\,t} = \frac{d\,s}{d\,t}, \tag{25}$$

kde s je délka dráhy. Derivací délky dráhy nezjistíme směr rychlosti, zjistíme jen velikost rychlosti.



obr. 9 K vysvětlení definice rychlosti

5.2.3 Zrychlení

Okamžité zrychlení je dáno změnou vektoru rychlosti za jednotku času. Určuje ho rovnice (zrychlení je definováno)

$$\vec{a} = \frac{d\,\overrightarrow{v}}{d\,t}. \tag{26}$$

Jednotka zrychlení je $m \cdot s^{-2}$. Rovnici (26) čteme takto: **zrychlení je derivace vektoru rychlosti podle času**. Okamžité zrychlení **nemá obecně směr vázaný k trajektorii**. Rovnice (26) představuje 3 složkové rovnice, podobně jako je tomu u rychlosti v rovnici (24).

Tečné a normálové zrychlení.

Zrychlení často rozkládáme na tečnou $\vec{a}_t$ a normálovou $\vec{a}_n$ složku zrychlení

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n. \tag{27}$$

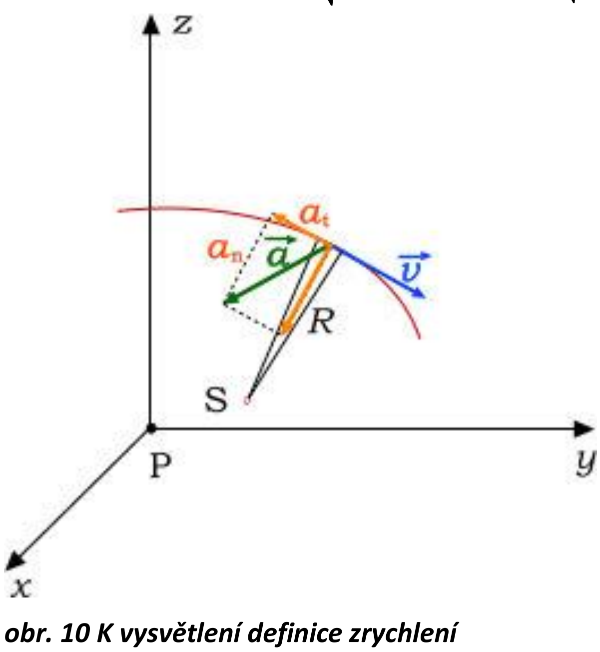
Tečná složka zrychlení má směr tečny a normálová směr normály (kolmice) k trajektorii. Velikost těchto složek je

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{d\,v}{d\,t}\ , \\ a_n &= \frac{v^2}{R}\ , \end{aligned} \tag{28}$$

Kde v je velikost rychlosti a R je poloměr křivosti trajektorie, obojí v místě rozkladu vektoru zrychlení, jak ukazuje obr. 10.

Velikost zrychlení se zjišťuje jako velikost vektoru nebo z tečné a normálové složky zrychlení

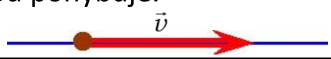
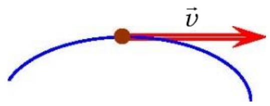
$$a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}. \tag{29}$$



obr. 10 K vysvětlení definice zrychlení

5.3 Klasifikace pohybů

Pohyby lze klasifikovat zejména 1) podle tvaru dráhy a 2) podle charakteru rychlosti.

Podle tvaru dráhy	**Přímočarý** – vektor $\vec{v}$ má stále stejný směr, který splývá s přímkou, po níž se hmotný bod pohybuje. 
	Křivočarý – vektor $\vec{v}$ mění svůj směr, který je vždy tečný ke křivce, po níž se hmotný bod pohybuje. Speciálními křivočarými pohyby jsou kruhový pohyb a vrhy. 
Podle charakteru rychlosti	**Nerovnoměrný** – vektor rychlosti svou velikost mění, $v \neq konst.$ Speciálním nerovnoměrným pohybem je **pohyb rovnoměrně zrychlený**.
	Rovnoměrný – vektor rychlosti má stále stejnou velikost $v = konst.$

Některé z uvedených pohybů si popíšeme.

5.3.1 Přímočarý pohyb

Dráhou přímočarého pohybu je přímka. Proto stačí popis v souřadné soustavě s jedinou osou x. Pohyb tedy stačí popsat veličinami $x = s,\ v_x = v,\ a_x = a$. Rychlost přímočarého pohybu odvodíme z definiční rovnice zrychlení (26), stačí ji napsat pro směr x.

$$a = \frac{d\,v}{d\,t} \Rightarrow d\,v = a\ \ d\,t \Rightarrow \int_{v_0}^{v} d\,v = \int_0^t a\ \ d\,t \Rightarrow v - v_0 = \int_0^t a\ \ d\,t. \tag{30}$$

Dále budeme pokračovat pro **pohyb rovnoměrně zrychlený**, splňující podmínku $a = konst.$

$$v = \int_0^t a\ \ d\,t + v_0 = a\int_0^t d\,t + v_0 = at + v_0. \tag{31}$$

Rychlost přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je tedy dána rovnicí

$$v = v_0 + at. \tag{32}$$

Polohu přímočarého pohybu na ose x, tedy x souřadnici, odvodíme z definiční rovnice rychlosti (23), stačí ji napsat pro směr x.

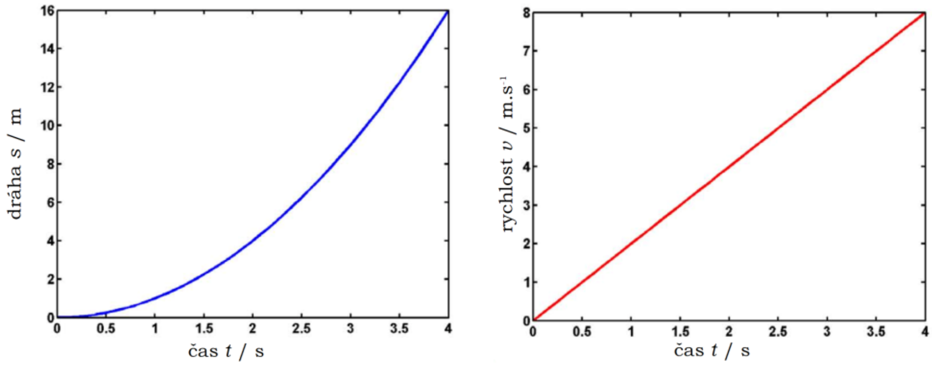
$$v = \frac{d\,x}{d\,t} \Rightarrow d\,x = v\ \ d\,t \Rightarrow \int_{x_0}^{x} d\,x = \int_0^t v\,d\,t \Rightarrow x - x_0 = \int_0^t v\ \ d\,t. \tag{33}$$

Dále budeme opět pokračovat pro **pohyb rovnoměrně zrychlený**, splňující rovnici (32) a podmínku $a = konst$.

$$x = \int_0^t (v_0 + at)dt + x_0 = v_0 \int_0^t d\,t + a \int_0^t t\,d\,t + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{34}$$

Délka dráhy přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je tedy dána rovnicí

$$s = x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2. \tag{35}$$



obr. 11 Časová závislost dráhy a rychlosti rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu

5.3.2 Křivočarý pohyb

Ke křivočarému pohybu už musíme obecně použít vektorový popis. Bez odvození napišme, že pro popis obecného křivočarého pohybu v prostoru platí analogické rovnice jako v předchozím odstavci s tím rozdílem, že k popisu použijeme vektory. Bude tedy platit následující sestava rovnic (méně používané nejsou zvýrazněné).

Pro pohyb s obecným zrychlením:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a}\,d\,t. \tag{36}$$

Pro pohyb **rovnoměrně zrychlený** s konstantním zrychlením:

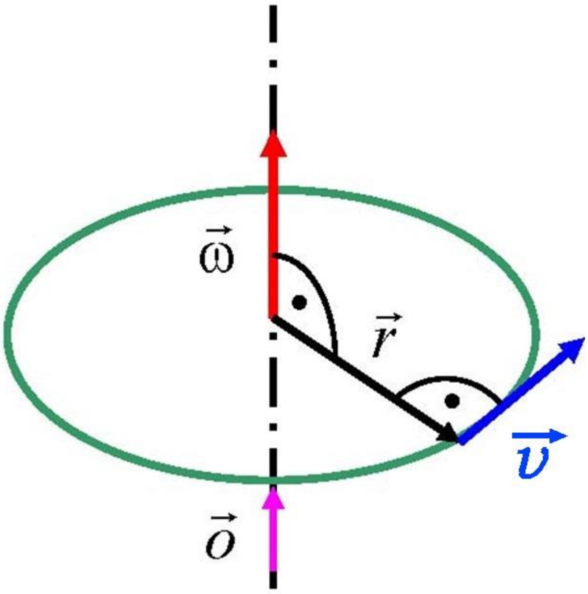
$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t, \tag{37}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2. \tag{38}$$

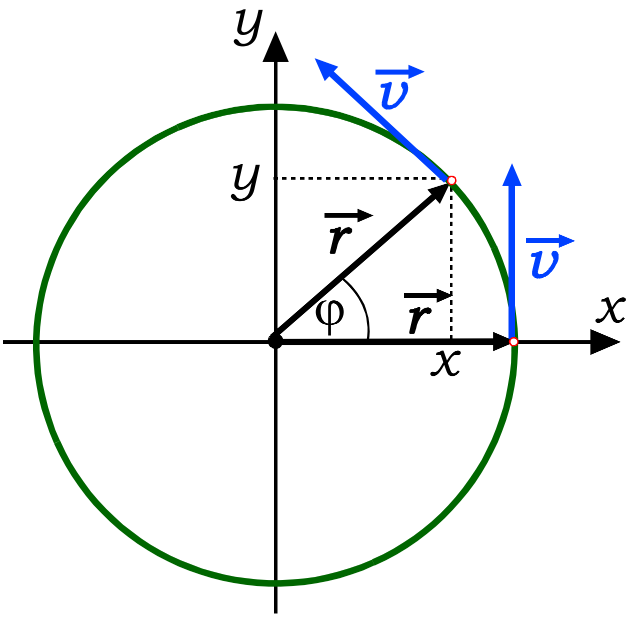
5.3.3 Kruhový pohyb

Kruhový pohyb je speciální případ křivočarého pohybu. Probíhá v rovině po kruhové trajektorii, a proto k jeho popisu stačí souřadný systém s osami x, y. Kruhový pohyb znázorněný v prostoru je na obr. 12, znázorněný v rovině je na obr. 13.

Kruhový pohyb se nejvýhodněji popisuje kruhovými veličinami, které zavedeme.



obr. 12 Znázornění kruhového pohybu v prostoru



obr. 13 Znázornění kruhového pohybu v rovině

5.3.4 Úhlová dráha

představuje úhel ϕ, který svírá průvodič (polohový vektor) pohybujícího se bodu s osou x. Úhlová dráha narůstá při každé provedené otáčce o 2π a může tedy dosáhnout libovolně vysokých hodnot.

5.3.5 Souřadnice při kruhovém pohybu

S využitím úhlové dráhy a obr. 12 lehce najdeme souřadnice hmotného bodu pohybujícího se po kružnici. Souřadnice jsou

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \ , \\ y &= r\sin\phi \ . \end{aligned} \tag{39}$$

Pokud za úhlovou dráhu dosadíme některé z níže uvedených vyjádření úhlové dráhy, získáme časovou závislost souřadnic.

5.3.6 Úhlová rychlost

je definována rovnicí

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\,\phi}}{d\,t}, \tag{40}$$

5.3.7 Úhlové zrychlení

je definováno rovnicí

$$\vec{\varepsilon} = \frac{\overrightarrow{d\,\omega}}{d\,t}, \tag{41}$$

Definice uvedené v rovnicích (40) a (41) jsou velmi podobné k definicím obecného pohybu (23) a (26).

Vektorový popis kruhového pohybu není obvykle nutný, protože všechny vektory $\vec{\phi}$, $\vec{\omega}$, $\vec{\varepsilon}$ jsou souběžné a leží v ose rotace, jak naznačuje obr. 12, kde je zakreslen vektor úhlové rychlosti $\vec{\omega}$. Na obr. 12 je rovněž vidět, že vektory $\vec{r}$, $\vec{\omega}$, $\vec{v}$ jsou vzájemně kolmé. Dále již nebudeme vektorový popis používat.

Řešením rovnic (40) a (41), stejným postupem jako u přímočarého pohybu, dostaneme základní rovnice popisující časové závislosti úhlové rychlosti a úhlové dráhy. Předpokládejme rovnoměrně zrychlený kruhový pohyb, $\varepsilon = konst.$, potom

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\, t, \tag{42}$$

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\varepsilon t^2. \tag{43}$$

5.3.1 Souvislost obvodových a úhlových veličin

Obvodovými veličinami kruhového pohybu jsou obvodová dráha s, obvodová rychlost v, a obvodové zrychlení a. Úhlovými veličinami jsou ϕ, ω, ε. Mezi nimi lze najít následující jednoduché souvislosti

$$s = \phi r, \tag{44}$$

$$v = \omega r, \tag{45}$$

$$a = \varepsilon r. \tag{46}$$

5.3.2 Perioda, frekvence, kruhová frekvence

U periodických pohybů, ke kterým pohyb kruhový patří, zavádíme následující veličiny. **Perioda** kruhového pohybu T je čas potřebný k vykonání jedné otáčky. **Frekvence** kruhového pohybu f je počet oběhů za 1 sekundu.

$$f = \frac{1}{T}. \tag{47}$$

Kruhová frekvence je rovna **úhlové rychlosti**. Její závislost na frekvenci najdeme takto. Využijeme toho, že úhlová dráha se po jedné otáčce zvýší o 2π a čas o periodu T.

$$\left.\begin{array}{r} \phi(t_0) = 0 \\ \phi(t_0 + T) = 2\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \phi(t_0 + T) = \phi(t_0) + \omega T, \tag{48}$$

odtud získáme

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f. \tag{49}$$

Kontrolní otázky

?

1. *Čím se zabývá kinematika?*
2. *Čím se nezabývá kinematika?*
3. *Co je to hmotný bod?*
4. *Proč zavádíme pojem hmotného bodu?*
5. *Pomocí čeho určujeme polohu bodu?*
6. *Co je to trajektorie?*
7. *Jak je definována okamžitá rychlost?*
8. *Jaký rozměr má rychlost v soustavě SI?*
9. *Jak je definováno okamžité zrychlení?*
10. *Jaký rozměr má zrychlení v soustavě SI?*
11. *Jak rozdělujeme pohyby podle tvaru dráhy?*
12. *Co je dráhou přímočarého pohybu?*

13. Jak dělíme pohyby podle zrychlení?

14. Jak definujeme kruhový pohyb?

15. Co je to úhlová dráha?

16. Jak se vypočítají souřadnice při kruhovém pohybu?

17. Jak je definována úhlová rychlost?

18. Jak je definováno úhlové zrychlení?

19. Co je to perioda u kruhového pohybu?

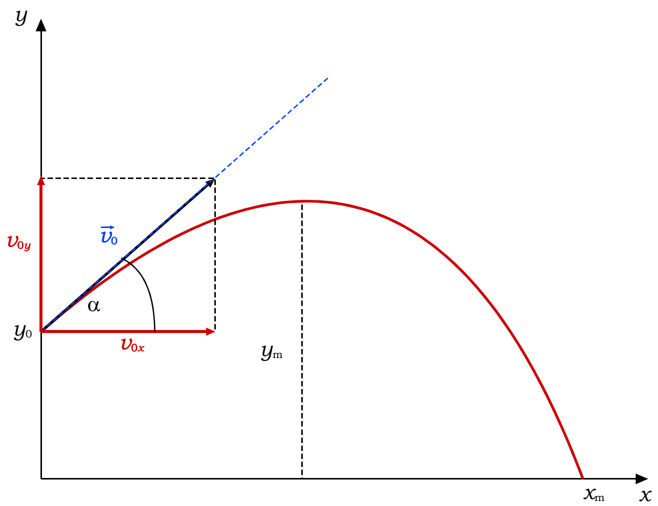
20. Co je to frekvence u kruhového pohybu?

6 Vrhy těles v gravitačním poli

Vztahy pro jednotlivé vrhy (vrh svislý, vrh vodorovný, vrh šikmý) dostaneme z výsledných vztahů obecného vrhu speciální volbou směru počáteční rychlosti a výšky nad vodorovnou rovinou, v níž vrh začíná.

6.1 Vrh šikmý

Nejobecnějším vrhem tělesa je šikmý vrh vzhůru, který popíšeme a z něj zjednodušíme ostatní vrhy.



obr. 14 Šikmý vrh vzhůru

Předpokládejme, že těleso má počáteční rychlost $\vec{v}_0$ svírající s vodorovným směrem elevační úhel α. Zanedbejme odpor vzduchu. Pohyb se skládá:

1. Ve vodorovném směru, kterým proložíme osu x, z **rovnoměrného přímočarého pohybu** rychlostí v_{0x}.
2. Ve směru vzhůru, kterým proložíme osu y, z **rovnoměrně zpožděného pohybu**. Zpoždění $a = -g$ má hodnotu gravitačního zrychlení. Budeme důsledně dosazovat $-g$.
3. Ve směru osy z pohyb neprobíhá, trajektorií tedy bude rovinná křivka.
4. Proto směr x platí:

$$v_x = v_0 \cos\alpha = konst. \tag{50}$$

$$x = x_0 + v_0 t \cos\alpha, \tag{51}$$

5. Rovnice (50) je formální (říká jen, že rychlost je konstantní), nebudeme ji používat. Pro směr y platí:

$$v_y = v_0 \sin\alpha - gt. \tag{52}$$

$$y = y_0 + v_0 t \sin\alpha - \frac{1}{2} g t^2, \tag{53}$$

6. Obvykle je vhodné položit počátek souřadné soustavy do bodu ($x_0 = 0$, $y_0 = 0$), nebo alespoň do bodu ($x_0 = 0,\ y_0 > 0$), jak ukazuje obr. 14. Potom z rovnic (51) až (53) vypadne konstanta x_0.
7. Při pohybu v prostředí s nezanedbatelným odporem opisuje těleso asymetrickou balistickou křivku, u které je délka vrhu kratší než u pohybu při zanedbání odporu vzduchu.

Příklad 1

Určete maximální výšku šikmého vrhu vzhůru.

Řešení: Maximální dosaženou výšku, která splňuje podmínku $v_y = 0$, najdeme dosazením podmínky do rovnic (52) a (53) dostaneme

$$v_0 \sin\alpha = gt,$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g},$$

$$y_m = y_0 + v_0\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2,$$

$$y_m = y_0 + \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2 \sin^2\alpha}{g}$$

Příklad 2

Určete vzdálenost dopadu šikmého vrhu vzhůru.

Řešení: Délka vrhu, tedy vzdálenost, po které těleso dopadne, splňuje podmínku $y = 0$. Dosazením do rovnic (52) a (53) dostaneme

$$0 = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + y_0\ ,$$

$$t = \frac{v_0 \sin\alpha \pm \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 2y_0 g}}{g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\right)^2 - \frac{2y_0}{g}},$$

Dosazením do rovnice (51)

$$x_m = v_0 t \cos\alpha\ ,$$

$$x_m = \frac{v_0 \sin\alpha + \sqrt{(v_0 \sin\alpha)^2 - 2y_0 g}}{g} v_0 \cos\alpha$$

Pro vrh z nulové výšky $y_0 = 0$. Úpravou

$$x_m = \frac{{v_0}^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

6.2 Volný pád

Pohyb probíhá pouze ve směru osy y (elevační úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$) proti směru osy y. Počáteční rychlost je nulová a pro rychlost proto dostáváme podle rovnice (52) vztah $v = -gt$. Výška, ve které se těleso nachází v čase t, je $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$. Pohyb v ose x nenastává a proto se osa x nezavádí.

Příklad 3

Za jak dlouho spadne těleso na Zem volným pádem. Jakou rychlostí dopadne?

Řešení: Při dopadu je $y = 0$, a proto $0 = y_0 - \frac{1}{2}gt_d{}^2$, odtud $y_0 = \frac{1}{2}gt_d{}^2 \Rightarrow t_d = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

Dopadne rychlostí $v = -gt$, kam dosadíme čas dopadu, $v = -gt_d = -g\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$ (znaménko minus říká, že rychlost míří proti směru osy y).

6.3 Vrh svislý vzhůru

Pohyb probíhá pouze ve směru osy y, elevační úhel $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Počáteční rychlost v_0 je nenulová a míří svisle vzhůru. Pro rychlost pak dostaneme vztah $v = v_0 - gt$. Okamžitá výška tělesa nad osou x je dána vztahem $y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, shodně se šikmým vrhem. V nejvyšším bodě výstupu je rychlost nulová $v = 0$. Z nejvyššího bodu padá těleso zpět volným pádem.

Příklad 4

Jaká je výška výstupu tělesa při svislém vrhu vzhůru, pokud ho uskutečníme a) z výšky h, b) ze Země?

Řešení:

a) Začneme rovnicí $v = v_0 - gt$ a dosadíme podmínku $v = 0$, neboť v nejvyšším bodě se těleso zastaví. Odtud získáme $v_0 = gt_{ymax}$ a úpravou dobu výstupu $t\frac{v_0}{g}{}_{ymax}$. Dosazením do vztahu $y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, $t = t_{ymax}$, dostaneme po úpravě výšku výstupu $h = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$.

b) Do výsledku z předchozího odstavce dosadíme $y_0 = 0$ a dostaneme $h = \frac{v_0{}^2}{2g}$

6.4 Vrh vodorovný

Při vodorovném vrhu směřuje počáteční rychlost ve směru osy x (elevační úhel $\alpha = 0$). Počáteční rychlost ve směru y je nulová.

Příklad 5

Jaká je doba letu vodorovného vrhu?

Řešení: Pro dobu letu platí podmínka $y = 0$, neboť těleso dopadne. Dosazením této podmínky do rovnice $y = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$ dostaneme dobu letu

$t_m = \sqrt{\frac{2h}{g}}$Dosazením doby letu do vztahu pro souřadnici x získáme délku vrhu $x_m = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Příklad 6

Vypočítejte délku vodorovného vrhu.

Řešení: Dosazením doby letu z předchozího příkladu do vztahu (51) s využitím podmínky $cos\,\alpha = cos\,0 = 1$ dostaneme délku vrhu $x_m = v_0 t_m = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Poznámka

Vyřešené rovnice ve zde uvedených příkladech nelze přebírat k řešení jiného zadaného příkladu. Výchozími rovnice zadaného příkladu týkajícího se vrhu tělesa jsou vždy rovnice (51) až (53) nebo jejich modifikace.

Kontrolní otázky

1. *Jak se těleso při šikmém vrhu pohybuje ve vodorovném směru?*
2. *Jak se těleso při šikmém vrhu pohybuje ve svislém směru?*
3. *Jaké pohyby koná těleso při vrhu svisle vzhůru?*
4. *Jak se těleso při vodorovném vrhu pohybuje ve vodorovném směru?*
5. *Jak se těleso při vodorovném vrhu pohybuje ve svislém směru?*

7 Inerciální a neinerciální vztažné soustavy

Vztažné soustavy se ve fyzice dělí na **inerciální** a **neinerciální**.

7.1 Inerciální vztažná soustava

Za **inerciální vztažnou soustavu** budeme považovat takovou, která se vzhledem ke stálici (Slunci) buď nepohybuje ($v = 0$), nebo se všechny její pevné body pohybují rovnoměrně přímočaře ($\vec{v} = konst.$). Při takovém pohybu žádný pevný bod v této soustavě nebude zakřivovat svoji trajektorii. Platí, že každá další vztažná soustava, je-li vzhledem k inerciální soustavě v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, je rovněž inerciální. Jako příklad můžeme uvést například stěny vagonu, který se pohybuje po přímé trati stálou rychlostí. **V inerciálních vztažných soustavách platí 1. Newtonův pohybový zákon - zákon setrvačnosti. Viz. Modul 2.**

7.2 Neinerciální vztažná soustava

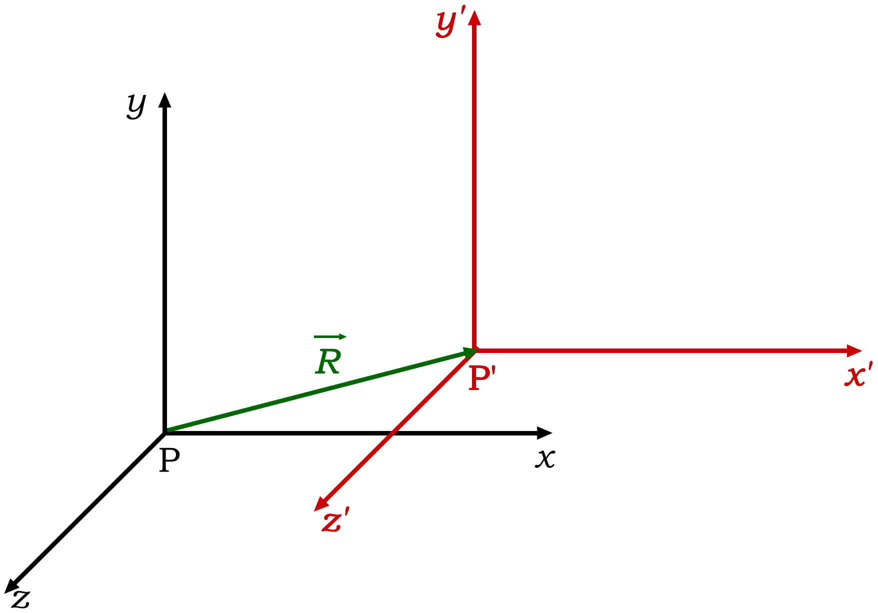
Všechny **ostatní vztažné soustavy jsou neinerciální**. **V neinerciálních vztažných soustavách neplatí 1. Newtonův pohybový zákon** ani 3. Newtonův pohybový zákon, tzn. že těleso, ačkoliv na ně nepůsobí žádná síla nebo výslednice sil je nulová, mění svůj pohybový stav (rychlost), tzn. pohybuje se s nenulovým zrychlením.

Modelu inerciální vztažné soustavy s dobrou přesností vyhovuje **Galileova vztažná soustava**, jejíž počátek leží v hmotném středu sluneční soustavy a osy mají vzhledem ke stálicím stálý směr. Vztažná soustava spojená se Zemí (**laboratorní vztažná soustava**) je neinerciální, protože se vzhledem ke Galileově vztažné soustava pohybuje po zakřivené trajektorii a současně se otáčí. Při běžných dějích však nejsou projevy její neinerciálnosti příliš významné, a proto ji v prvním přiblížení obvykle považujeme za soustavu inerciální.

7.3 Posouvající se neinerciální soustava

Je to soustava, která se vzhledem k inerciální pohybuje **přímočaře nerovnoměrně**. Zrychlení soustavy a všech bodů na osách je stejné a nenulové. Za reprezentující bod budeme považovat počátek takové neinerciální vztažné soustavy. Zrychlení počátku označíme $\vec{a}_u = \frac{d\vec{R}}{dt}$ a nazveme **unášivé zrychlení**. Pak platí, že v takto definované neinerciální soustavě vzniká **setrvačná zdánlivá síla**

$$\vec{F}_s = -m\vec{a}_u, \tag{54}$$

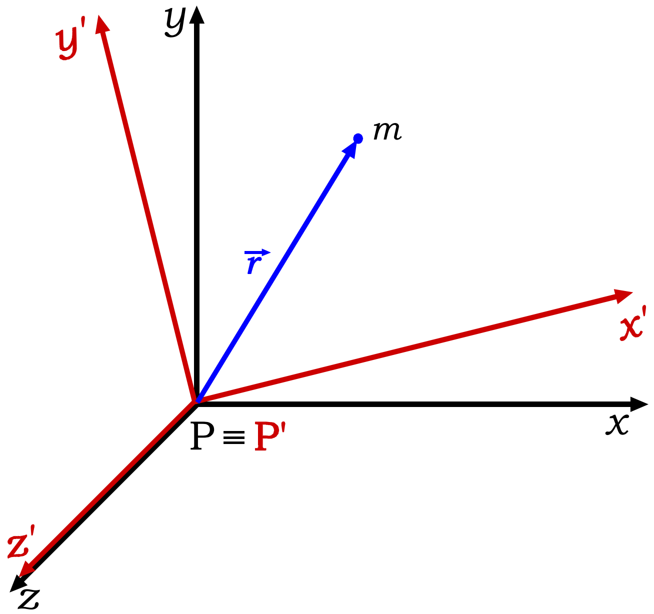


obr. 15 Neinerciální soustava (červená) posouvající se vzhledem k inerciální soustavě (černá).

Kde m je hmotnost tělesa sledovaného v neinerciální soustavě. **Pokud chceme řešit pohybovou úlohu v neinerciální soustavě, musíme ke všem skutečným silám připočítat síly zdánlivé**. Často bývá takový postup výhodný a řešená úloha se zjednoduší.

7.4 Rotující neinerciální soustava

Je to soustava, která vzhledem k inerciální **rotuje**. Je výhodné zvolit si osu rotace za osu z obou soustav, inerciální i neinerciální, jak ukazuje obr. 16. V neinerciální soustavě takového typu pak vzniknou tři zdánlivé síly.



obr. 16 Neinerciální soustava (červená) rotující vzhledem k inerciální soustavě (černá) kolem společné osy z.

7.4.1 Síla Eulerova

Eulerova síla je zdánlivá síla působící v rotující neinerciální soustavě, která rotuje s proměnnou úhlovou rychlostí, $\varepsilon \neq 0$. Je pojmenována po švýcarském matematikovi a fyzikovi Leonhardu Eulerovi. Její vektorový výpočet je

$$\vec{F}_E = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \tag{55}$$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa o hmotnosti m, nacházejícího se v rotující neinerciální soustavě, která rotuje s úhlovým zrychlením $\vec{\varepsilon}$. Znak $\times$ označuje vektorový součin. Jak ukazuje obr. 16, počátek polohového vektoru $\vec{r}$ leží na ose rotace.

7.4.2 Síla Coriolisova

Coriolisova síla je zdánlivá síla působící na tělesa pohybující se v rotující neinerciální vztažné soustavě tak, že se mění jejich vzdálenost od osy otáčení. Coriolisova síla má směr kolmý ke spojnici těleso - osa otáčení a způsobuje stáčení trajektorie tělesa proti směru otáčení soustavy. Je pojmenována po Gustavu Gaspardu de Coriolisovi. Její vektorový výpočet je dán rovnicí

$$\vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}', \tag{56}$$

kde m je hmotnost tělesa, $\vec{v}$ je rychlost tělesa v neinerciální vztažné soustavě, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy a $\times$ označuje vektorový součin. Velikost Coriolisovy síly spočteme jako

$$\vec{F}_C = -2m\omega v' \sin\alpha, \tag{57}$$

kdeαje úhel sevřený mezi vektorem úhlové rychlosti a vektorem rychlosti.

7.4.3 Síla odstředivá

Odstředivá síla (značená $\vec{F}_O$) je jedna ze zdánlivých sil, které působí na těleso v otáčející se neinerciální vztažné soustavě. V inerciálních vztažných soustavách odstředivé síly nepůsobí. Důsledkem odstředivé síly je **odstředivé zrychlení**. Odstředivá síla je dána rovnicí

$$\vec{F}_O = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}, \tag{58}$$

kde m je hmotnost tělesa, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčející se neinerciální soustavy a $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa, jehož počátek leží na ose rotace. Znak $\times$ označuje vektorový součin. Velikost odstředivé síly je

$$F_O = m\omega^2 r. \tag{59}$$

7.4.4 Země jako neinerciální vztažná soustava

Rotující neinerciální vztažnou soustavou je i Země, neboť Země rotuje kolem své osy. Na tělesa pohybující se vzhledem k Zemi působí **Coriolisova síla**, to lze názorně ukázat pomocí Foucaultova kyvadla.

Na všechna tělesa vztažená k Zemi, která neleží na zemské ose, působí **odstředivá síla**.

Na Zemi **nepůsobí Eulerova síla**, protože Země rotuje konstantní úhlovou rychlostí ω, $\varepsilon = 0$.

Kontrolní otázky

1. *Co je to inerciální vztažná soustava?*
2. *Platí v inerciální soustavě 1. Newtonův zákon?*
3. *Platí v neinerciální soustavě 1. Newtonův zákon?*
4. *Jak se pohybuje neinerciální soustava vzhledem k inerciální soustavě?*
5. *Co je to unášivé zrychlení?*
6. *Jak řešíme pohybovou úlohu v neinerciální soustavě?*
7. *Co je to rotující neinerciální soustava?*
8. *Co je to Eulerova síla?*
9. *Co je to Coriolisova síla?*
10. *Co je to odstředivá síla?*

8 Porovnání rovnic translačních a rotačních

translační pohyb tělesa nebo pohyb hmotného bodu		rotační pohyb tělesa	
komentář	rovnice	komentář	rovnice
rychlost	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{d\,t}$	úhlová rychlost	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{d\,t}$
zrychlení	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	úhlové zrychlení	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\phi}}{dt^2}$
polohový vektor	$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	úhlová dráha	$\vec{\phi} = \vec{\phi}_0 + \vec{\omega}_0 t + \frac{1}{2}\vec{\varepsilon}t^2$
rychlost	$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	úhlová rychlost	$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon}t$
1. impulzová věta	$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{d\,t}$	2. impulzová věta	$\vec{M} = \frac{d\vec{b}}{d\,t}$
hmotnost	m	moment setrvačnosti	$J = \int_V \rho r^2 \, d\,V$
hybnost	$\vec{p} = m\vec{v}$	moment hybnosti	$\vec{b} = J\vec{\omega}$
práce	$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}.d\vec{r}$	práce	$W = \int_{\vec{\phi}_1}^{\vec{\phi}_2} \vec{M}.d\vec{\phi}$
pohybová rovnice	$\vec{F} = m\vec{a}$	pohybová rovnice	$\vec{M} = J\vec{\varepsilon}$
výkon	$P = \vec{F}.\vec{v}$	výkon	$P = \vec{M}.\vec{\omega}$
kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}mv^2$	kinetická energie	$E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

9 Závěr - shrnutí

Modul je zaměřen na definici veličin a popis základních pojmů kinematiky. Důležitým kinematickým pojmem je hmotný bod. Jedná se o idealizaci, kdy libovolné těleso při popisu jeho pohybu nahrazujeme bodem s danou hmotností. Tento bod obvykle umísťujeme do těžiště tělesa. Poloha tělesa je údaj, vyjadřující umístění tělesa vzhledem ke vztažné soustavě. Kinematika bodu zohledňuje ujetou vzdálenost, rychlost, zrychlení a posunutí. Dále dráhu, tedy délku trajektorie popsanou bodem ve stanoveném časovém intervalu.

10 Studijní prameny

10.1 Seznam použité literatury

[1] Koktavý, B. *Mechanika hmotného bodu.* CERM Brno, 2006.

[2] Slavík, J a kol. *Základy fyziky I.* SAV Praha, 1962.

[3] Horák, Z., Krupka, F., Šindelář, V. *Technická fyzika.* SNTL Praha, 1981.

[4] Kusák, I., Luňák, M. *Přehled látky a příklady pro studium na Fakultě stavební VUT v Brně.* ECON Brno, 2016.

[5] Chobola, Z., Juránková, V. *Mechanika deformovatelných těles.* CERM Brno, 2000.

10.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[6] Halliday, D., Resnik, R., Walker, J. *Fyzika*. VUTIUM Brno, 2000.

[7] Feynman, R.P. *Faynmanove přednášky z fyziky.* ALFA Bratislava, 1989.

10.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

[8] https://reseneulohy.cz/cs