

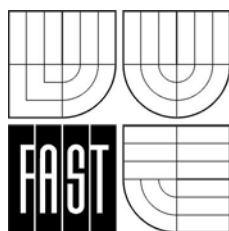
PROF. ING. BOHUMIL KOKTAVÝ, CSC.,

DOC. ING. PAVEL KOKTAVÝ, CSC., PH.D.

GB02 – FYZIKA II

MODUL M01

ELEKTRINA A MAGNETISMUS



OBSAH

1 Úvod	9
1.1 Cíle.....	9
1.2 Požadované znalosti.....	9
1.3 Doba potřebná ke studiu.....	9
1.4 Klíčová slova.....	9
1.5 Přehled použitých symbolů.....	9
2 Elektrostatické pole	13
2.1 Elektrostatické silové působení mezi tělesy s elektrickým nábojem ..	14
2.1.1 Elektrostatické silové působení mezi bodovými náboji.....	14
2.1.2 Vektorový popis elektrostatického pole.....	16
2.1.3 Elektrický dipól.....	19
2.1.4 Gaussova věta elektrostatiky.....	20
2.1.5 Použití Gaussovy věty pro výpočet intenzity elektrostatického pole	22
2.2 Energie elektrostatického pole	24
2.2.1 Práce elektrostatické síly.....	24
2.2.2 Potenciální energie bodového náboje v elektrostatickém poli	25
2.2.3 Potenciál elektrostatického pole	26
2.3 Vodič v elektrostatickém poli	28
2.3.1 Intenzita elektrostatického pole ve vodiči.....	29
2.3.2 Kapacita vodiče.....	29
2.3.3 Kapacita kondenzátoru.....	30
2.3.4 Řazení kondenzátorů.....	31
2.3.5 Praktické provedení kondenzátorů.....	33
2.4 Dielektrikum v elektrostatickém poli.....	34
2.4.1 Elektrické vlastnosti dielektrik	34
2.4.2 Polarizace dielektrika.....	35
2.4.2.1 Atomová (elektronová) polarizace.....	35
2.4.2.2 Iontová polarizace.....	35
2.4.2.3 Orientační polarizace	35
2.4.3 Rovinná dielektrická deska v homogenním elektrickém poli	36
2.5 Autotest.....	39
2.6 Klíč k autotestu 2.5	40
2.7 Korespondenční úkoly	40
2.8 Závěr	41
3 Ustálený elektrický proud	45
3.1 Elektrický proud.....	45
3.2 Princip kontinuity proudu	47
3.3 Ohmův zákon	49
3.4 Elektrický odpor vodičů.....	50

3.4.1	Řazení odporů	51
3.4.2	Závislost odporu vodičů na teplotě	53
3.5	Práce a výkon elektrického proudu	54
3.6	Elektrický zdroj	56
3.6.1	Elektromotorické napětí	56
3.6.2	Přenos maximálního výkonu	58
3.7	Řešení obvodů s časově nezávislými elektrickými proudy	60
3.7.1	Elektrický obvod	60
3.7.2	Metoda postupného zjednodušování obvodu	60
3.7.3	Kirchhoffovy zákony	61
3.7.4	Řešení elektrických obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů	62
3.8	Wheatstoneův most	64
3.9	Rozdělení látek podle elektrické vodivosti	66
3.10	Vedení elektrického proudu ve vakuu	66
3.11	Elektrická vodivost pevných látek	67
3.12	Vodivost polovodičů	68
3.12.1	Vlastní (intrinsická) vodivost	68
3.12.2	Nevlastní vodivost polovodičů	69
3.12.3	Přechod PN	70
3.12.4	Polovodičové diody	71
3.13	Vedení elektrického proudu v kapalinách	73
3.13.1	Disociace molekul	73
3.13.2	Elektrolytická vodivost	74
3.13.3	Faradayovy zákony	74
3.13.4	Elektrodové potenciály	75
3.13.5	Polarizace elektrod	76
3.14	Vedení elektrického proudu v plynech	77
3.14.1	Ionizace plynu	77
3.14.2	Nesamostatný výboj	77
3.14.3	Samostatný výboj v plynu	78
3.15	Autotest	79
3.16	Klíč k autotestu 3.15	79
3.17	Korespondenční úkoly	80
3.18	Závěr	81
4	Magnetické pole	85
4.1	Magnetické silové působení	85
4.2	Experimentální studium magnetického pole	85
4.3	Síla působící v magnetickém poli na vodič	88
4.4	Síla působící na pohybující se náboj v magnetickém poli	90
4.5	Určení vektoru \vec{B} magnetického pole vodiče	91
4.6	Magnetické silové působení mezi vodiči	93
4.7	Elektromagnetická indukce	94
4.7.1	Magnetický indukční tok	94

4.7.2	Faradayův zákon elektromagnetické indukce.....	95
4.7.3	Vznik harmonického elektromotorického napětí.....	97
4.7.4	Vlastní indukčnost vodiče.....	98
4.7.5	Vzájemná indukčnost.....	99
4.8	Magnetické vlastnosti látek.....	100
4.9	Autotest.....	102
4.10	Klíč k autotestu 4.9.....	103
4.11	Korespondenční úkoly.....	103
4.12	Závěr.....	104
5	Obvody s časově proměnnými proudy	107
5.1	Elektrický obvod.....	107
5.2	Odpor, cívka a kondenzátor jako prvky elektrického obvodu.....	107
5.2.1	Odpor.....	107
5.2.2	Cívka.....	108
5.2.3	Kondenzátor.....	110
5.3	Přechodové jevy.....	111
5.4	Autotest.....	113
5.5	Klíč k autotestu 5.4.....	113
5.6	Korespondenční úkoly.....	114
5.7	Závěr.....	114
6	Obvody se střídavými elektrickými proudy.....	117
6.1	Střídavé elektrické veličiny a jejich charakteristiky.....	117
6.1.1	Střídavý elektrický proud a napětí.....	117
6.1.2	Střední hodnota střídavého proudu.....	118
6.1.3	Efektivní hodnota střídavého proudu.....	118
6.2	Odpor, cívka a kondenzátor v obvodu střídavého proudu.....	120
6.2.1	Odpor v obvodu střídavého proudu.....	120
6.2.2	Cívka v obvodu střídavého proudu.....	121
6.2.3	Kondenzátor v obvodu střídavého proudu.....	122
6.3	Sériový obvod <i>RLC</i> se střídavým proudem.....	123
6.4	Symbolicko-komplexní metoda řešení obvodů se střídavými proudy.....	127
6.4.1	Fázor harmonického proudu a napětí.....	127
6.4.2	Určení impedance odporu, cívky a kondenzátoru.....	129
6.5	Výkon střídavého proudu.....	130
6.6	Trojfázová proudová soustava.....	133
6.6.1	Vznik trojfázového elektromotorického napětí.....	133
6.6.2	Zapojení do hvězdy.....	134
6.6.3	Zapojení do trojúhelníku.....	136
6.6.4	Výkon trojfázové soustavy.....	137
6.7	Autotest.....	139
6.8	Klíč k autotestu 6.7.....	139
6.9	Korespondenční úkoly.....	139
6.10	Závěr.....	140

7	Měření neelektrických veličin elektrickými metodami	143
7.1	Měřicí soustava.....	143
7.2	Rozdělení snímačů neelektrických veličin	144
7.3	Odporové snímače	145
7.3.1	Odporové snímače kontaktní	145
7.3.2	Odporové snímače využívající stykového odporu	146
7.3.3	Odporové snímače polohy (měřicí potenciometry).....	146
7.3.4	Odporové snímače deformace (tenzometry)	147
7.3.5	Odporové snímače teploty.....	149
7.3.6	Odporové snímače rychlosti prostředí (anemometry).....	151
7.3.7	Odporové snímače světelného záření.....	151
7.3.8	Odporové snímače magnetických veličin	153
7.3.9	Odporové snímače vlhkosti.....	153
7.4	Kapacitní snímače	154
7.4.1	Mezerový kapacitní snímač.....	155
7.4.2	Překrývací kapacitní snímač.....	155
7.4.3	Kapacitní snímač s proměnným dielektrikem.....	155
7.4.4	Použití kapacitních snímačů.....	156
7.5	Indukčnostní snímače	156
7.5.1	Indukčnostní snímač s malou vzduchovou mezerou.....	157
7.5.2	Indukčnostní snímač s otevřeným magnetickým obvodem.....	157
7.5.3	Indukčnostní snímač s potlačeným polem	157
7.5.4	Indukčnostní snímač transformátorový	157
7.5.5	Použití indukčnostních snímačů.....	157
7.6	Magnetické snímače	158
7.7	Indukční snímače.....	158
7.7.1	Snímače elektromagnetické.....	158
7.7.2	Elektrodynamické snímače	159
7.8	Piezoelektrické snímače	160
7.8.1	Snímače tlakové síly.....	162
7.8.2	Snímače zrychlení	162
7.9	Termoelektrické snímače.....	163
7.10	Autotest.....	164
7.11	Klíč k autotestu 7.10.....	165
7.12	Korespondenční úkoly.....	165
7.13	Závěr.....	165
8	Elektromagnetické vlnění.....	167
8.1	Maxwellovy rovnice.....	167
8.1.1	První Maxwellova rovnice	167
8.1.2	Druhá Maxwellova rovnice	168
8.1.3	Třetí Maxwellova rovnice	169
8.1.4	Čtvrtá Maxwellova rovnice	170
8.1.5	Vedlejší Maxwellovy rovnice	170
8.2	Vlnová rovnice pro intenzitu elektrického a magnetického pole	171

8.3	Základní vlastnosti elektromagnetického vlnění.....	173
8.4	Rovinné postupné elektromagnetické vlnění	174
8.4.1	Vlnové rovnice pro rovinné vlnění	174
8.4.2	Maxwellovy rovnice pro rovinné vlny.....	175
8.4.3	Závěry vyplývající z Maxwellových rovnic	175
8.5	Rovinné postupné elektromagnetické vlnění s harmonickým časovým průběhem	178
8.6	Energie přenášená elektromagnetickým vlněním	180
8.6.1	Objemová hustota energie elektrického pole.....	180
8.6.2	Objemová hustota energie magnetického pole	181
8.6.3	Poyntingův vektor	182
8.6.4	Energie harmonické vlny	183
8.7	Stojaté elektromagnetické vlnění	184
8.7.1	Vzájemná plocha vektorů \vec{E} a \vec{H}	185
8.7.2	Průběh stojatého vlnění dvou harmonických lineárně polarizovaných vln.....	185
8.7.3	Harmonické stojaté vlnění při kolmém odrazu od vodivé roviny	187
8.8	Modulace elektromagnetické vlny	187
8.8.1	Amplitudová modulace.....	188
8.8.2	Kmitočtová modulace	189
8.8.3	Fázová modulace	190
8.8.4	Impulsová modulace	190
8.9	Vyzařování a příjem elektromagnetického vlnění	191
8.9.1	Elektromagnetické pole krátké antény.....	192
8.9.2	Směrová vyzařovací charakteristika	193
8.9.3	Výkon vyzařený krátkou anténou	194
8.9.4	Dlouhá anténa	196
8.9.5	Přijímací antény	197
8.10	Základní typy antén.....	198
8.11	Šíření elektromagnetického vlnění.....	203
8.11.1	Vedení elektromagnetické vlny	204
8.11.1.1	Dvou vodičové vedení	204
8.11.1.2	Souosý (koaxiální) kabel.....	205
8.11.1.3	Vlnovody.....	205
8.11.2	Šíření elektromagnetického vlnění v okolí Země	206
8.11.2.1	Vliv povrchu Země na šíření elektromagnetického vlnění	206
8.11.2.2	Vliv složení atmosféry na šíření elektromagnetického vlnění.....	207
8.12	Autotest	208
8.13	Klíč k autotestu 8.12	209
8.14	Korespondenční úkoly	210
8.15	Závěr	210

9 Seznam použité literatury 213

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem látky uvedené v tomto modulu je prohloubení znalostí v oblasti elektromagnetického pole a jejich aplikací při výuce geodezie a v měřicí technice v daném oboru.



1.2 Požadované znalosti

Předpokládají se znalosti látky fyziky z gymnázia, a to jak rozsahem pojmů, tak i řazením jednotlivých částí. Z matematiky se předpokládá zvládnutí základů vyšší matematiky, zejména diferenciálního a integrálního počtu.



1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul je rozdělen do 8 kapitol. Průměrná celková doba k nastudování představuje asi 90 hodin.



1.4 Klíčová slova

Elektrický náboj, elektrické pole, intenzita, potenciál, napětí, kapacita, polarizace, dielektrikum, elektrický proud, odpor, elektrický výkon, elektrický obvod, vodivost látek, magnetické pole, elektromagnetická indukce, střídavé proudy, střídavé obvody, odporové snímače, kapacitní snímače, indukčnostní snímače, indukční snímače, piezoelektrické snímače, termoelektrické snímače, elektromagnetické pole, Maxwellovy rovnice, vlnová rovnice, fázová rychlost, Poyntingův vektor, stojaté vlnění, polarizovaná vlna, modulace signálu, antény.



1.5 Přehled použitých symbolů

α	teplotní součinitel odporu	μ	permeabilita prostředí
α	plošná tepelná přestupnost	μ_n	pohyblivost volných elektronů
γ	měrná elektrická vodivost	μ_p	pohyblivost volných děr
ε	permitivita prostředí	μ_0	permeabilita vakua, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
ε_0	permitivita vakua, $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$	μ_r	relativní permeabilita
ε_r	relativní permitivita	μ_p	Poissonovo číslo
ϑ	teplota vyjádřená ve °C	ρ	měrný elektrický odpor
κ	elektrická susceptibilita	ρ	objemová hustota náboje
μ	pohyblivost nosičů náboje		



σ	plošná hustota náboje	I_0	nasycený proud PN přechodu
φ	počáteční fáze, fázový posuv	I_f	fázový proud
Ψ	tok vektoru elektrické indukce	I_m	amplituda střídavého proudu
Φ	magnetický indukční tok	I_s	střední hodnota střídavého proudu
ω	kruhová (úhlová) frekvence	I_s	sdružený proud
\vec{b}	mechanický moment hybnosti	\vec{j}	jednotkový vektor ve směru osy y
\vec{B}	magnetická indukce	\vec{J}	proudová hustota
C	kapacita	k	Boltzmannova konstanta, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
\vec{D}	elektrická indukce	\vec{k}	jednotkový vektor ve směru osy z
e	elementární náboj, $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	K	součinitel deformační citlivosti
E	energie	K_f	měrná citlivost fotoodporu
E_k	kinetická energie	L	indukčnost vodiče
E_p	potenciální energie	m	hmotnost
E_f	energie fotonu	m_e	hmotnost elektronu, $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
ΔE_g	šířka zakázaného pásu energie	\vec{m}	magnetický moment
\vec{E}	intenzita elektrického pole	\vec{m}_s	spinový magnetický moment
\vec{E}_i	intenzita elektrického pole v přechodu PN	M	vzájemná indukčnost vodičů
F	Faradayova konstanta, $F = 96493 \text{ C.mol}^{-1}$	M	molová hmotnost
\vec{F}	síla	n	koncentrace nosičů náboje
\vec{F}_i	rozdělující síla	n_i	intrinsická koncentrace
\vec{g}	tíhové zrychlení, $g_n = 9,80665 \text{ m.s}^{-2}$	\vec{n}^0	jednotkový vektor normálový
G	elektrická vodivost	N	elektrický silový tok
h	Planckova konstanta, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$	N_A	koncentrace akceptorů
\vec{H}	intenzita magnetického pole	N_D	koncentrace donorů
i, I	elektrický proud	p	koncentrace děr
\vec{i}	jednotkový vektor ve směru osy x		
I	efektivní hodnota elektrického proudu		

p, P	výkon elektrického proudu	U	efektivní hodnota střídavého napětí
\bar{p}	dipólový moment	U_d	difuzní napětí
P_s	zdánlivý výkon	u_e, U_e	elektromotorické napětí
P_q	jalový výkon	U_f	fázové napětí
q, Q	elektrický náboj	U_m	amplituda střídavého napětí
\vec{r}	polohový vektor	U_s	sdružené napětí
R	elektrický odpor	U_t	termoelektrické napětí
R_d	dynamický odpor	V	potenciál
R_i	vnitřní odpor zdroje	W	práce
s	délka dráhy	W_v	výstupní práce elektronů z kovu
S	plocha	X_C	kapacitní reaktance
\vec{S}	Poyntingův vektor	X_L	induktivní reaktance
T	termodynamická teplota	z	mocenství prvku
u, U	elektrické napětí	Z	impedance
u_C	napětí na kondenzátoru		
u_L	napětí na cívce		
u_R	napětí na odporu		

2 Elektrostatické pole

Podle současného stavu fyzikálních poznatků existují mezi elementárními částicemi čtyři druhy interakcí: gravitační, elektromagnetické, slabé a silné. Převládající postavení v daném fyzikálním ději má jen jedna z nich. Například při volném pádu těles hraje nejdůležitější roli gravitační silové působení. Slabé a silné interakce převažují při srážkách a přeměnách elementárních částic a uvnitř jader atomů.



Elektromagnetická interakce je základem všech elektrických a magnetických jevů. Uplatňuje se při vzájemném silovém působení elektricky nabitých těles nebo vodičů, kterými protéká elektrický proud, při stavbě atomového obalu, při srážkách atomů, při vazbě atomů v molekulách a krystalové mřížce, při mechanickém silovém působení těles při dotyku, při biofyzikálních pochodech a dalších jevech.

Elektromagnetickou interakcí se vyznačují všechny známé elementární částice a antičástice s výjimkou neutrina. Některé částice mají elektrický náboj a magnetický moment, jiné jen elektrický náboj nebo jen magnetický moment.

Elektrický náboj chápeme jako fyzikální veličinu, která je mírou schopnosti elementárních částic působit na sebe vzájemně elektrickými a magnetickými silami. Elektrický náboj mají např. protony, elektrony, pozitrony, některé mezony a hyperony. Jednotkou elektrického náboje je coulomb (C), $C = A \cdot s$. Nejmenším elektrickým nábojem je elementární náboj $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$. Náboj protonu je e , náboj elektronu je $-e$. Jestliže je v atomu počet elektronů roven počtu protonů, jeví se atom z velké vzdálenosti, vzhledem k jeho průměru, jako elektricky neutrální. Při odtržení elektronu nebo zachycení elektronu se atom stává kladně nebo záporně nabitou částicí. Makroskopická tělesa se elektricky nabíjejí tak, že se uvnitř nebo na povrchu tělesa vytvoří nadbytek kladně nebo záporně nabitých částic. Pro elektrické náboje platí následující zákony:

- a) **Zákon zachování náboje** - celkové množství náboje v osamoceném systému se rovná algebraickému součtu všech nábojů v systému a nemění se.
- b) **Zákon invariantnosti náboje** - náboj je při všech transformacích vztažné soustavy invariantní (nemění se).
- c) **Coulombův zákon** - dva bodové náboje na sebe působí ve své klidové soustavě elektrostatickou silou, která je přímo úměrná součinu velikosti obou nábojů a nepřímo úměrná čtverci jejich vzdálenosti.
- d) **Zákon superposice** - při současném působení několika nábojů je účinek každého týž, jako kdyby náboj působil sám.
- e) **Zákon kvantování náboje** - všechny náboje jsou násobkem elementárního náboje e , resp. $-e$.

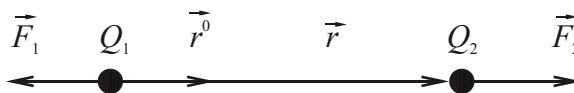
V okolí elektricky nabitých částic existuje elektromagnetické pole, pomocí něhož se vzájemné silové působení mezi těmito částicemi realizuje. Jsou-li tyto částice v klidu vzhledem k pozorovací soustavě, nazýváme silové působení mezi jejich náboji elektrostatickým silovým působením a příslušné pole **elektrostatickým polem**. Při pohybu náboje vzhledem k pozorovací soustavě vzniká **elektrodynamické pole**, které má obecně dvě složky: **elektrické pole** a **magnetické pole**.

Elektromagnetické pole je plně popsáno, jsou-li v každém bodě pole zadány vektory **intenzity elektrického pole** \vec{E} , **elektrické indukce** \vec{D} , **intenzity magnetického pole** \vec{H} a **magnetické indukce** \vec{B} . Jakékoliv změny těchto vektorů se šíří v elektromagnetickém poli ve vakuu rychlostí světla jako elektromagnetické vlnění.

2.1 Elektrostatické silové působení mezi tělesy s elektrickým nábojem

Elektrostatické silové působení mezi elektricky nabitými tělesy můžeme sledovat jednak v případě soustavy bodových nábojů, jednak v případě elektricky nabitých těles libovolného tvaru. Omezíme se pouze na první případ.

2.1.1 Elektrostatické silové působení mezi bodovými náboji



Obr. 2.1: Silové působení mezi dvěma bodovými náboji

Bodovým nábojem rozumíme náboj na tělese, jehož rozměry jsou malé vzhledem ke vzdálenostem, které se v dané úloze vyskytují. Silové působení mezi bodovými náboji (silovým působením mezi bodovými náboji budeme dále nazývat silové působení mezi tělesy s bodovými elektrickými náboji) po kvantitativní stránce vyšetřoval jako první francouzský fyzik CH. A. Coulomb (1736-1806). Došel k závěru, že dva bodové náboje (obr. 2.1) Q_1 a Q_2 na sebe působí silou, která je přímo úměrná součinu velikostí obou nábojů a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdáleností (**Coulombův zákon**),

$$F_1 = F_2 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (2.1)$$

$$\vec{F}_2 = -\vec{F}_1 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{r}^0 = k \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r}, \quad (2.2)$$

kde \vec{r}^0 je jednotkový vektor, $\vec{r}^0 = \frac{\vec{r}}{r}$. Součinitel úměrnosti k závisí na volbě

jednotek a na vlastnostech prostředí, ve kterém se náboje nacházejí. V zákonné měrové soustavě jednotek se používá pro vakuum ve tvaru

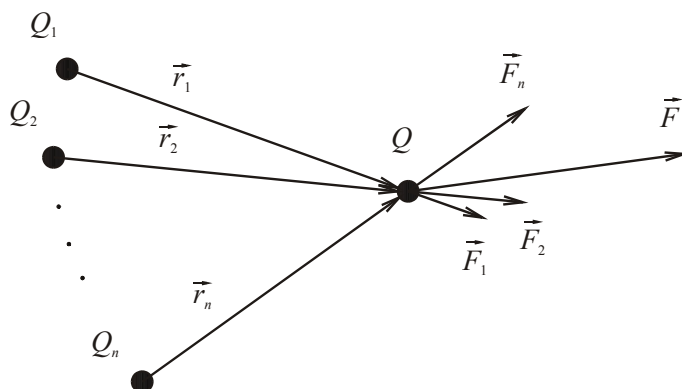
$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad (2.3)$$

kde ϵ_0 se nazývá **permitivita vakua**, $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$.

Dále budeme sledovat elektrické pole ve vakuu, resp. ve vzduchu. V soustavě n bodových nábojů (obr. 2.2) působí na náboj Q podle principu superpozice síla

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_k + \dots + \vec{F}_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_k}{r_k^3} \vec{r}_k, \quad (2.4)$$

kde \vec{F}_k je síla, kterou působí náboj Q_k na náboj Q , $k = 1, 2, \dots, n$.



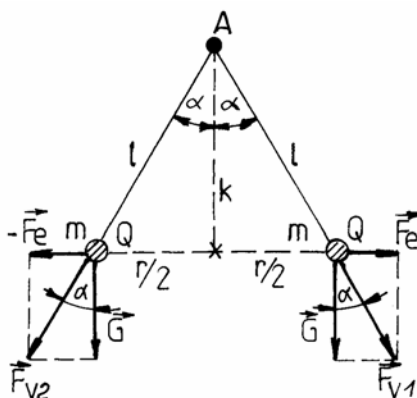
Obr. 2.2: Silové působení v soustavě bodových nábojů

Vzájemné silové působení mezi dvěma náboji nezávisí na působení jiných nábojů, pokud se tímto působením nezmění poloha nebo rozložení obou nábojů. Výsledná síla, kterou působí několik bodových nábojů na daný náboj Q je tedy rovna vektorovému součtu všech dílčích sil, jimiž by na něj působily tyto náboje jednotlivě.

Coulombův zákon má široký rozsah platnosti. Coulombovské silové působení patří mezi nejdůležitější působení mezi jádrem atomu a elektrony. Přestává platit až při vzdálenostech $r = 10^{-15}$ m, kde r je přibližně poloměr atomového jádra.

Příklad 2.1

Dvě malé kuličky o hmotnostech $m = 0,01$ g visí na hedvábných vláknách o délkách $l = 10$ cm. Obě vlákna jsou zavěšena ve společném bodě A (obr. 2.3). Přeneseme-li na obě kuličky stejné náboje Q , svírají obě vlákna s kolmicí k úhel $\alpha = 20^\circ$. Určete velikosti nábojů.



Obr. 2.3: Silové působení mezi dvěma elektrickými náboji

Řešení:

Každá kulička o hmotnosti m a s nábojem Q působí na vlákno tíhovou silou \vec{G} a silou \vec{F}_e , resp. $-\vec{F}_e$, jež je výsledkem elektrostatického silového působení mezi náboji. Výslednice těchto sil \vec{F}_{v1} a \vec{F}_{v2} musí ležet v rovnovážném

stavu v ose příslušného vlákna. Musí tedy platit: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_e}{G}$, kde

$$F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{a} \quad G = mg. \quad \text{Potom} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2 mg} = \frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 mgl^2 \sin^2 \alpha},$$

kam jsme dosadili $r = 2l \sin \alpha$.

$$\text{Odtud vypočteme } Q = 4l \sin \alpha \sqrt{\pi\epsilon_0 mg \operatorname{tg} \alpha} = 4,31 \text{ nC}.$$

Úkol 2.1

V Bohrově modelu atomu vodíku obíhá elektron po kruhové dráze kolem jádra, které je tvořeno jediným protonem. Najděte frekvenci oběhů elektronu, je-li poloměr kružnice, po které elektron obíhá, $r = 0,529 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

$$[6,57 \cdot 10^{15} \text{ Hz}].$$

2.1.2 Vektorový popis elektrostatického pole

Schopnost přenášet silové účinky mezi elektricky nabitými tělesy pokládáme za fyzikální vlastnost **elektrického pole** vytvořeného v prostoru obklopujícím náboje. Jsou-li náboje v klidu vzhledem k pozorovací soustavě, nazýváme elektrické pole **elektrostatickým polem**.

Elektrostatické pole charakterizujeme v libovolném bodě **intenzitou elektrostatického pole** \vec{E} , která je číselně rovna síle, která by v daném bodě pole působila na jednotkový kladný bodový náboj.

Intenzitu \vec{E} definujeme tedy vztahem

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q'}, \quad (2.5)$$

kde \vec{F} je síla, která by v daném bodě pole působila na bodový náboj Q' . Jednotkou intenzity elektrostatického pole je

$$[E] = \text{N} \cdot \text{C}^{-1} = \text{V} \cdot \text{m}^{-1}, \quad (2.6)$$

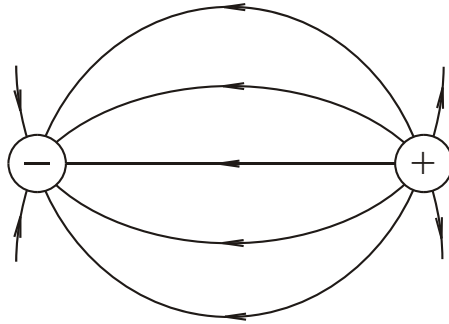
kde volt (V) je jednotkou potenciálu elektrostatického pole.

Na náboj Q v daném bodě elektrostatického pole o intenzitě \vec{E} působí síla \vec{F} ,

$$\vec{F} = Q\vec{E}. \quad (2.7)$$

Elektrostatické pole můžeme graficky znázornit **silovými čarami** (siločarami). Jsou to křivky, jejichž tečny mají v každém bodě směr intenzity elektrostatického pole. Siločarám přisuzujeme směr souhlasný se směrem intenzity pole. Siločáry vystupují z kladného náboje a vstupují do záporného náboje (obr. 2.4).

Jsou-li siločáry elektrostatického pole navzájem rovnoběžné přímky a intenzita má ve všech bodech pole stejnou velikost, nazývá se pole homogenním.

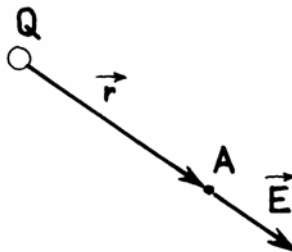


Obr. 2.4: Siločáry elektrostatického pole kladného a záporného bodového náboje

Intenzita elektrostatického pole bodového náboje Q v bodě A ve vzdálenosti r od náboje (obr. 2.5) má velikost

$$E = \frac{F}{Q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (2.8)$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}. \quad (2.9)$$



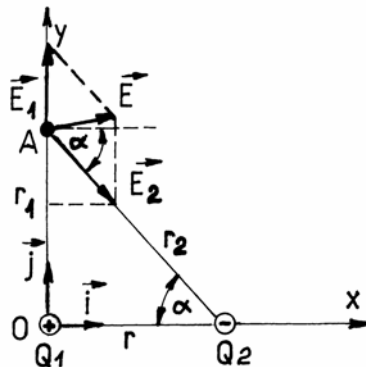
Obr. 2.5: Intenzita pole bodového náboje

Intenzita elektrostatického pole vytvořeného větším počtem nábojů se rovná podle principu superpozice vektorovému součtu intenzit elektrických polí $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ jednotlivých nábojů

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n. \quad (2.10)$$

Příklad 2.2

Náboj $Q_1 = 7 \mu\text{C}$ je umístěn v počátku souřadné soustavy a druhý náboj $Q_2 = -5 \mu\text{C}$ je umístěn v ose x pravouhlé souřadné soustavy Oxy ve vzdálenosti $r = 0,3 \text{ m}$ od počátku (obr. 2.6).



Obr. 2.6: K příkladu 2.2

- a) Najděte intenzitu výsledného elektrostatického pole v bodě A na ose y ve vzdálenosti $r_1 = 0,4 \text{ m}$ od počátku O .
- b) Jaká síla by působila na náboj $Q = 2 \text{ nC}$ umístěný v bodě A ?

Řešení:

a) Podle principu superpozice je intenzita výsledného elektrického pole $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, kde \vec{E}_1 je intenzita elektrického pole bodového náboje Q_1 v bodě A a \vec{E}_2 je intenzita elektrického pole bodového náboje Q_2 v bodě A ve vzdálenosti $r_2 = \sqrt{r_1^2 + r^2} = 0,5 \text{ m}$.

Platí:

$$E_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^2} = 3,93 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1},$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = 1,80 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1},$$

$$\vec{E}_1 = E_{1x}\vec{i} + E_{1y}\vec{j}, \text{ kde } E_{1x} = 0, \quad E_{1y} = E_1 = 3,93 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

$$\vec{E}_2 = E_{2x}\vec{i} + E_{2y}\vec{j}, \text{ kde } E_{2x} = E_2 \cos \alpha = E_2 \frac{r}{r_2} = 1,08 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1},$$

$$E_{2y} = -E_2 \sin \alpha = -E_2 \frac{r_1}{r_2} = -1,44 \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1}.$$

Potom

$$\vec{E} = (E_{1x} + E_{2x})\vec{i} + (E_{1y} + E_{2y})\vec{j} = (1,08\vec{i} + 2,49\vec{j}) \cdot 10^5 \text{ V}\cdot\text{m}^{-1},$$

$$\vec{E} = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 2,71 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

b) Výsledná síla, kterou působí oba náboje na náboj Q umístěný v bodě A je

$$\vec{F} = Q\vec{E} = (2,16\vec{i} + 4,98\vec{j}) \cdot 10^{-4} \text{ N}.$$

Úkol 2.2

V pravouhlém souřadnicovém systému se nachází dva bodové náboje. Náboj $Q_1 = 10^{-8} \text{ C}$ je umístěn v bodě $A_1[0,1;0;0] \text{ m}$, náboj $Q_2 = -10^{-8} \text{ C}$ v bodě $A_2[-0,1;0;0] \text{ m}$. Najděte velikost a směr intenzity elektrického pole těchto nábojů v bodě $A_3[0;0,1;0] \text{ m}$.



$$[-6355 \vec{i} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}].$$

Úkol 2.3

Elektron vletne počáteční rychlostí $v_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ kolmo na směr siločar do homogenního elektrického pole s intenzitou elektrického pole $E = 200 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. Oblast, ve které se vyskytuje elektrické pole, má šířku ve směru pohybu elektronu $0,1 \text{ m}$. Určete:

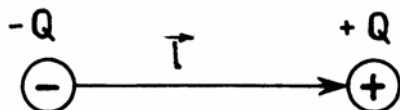


- Zrychlení elektronu v elektrickém poli.
- Dobu pohybu elektronu v elektrickém poli.
- Posuv elektronu ve směru siločar při výstupu z elektrického pole.
- Rychlost elektronu při výstupu z elektrického pole.

[a) $3,51 \cdot 10^{13} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, vektor zrychlení je orientován proti směru siločar, b) $3,33 \cdot 10^{-8} \text{ s}$, c) $1,95 \text{ cm}$ proti směru siločar, d) $3,22 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$].

2.1.3 Elektrický dipól

Elektrický dipól je soustava dvou bodových nábojů stejné absolutní velikosti a opačného znaménka (obr. 2.7).



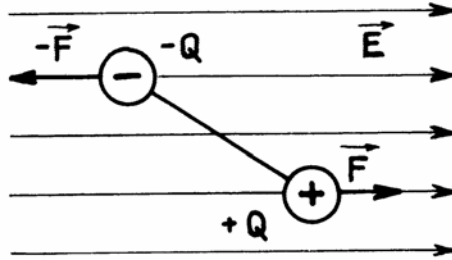
Obr. 2.7: Elektrický dipól

Elektrický dipól je charakterizován **elektrickým dipólovým momentem**

$$\vec{p} = Q\vec{l}, \quad (2.11)$$

kde \vec{l} je vektor směřující od záporného náboje ke kladnému.

Je-li tuhý elektrický dipól (tzn. nemůže se měnit vzdálenost mezi náboji) v **homogenním** elektrostatickém poli o intenzitě \vec{E} , působí na oba jeho póly síly $-\vec{F} = -Q\vec{E}$ a $\vec{F} = Q\vec{E}$ (obr. 2.8). Tyto síly tvoří silovou dvojici, která působí na dipól otáčivým momentem a natáčí osu dipólu do směru pole. Protože součet obou sil je nulový, zůstane po natočení do směru intenzity dipól v klidu.



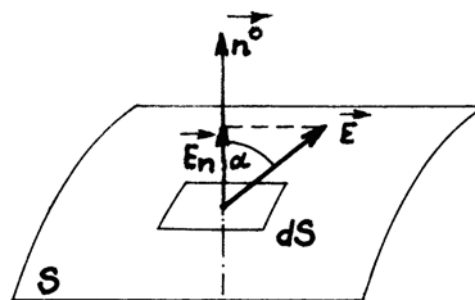
Obr. 2.8: Elektrický dipól v homogenním elektrostatickém poli

V nehomogenním elektrostatickém poli je součet obou sil různý od nuly a dipól se pohybuje ve směru rostoucí intenzity.

2.1.4 Gaussova věta elektrostatiky

Je-li vektor intenzity elektrostatického pole \vec{E} ve všech bodech libovolné plochy S , ležící v daném elektrostatickém poli, stejně velký a kolmý k ploše, je tok N vektoru \vec{E} plochou S (**elektrický silový tok**) definován vztahem

$$N = ES. \quad (2.12)$$



Obr. 2.9: Tok vektoru \vec{E} plochou S

Elementární plochou dS v obecném případě (obr. 2.9) prochází elementární tok

$$dN = E_n dS = E \cos \alpha dS = \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.13)$$

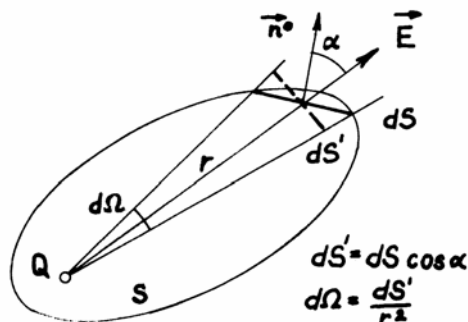
kde $E_n = E \cos \alpha$ je velikost normálové složky vektoru \vec{E} a $d\vec{S} = \vec{n}^0 dS$, kde \vec{n}^0 je jednotkový vektor ve směru normály. Celkový tok procházející plochou S je

$$N = \int_S E \cos \alpha dS = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}. \quad (2.14)$$

Tok vektoru intenzity \vec{E} libovolnou uzavřenou plochou S , ležící v elektrostatickém poli, se rovná podílu celkového elektrického náboje v objemu uzavřené plochou S a permitivity vakua

$$N = \frac{\sum_{k=1}^n Q_k}{\epsilon_0}, \quad (2.15)$$

kde Q_1, Q_2, \dots, Q_n jsou náboje uvnitř uzavřené plochy S . Tento tok nezávisí na poloze nábojů uvnitř plochy, ani na tvaru plochy. Libovolný náboj vně plochy celkový tok neovlivňuje. Věta (2.15) se nazývá **Gaussova věta elektrostatiky**.



Obr. 2.10: K důkazu Gaussovy věty

Důkaz Gaussovy věty provedeme nejdříve pro jeden bodový náboj Q uvnitř plochy S (obr. 2.10). Elementární kužel s vrcholem v bodě umístění bodového náboje Q vymezuje elementární prostorový úhel $d\Omega$ a vytíná na ploše S elementární plošku o velikosti dS . Celkový tok vektoru \vec{E} uzavřenou plochou S je podle (2.14)

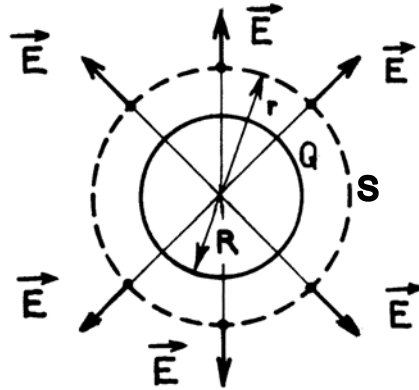
$$N = \int_S E \cos \alpha dS = \int_S \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dS' = \int_{\Omega} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} [\Omega]_0^{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.16)$$

Je-li uvnitř plochy S rozložen libovolně celkový náboj $Q = \sum_{k=1}^n Q_k$, je podle principu superpozice celkový tok

$$N = \sum_{k=1}^n N_k = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}. \quad (2.17)$$

2.1.5 Použití Gaussovy věty pro výpočet intenzity elektrostatického pole

Pomocí Gaussovy věty můžeme určit intenzitu elektrostatického pole v některých zvláštních případech.



Obr. 2.11: Elektrostatické pole nabitě vodivé kulové plochy

Intenzitu elektrostatického pole vně **rovnoměrně nabitě vodivé kulové plochy** o poloměru R určíme z celkového toku procházejícího libovolnou soustřednou kulovou plochou S (obr. 2.11). Protože je pole symetrické, je velikost intenzity E na ploše S stejná a výsledný tok plochou S je

$$N = ES = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2.18)$$

Intenzita elektrostatického pole rovnoměrně nabitě vodivé kulové plochy je vně plochy stejná jako pro pole stejně velkého bodového náboje umístěného v bodě, v němž je střed kulové plochy. Uvnitř plochy je $E = 0$.

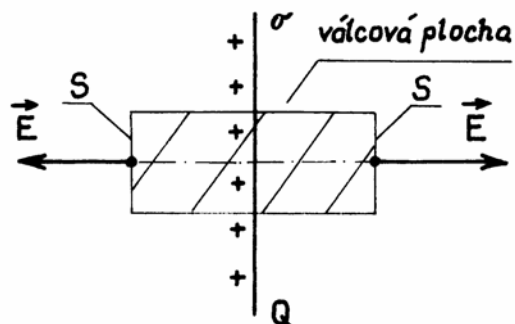
$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}. \quad (2.19)$$

Intenzita elektrostatického pole **rovnoměrně nabitě nekonečné vodivé roviny** je ve všech bodech pole konstantní (homogenní pole) (obr. 2.12). Siločáry jsou přímky kolmé k dané rovině. Celkový tok libovolnou válcovou plochou s osou ve směru siločar je

$$N = ES + ES = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}, \quad (2.20)$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \quad (2.21)$$

kde $\sigma = \frac{Q}{S}$ je plošná hustota náboje.

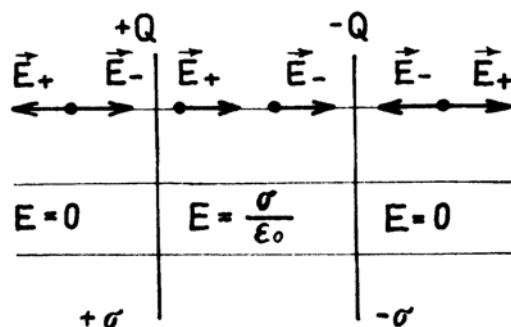


Obr. 2.12: Elektrostatické pole nabitě vodivé roviny

Elektrostatické pole **dvou nekonečných elektricky nabitých rovin** s nábojem $+Q$ a $-Q$ (obr. 2.13) je dáno součtem intenzity \vec{E}_+ a \vec{E}_- obou rovin. V prostoru mezi rovinami je výsledná intenzita

$$E = E_+ + E_- = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad (2.22)$$

vně je výsledná intenzita elektrostatického pole nulová.



Obr. 2.13: Elektrostatické pole dvou nabitých rovin

Příklad 2.3

V homogenním elektrickém poli deskového kondenzátoru se vznáší kapka oleje o hmotnosti $m = 10^{-8}$ g, nabitá záporným nábojem Q . Plocha desek je $S = 100 \text{ cm}^2$, náboj desek je $Q_d = 26 \text{ nC}$ a $-Q_d$.



- Jaká musí být poloha kondenzátoru v tíhovém poli?
- Vypočítejte náboj kapky.
- Určete počet volných elektronů na kapce.

Řešení:

- Desky musí být kolmé k vektoru tíhového zrychlení, kladná deska musí být nahoře.



b) V rovnováze musí být tíhová síla kapky \vec{G} kompenzována elektrostatickou silou \vec{F}_e ,

$$\vec{G} + \vec{F}_e = 0, \quad \vec{G} = \vec{F}_e, \quad mg = E|Q| = \frac{Q_d}{\varepsilon_0 S}|Q|.$$

Odtud určíme $|Q| = \frac{mg\varepsilon_0 S}{Q_d}$. Náboj kapky je po dosazení $|Q| = 3,34 \cdot 10^{-16} \text{ C}$.

c) Je-li náboj elektronu $-e = -1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, je počet elektronů na kapce $n = \frac{Q}{-e} = 2086$ elektronů.

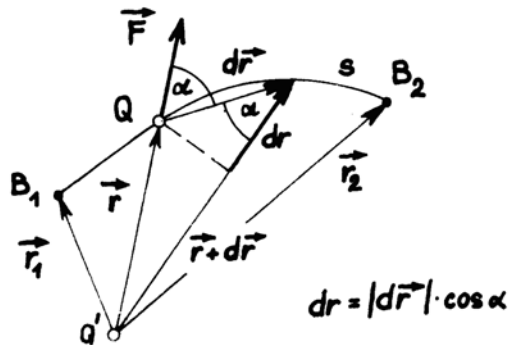
2.2 Energie elektrostatického pole



Energie elektrostatického pole je dána prací, která musí být vykonána, aby toto pole vzniklo, čili aby byl původně nenabitěmu tělesu předán elektrický náboj. Energie tohoto pole tedy souvisí s prací konanou při přemístování elektrického náboje v elektrostatickém poli. Koná-li práci vnější síla, energie elektrostatického pole se zvětší. Koná-li práci elektrostatické silové pole, energie pole klesá.

2.2.1 Práce elektrostatické síly

Nejjednodušším případem je přemístění bodového náboje Q v elektrostatickém poli bodového náboje Q' (obr. 2.14).



Obr. 2.14: Práce konaná elektrostatickou silou při posunutí elektrického náboje

Hledáme práci W , kterou vykoná elektrostatická síla \vec{F} působící na bodový náboj Q při jeho posuvu z bodu B_1 do bodu B_2 po trajektorii s . Při elementárním posuvu $d\vec{r}$ koná síla \vec{F} práci

$$dW = F \cos \alpha |d\vec{r}| = F dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} dr. \quad (2.23)$$

Celková práce

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} dr = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.24)$$

Z výsledku vyplývá, že velikost práce nezávisí na tvaru trajektorie s , po které se posunutí děje, ale pouze na poloze počátečního a koncového bodu trajektorie B_1 a B_2 .

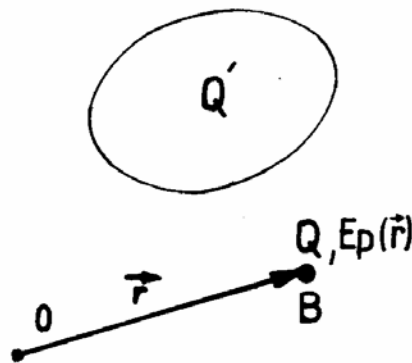
Tento výsledek můžeme zobecnit pro libovolné elektrostatické pole. To je podle principu superpozice složeno z elektrostatických polí jednotlivých bodových nábojů, jež dané elektrostatické pole vytvářejí. Pro obecné elektrostatické pole tedy práce elektrostatické síly nezávisí na tvaru trajektorie, ale pouze na poloze jejího počátečního a koncového bodu. Platí

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} F \cos \alpha |d\vec{r}| = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = Q \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.25)$$

Práce po uzavřené křivce se tedy rovná nule. Silové pole o této vlastnosti nazýváme **konzervativním** (potenciálovým) silovým polem. Uvedená vlastnost umožňuje definovat potenciální energii nabitěho tělesa v elektrostatickém poli.

2.2.2 Potenciální energie bodového náboje v elektrostatickém poli

Uvažujme elektrostatické pole tělesa s nábojem Q' . Libovolný bodový náboj Q má v každém bodě B tohoto elektrostatického pole (obr. 2.15) potenciální energii $E_p(\vec{r})$, kde \vec{r} je polohový vektor bodu B .



Obr. 2.15: K výkladu potenciální energie

Podle definice je potenciální energie daná prací vnější síly $\vec{F}_v = -\vec{F}$, která je stále v rovnováze s elektrostatickou silou \vec{F} , působící na bodový náboj Q , při posuvu tohoto náboje z místa zvolené potenciální energie E_{p0} (vztažné místo o polohovém vektoru \vec{r}_0) do daného bodu B ,

$$E_p(\vec{r}) = E_{p0} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_v \cdot d\vec{r} = E_{p0} + \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{p0} + W, \quad (2.26)$$

kde W je práce, kterou vykoná elektrostatická síla \vec{F} při posuvu náboje Q z bodu B do vztažného místa. Zvolíme-li za vztažné místo bod v nekonečnu a $E_{p0} = 0$, je

$$E_p(\vec{r}) = W = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (2.27)$$

Protože $\vec{F} = Q\vec{E}$, kde \vec{E} je intenzita daného elektrostatického pole, platí

$$E_p(\vec{r}) = W = Q \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.28)$$

2.2.3 Potenciál elektrostatického pole

Podíl potenciální energie bodového náboje Q a velikosti tohoto náboje se nazývá **potenciálem** V . Platí

$$V(\vec{r}) = \frac{E_p(\vec{r})}{Q} = \frac{W}{Q} = \int_{\vec{r}}^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{r}. \quad (2.29)$$

Jednotkou potenciálu je volt (V), $V = \text{J} \cdot \text{C}^{-1}$.

Jedná-li se o elektrostatické pole bodového náboje Q' umístěného v počátku O (obr. 2.15), je podle (2.24) pro $r_1 = r$ a $r_2 = \infty$

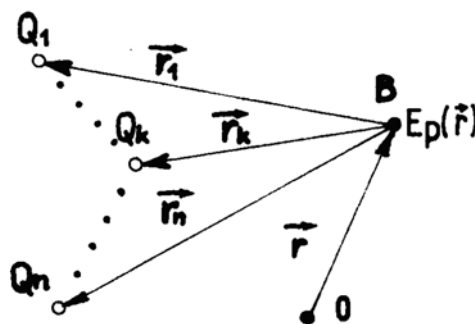
$$W = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ'}{r^2} dr = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} = \frac{QQ'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.30)$$

Potenciál elektrostatického pole bodového náboje Q' je podle (2.29)

$$V(\vec{r}) = \frac{W}{Q} = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r}. \quad (2.31)$$

Je-li elektrostatické pole tvořeno soustavou n bodových nábojů Q_1, \dots, Q_n , je výsledný potenciál podle principu superpozice (obr. 2.16)

$$V(\vec{r}) = \sum_{k=1}^n \frac{Q_k}{4\pi\epsilon_0 r_k}, \quad (2.32)$$



Obr. 2.16: Potenciál elektrostatického pole n bodových nábojů

Potenciální energie náboje Q v daném bodě elektrostatického pole s potenciálem V se určí z rovnice

$$E_p = QV. \quad (2.33)$$

Práce W , kterou vykoná elektrostatická síla při přesunutí náboje Q z bodu B_1 do bodu B_2 , se rovná rozdílu potenciálních energií v obou bodech

$$W = E_{p1} - E_{p2} = Q(V_1 - V_2) = QU_{12}, \quad (2.34)$$

kde U_{12} je **elektrické napětí** mezi body B_1 a B_2 ,

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \quad (2.35)$$

Jednotkou elektrického napětí je volt (V). Mezi dvěma body elektrostatického pole je napětí 1 V, jestliže při přemístění náboje 1 C z jednoho bodu do druhého vykonají síly pole práci 1 J.

Příklad 2.4

Bodové náboje $Q_1 = 6 \text{ nC}$ a $Q_2 = -6 \text{ nC}$ mají vzájemnou vzdálenost $d = 5 \text{ cm}$. Vypočítejte:



- Potenciály v bodech A, B, C podle obr. 2.17, kde $r = 2 \text{ cm}$.
- Potenciální energii bodového náboje $Q = 4 \text{ nC}$, je-li tento náboj umístěn postupně v bodech A, B, C.
- Napětí mezi body A a B.
- Jakou práci je třeba vykonat při přenesení náboje Q z bodu A do bodu B?

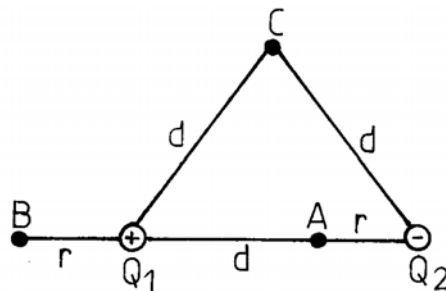
Řešení:

a) Potenciál v bodě A je dán superpozicí potenciálů elektrostatického pole bodového náboje Q_1 a Q_2 v bodě A



$$V_A = V_{1A} + V_{2A} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0(d-r)} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0 r} = -899 \text{ V}.$$

Podobně najdeme $V_B = 1927 \text{ V}$, $V_C = 0$.



Obr. 2.17: K příkladu 2.4

b) Potenciální energie bodového náboje $Q = 4 \text{ nC}$, umístěného v bodě A elektrostatického pole, je $E_{pA} = QV_A = -3,60 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

Podobně určíme $E_{pB} = QV_B = 7,71 \cdot 10^{-6} \text{ J}$, $E_{pC} = 0$.

c) Napětí mezi body A a B je $U_{AB} = V_A - V_B = -2826 \text{ V}$.

d) Při přenesení náboje $Q = 4 \text{ nC}$ z bodu A do bodu B je třeba vykonat práci $W = E_{pB} - E_{pA} = 11,31 \cdot 10^{-6} \text{ J}$.

Úkol 2.4



Jaká je intenzita a potenciál ve vzdálenosti 20 cm od povrchu vodivé koule o poloměru 8 cm , je-li na ní rovnoměrně rozložen náboj s plošnou hustotou $6 \mu\text{C} \cdot \text{m}^{-2}$?

[$5,53 \cdot 10^4 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; $15,5 \text{ kV}$].

Úkol 2.5



Mezi dvěma svislými rovnoběžnými vodivými deskami, vzdálenými od sebe $0,5 \text{ cm}$, se nachází elektricky nabitá kapka kapaliny o hmotnosti 10^{-9} g . Jestliže desky nabijeme na potenciální rozdíl 400 V , padá uvolněná kapka ve směru ke kladné desce pod úhlem $7^\circ 25'$ vzhledem ke svislému směru. Určete elektrický náboj kapky. Kolik nadbytečných elektronů kapka obsahuje?

[$1,60 \cdot 10^{-17} \text{ C}$; 100].

Kontrolní otázky 2.1



1. Formulujte zákon zachování elektrického náboje a zdůvodněte jej.
2. Vysvětlete definici veličiny intenzita elektrického pole.
3. Popište způsoby grafického znázornění elektrických polí.
4. Popište chování elektrického dipólu v homogenním a nehomogenním elektrickém poli.
5. Definiujte tok vektoru elektrické intenzity plochou.
6. Kdy lze pole mezi dvěma rovnoběžnými deskami s náboji pokládat za homogenní a vně desek za nulové?
7. Formulujte rovnici a slovy definici elektrického potenciálu a jeho vztah k intenzitě.
8. Jaká je orientace siločar vzhledem k ekvipotenciálním plochám?

2.3 Vodič v elektrostatickém poli

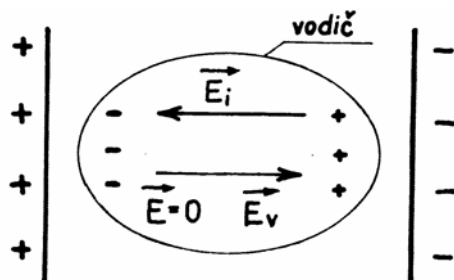


Pro chování vodičů v elektrostatickém poli je důležitá skutečnost, že vodiče obsahují volné nosiče náboje. V kovech to jsou elektrony, v elektrolytech klad-

né a záporné ionty, v ionizovaných plynech elektrony a ionty a v polovodičích elektrony a díry.

2.3.1 Intenzita elektrostatického pole ve vodiči

Vložíme-li vodič do elektrostatického pole, působí na volné nosiče náboje síla, která vyvolá posuv volného náboje. Těleso se nabije tak, že na straně přivrácené k náboji, od kterého pole pochází, je opačný náboj a na odvrácené straně souhlasný náboj. Popsaný jev je podstatou **elektrostatické indukce**.



Obr. 2.18: Vodič ve vnějším elektrostatickém poli

Rovnovážný stav ve vodiči nastává tehdy, až je uvnitř vodiče výsledná intenzita $\vec{E} = 0$, tedy až pole indukovaného náboje o intenzitě \vec{E}_i vykompenzuje uvnitř vodiče pole o intenzitě \vec{E}_v , do kterého byl vodič vložen (obr. 2.18) a výsledná síla působící na volné náboje je nulová. Platí

$$\vec{E} = \vec{E}_v + \vec{E}_i = 0. \quad (2.36)$$

Vytvoříme-li uvnitř vodiče dutinu, ve které nebudou elektrické náboje, bude i v dutině intenzita elektrostatického pole $\vec{E} = 0$. Vnější elektrostatické pole je tedy vodičem v dutině odstíněno (např. **Faradayova klec**).

Přeneseme-li na vodič elektrický náboj, rozloží se tento náboj na vnějším povrchu vodiče. Nekompenzovaný náboj uvnitř vodiče by podle Gaussovy věty vyvolal elektrické pole o intenzitě $\vec{E} \neq 0$, které by způsobilo pohyb elektrického náboje.

Jsou-li náboje ve vodiči v rovnovážném stavu, je povrch nabitého vodiče ekvipotenciální plochou, takže intenzita elektrického pole na rozhraní vodiče a okolního prostředí je všude kolmá k povrchu vodiče a rovná se podle Gaussovy věty

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (2.37)$$

kde σ je plošná hustota náboje na povrchu vodiče.

2.3.2 Kapacita vodiče

Při nabíjení různých vodivých těles stejnými náboji zjistíme, že tělesa mají různé potenciály. Potenciál tělesa závisí nejen na velikosti dodaného elektric-

kého náboje, ale také na tvaru a velikosti tělesa, jeho vzdálenosti od země a jiných těles a na vlastnosti prostředí kolem tělesa. Potenciál každého vodiče je úměrný náboji přenesenému na vodič. Poměr náboje Q a potenciálu V se nazývá **kapacita** C vodiče

$$C = \frac{Q}{V}. \quad (2.38)$$

Jednotkou kapacity je farad (F). Platí $F = C \cdot V^{-1}$.

Odvodíme **kapacitu vodivé kulové plochy** o poloměru R . Elektrostatické pole vodivé kulové plochy s nábojem Q je vně kulové plochy stejné jako pole bodového náboje Q soustředěného v bodě, ve kterém byl umístěn střed plochy. Můžeme proto určit potenciál na povrchu kulového vodiče podle rovnice (2.31)

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}. \quad (2.39)$$

Kapacita vodivé kulové plochy je podle (2.38)

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R. \quad (2.40)$$

Úkol 2.6



Vypočítejte kapacitu Země. Na jaký potenciál by se Země nabíla nábojem 1 C? Poloměr Země je 6378 km.

[709 μ F; 1410 V]

2.3.3 Kapacita kondenzátoru



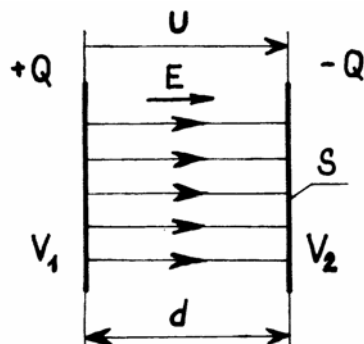
Přenášíme-li elektrický náboj z jednoho vodivého tělesa na druhé, nabíjí se tělesa na potenciály V_1 a V_2 , přičemž náboj jednoho tělesa je Q a druhého $-Q$. Kapacita této soustavy je definována vztahem

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U}, \quad (2.41)$$

kde U je elektrické napětí mezi oběma tělesy.

Soustavu dvou navzájem izolovaných vodičů, uspořádaných tak, že elektrické pole v prostoru mezi nimi je odstíněno od vnějších elektrických polí, nazýváme **kondenzátor**.

Nejjednodušším kondenzátorem je **kondenzátor deskový**, tvořený dvěma rovnoběžnými vodivými deskami, jejichž rozměry jsou podstatně větší než vzdálenost mezi nimi (obr. 2.19).



Obr. 2.19: Deskový kondenzátor

Intenzita elektrostatického pole mezi deskami je dána (při dostatečně velkých rozměrech desek) rovnicí (2.22)

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{S\varepsilon_0}, \quad (2.42)$$

kde Q je velikost náboje na kladné desce, S je plocha desky, σ je plošná hustota náboje. Protože uvažujeme mezi deskami homogenní elektrostatické pole, je napětí U mezi deskami

$$U = Ed = \frac{Q}{S\varepsilon_0} d, \quad (2.43)$$

kde d je vzdálenost desek.

Kapacita deskového kondenzátoru (vzduchového) je přímo úměrná ploše desek a nepřímo úměrná vzdálenosti desek

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \quad (2.44)$$

2.3.4 Řazení kondenzátorů

Kondenzátory můžeme řadit paralelně nebo do série. Při **paralelním řazení** kondenzátorů je výsledná kapacita (obr. 2.20)

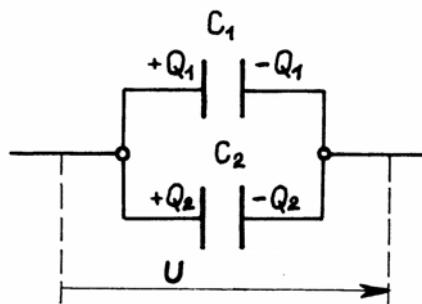
$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} = C_1 + C_2. \quad (2.45)$$

Výsledná kapacita je dána součtem dílčích kapacit.

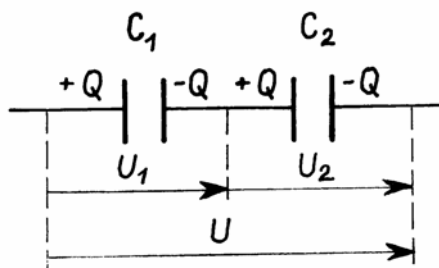
Při **sériovém řazení** kondenzátorů (obr. 2.21) je náboj na deskách stejné velikosti, ale celkové napětí je dáno součtem jednotlivých napětí kondenzátorů, $U = U_1 + U_2$. Potom pro výslednou kapacitu C platí

$$\frac{1}{C} = \frac{U}{Q} = \frac{U_1 + U_2}{Q} = \frac{U_1}{Q} + \frac{U_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (2.46)$$

Při sériovém spojení je převrácená hodnota výsledné kapacity dána součtem převrácených hodnot dílčích kapacit.



Obr. 2.20: Paralelní řazení kondenzátorů



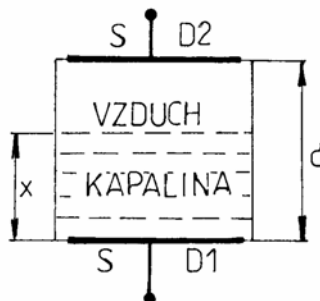
Obr. 2.21: Sériové řazení kondenzátorů

Úkol 2.7



Určete závislost kapacity deskového kapacitního snímače D_1 a D_2 na výšce x hladiny nevodivé kapaliny s relativní permitivitou ϵ_r podle obr. 2.22. Mezi deskami kondenzátoru je vzdálenost d .

$$\left[C = \frac{A}{B+x}, \text{ kde } A = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r S}{1 - \epsilon_r}, B = \frac{\epsilon_r d}{1 - \epsilon_r} \right]$$



Obr. 2.22: K úkolu 2.7

Úkol 2.8

Kondenzátor se vzduchovým dielektrikem má kapacitu $C = 21 \text{ pF}$ a vzdálenost desek $d = 8 \text{ mm}$. Mezi desky vložíme rovnoběžně s nimi plech tloušťky 2 mm . Jaká bude kapacita soustavy?



[28 pF]

2.3.5 Praktické provedení kondenzátorů

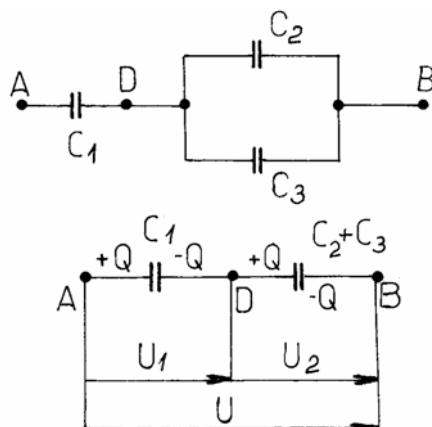
Kondenzátory jsou tvořeny dvěma vodivými elektrodami, které jsou navzájem odděleny dielektrikem. Podle tvaru elektrod se rozlišuje rovinný kondenzátor, válcový kondenzátor, kulový kondenzátor aj. Podle použitého dielektrika je dělíme na kondenzátory vzduchové, s papírovým dielektrikem, s plastickou fólií, slídové, keramické, skleněné a elektrolytické.



Podle konstrukce je rozdělujeme na kondenzátory pevné (s neproměnnou kapacitou) a kondenzátory s proměnnou kapacitou (ladící a doladovací).

Příklad 2.5

V obvodu tvořeném kondenzátory $C_1 = 3 \mu\text{F}$, $C_2 = 4 \mu\text{F}$ a $C_3 = 2 \mu\text{F}$ (obr. 2.23) je bod B uzemněn a bod A je udržován na potenciálu $V_A = 1200 \text{ V}$. Určete náboj každého kondenzátoru a potenciál v bodě D .



Obr. 2.23: K příkladu 2.5

Řešení:

Výsledná kapacita C_v této kombinace kondenzátorů je dána kapacitou sériové kombinace C_1 a $C_2 + C_3$, čili



$$\frac{1}{C_v} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_3} = \frac{1}{3 \cdot 10^{-6} \text{ F}} + \frac{1}{(4 + 2) \cdot 10^{-6} \text{ F}} = \frac{1}{2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}$$

$$C_v = 2 \mu\text{F}.$$

Napětí mezi body A a B na ekvivalentním kondenzátoru je $U = 1200 \text{ V}$ a náboj $Q = C_v U = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 1200 \text{ V} = 2,4 \text{ mC}$.

Dále platí

$$U_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ C}}{3 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 800 \text{ V}, \quad U_2 = \frac{Q}{C_2 + C_3} = \frac{2,4 \cdot 10^{-3} \text{ C}}{6 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 400 \text{ V}.$$

Náboj Q_2 na kondenzátoru C_2 je $Q_2 = C_2 U_2 = 4 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 400 \text{ V} = 1,6 \text{ mC}$,

Náboj Q_3 na kondenzátoru C_3 je $Q_3 = C_3 U_2 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ F} \cdot 400 \text{ V} = 0,8 \text{ mC}$.

Platí $Q = Q_1 + Q_2 = 1,6 \text{ mC} + 0,8 \text{ mC} = 2,4 \text{ mC}$.

Potenciál V_D v bodě D je roven $V_D = U_2 = 400 \text{ V}$.

2.4 Dielektrikum v elektrostatickém poli

2.4.1 Elektrické vlastnosti dielektrik



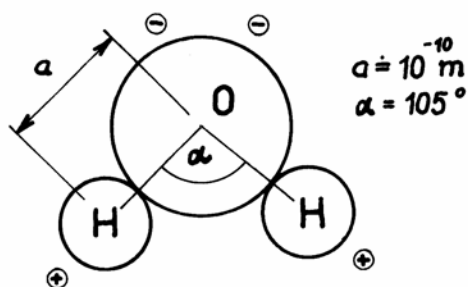
Elektrické jevy v dielektrikách se od jevů ve vakuu liší tím, že při nich působí vliv prostředí. Dielektrika jsou látky, v nichž je zanedbatelná koncentrace volných nosičů náboje (elektronů a iontů). Jejich vodivost je za normálních podmínek o 15 až 24 řádů menší než vodivost kovů. Pouze při vysokých (průrazných) elektrických napětích nastává průraz dielektrika a v důsledku toho vede ní proud. Do této skupiny látek patří plyny při nižších teplotách, sklo, slída, teflon, papír, různé plastické látky, některé druhy keramiky, olej, destilovaná voda a další látky.

Atomy a molekuly, které tvoří dielektrikum, jsou soustavy kladně a záporně nabitých částic (kladná jádra a elektronový obal). Tyto částice jsou vázány vzájemnými silami v atomech a molekulách a nemohou se volně přemisťovat do větších vzdáleností. Nejsou-li atomy a molekuly ionizovány, obsahují stejný počet kladných a záporných částic. Můžeme je považovat za elektrické dipóly, charakterizované elektrickým dipólovým momentem $\vec{p} = Q\vec{l}$ podle rovnice (2.11).

Nepolární dielektrika se vyznačují tím, že atomy a molekuly mají tento elektrický dipólový moment nulový (pokud nejsou ve vnějším elektrickém poli). Tento případ nastává tehdy, když těžiště kladného náboje a záporného náboje v atomu nebo molekule se ztotožňují.

Do druhé skupiny patří **polární dielektrika**, jejichž molekuly mají nenulový elektrický dipólový moment i bez přítomnosti vnějšího elektrického pole. Tento jev je vyvolán tvarem molekuly, jako příklad může sloužit molekula vody (obr. 2.24).

Bez přítomnosti vnějšího elektrického pole jsou jednotlivé dipóly polárních dielektrik vlivem tepelného pohybu orientovány chaoticky a výsledný dipólový moment látky je nulový.



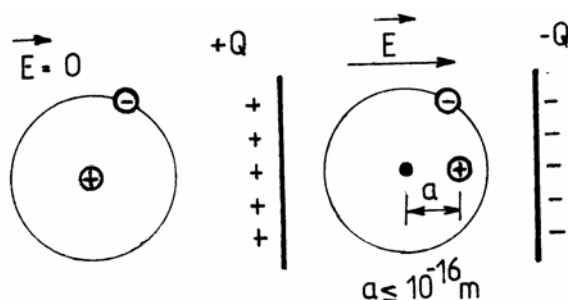
Obr. 2.24: Molekula vody

2.4.2 Polarizace dielektrika

Atomy a molekuly, které tvoří dielektrikum, jsou soustavy nabitých částic, které reagují na přítomnost elektrického pole, do kterého bylo dielektrikum vloženo. Nejdůležitější z těchto jevů je **polarizace dielektrika**.

2.4.2.1 Atomová (elektronová) polarizace

Vzniká vzájemným posunutím kladně nabitého jádra a záporně nabitého elektronového obalu atomu ve vnějším elektrickém poli (obr. 2.25).



Obr. 2.25: Atomová polarizace

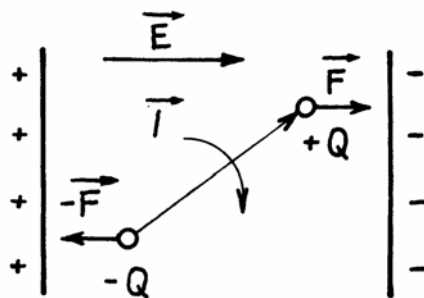
Těžiště kladného a záporného náboje se navzájem posunou a atom má nenulový elektrický dipólový moment.

2.4.2.2 Iontová polarizace

Vzniká v látkách, jejichž molekuly jsou složeny ze dvou nebo více iontů (polární dielektrika). V elektrickém poli se posunou navzájem kladné a záporné ionty a celkový elektrický dipólový moment látky je potom nenulový.

2.4.2.3 Orientační polarizace

Vzniká v polárních dielektrikách, jestliže jsou molekuly volné a mohou se působením vnějšího elektrického pole otáčet (v kapalinách a plynech). Orientační polarizace je tedy založena na otáčení elektrických dipólů, tvořených kladnými a zápornými ionty molekuly, do směru vektoru intenzity elektrického pole (obr. 2.26).

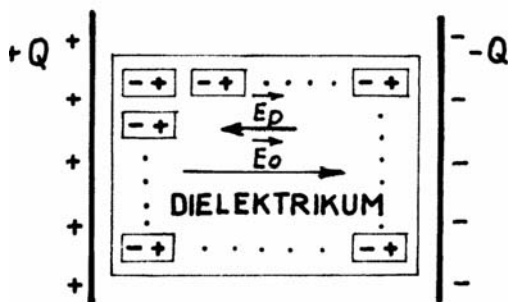


Obr. 2.26: Orientační polarizace

2.4.3 Rovinná dielektrická deska v homogenním elektrickém poli

Výpočet elektrostatického pole v dielektrickém tělese libovolného tvaru ve vnějším elektrickém poli je velmi složitá úloha. Tuto problematiku budeme řešit v případě rovinné homogenní izotropní dielektrické desky vložené mezi desky nabitého rovinného kondenzátoru (obr. 2.27).

Po vložení dielektrika do elektrického pole mezi desky kondenzátoru o původní intenzitě elektrostatického pole \vec{E}_0 dochází k polarizaci dielektrika. V dielektriku vznikají elektrické dipóly a na plochách dielektrika se objeví vázané náboje, na levé stěně $-Q_p$ a na pravé stěně $+Q_p$. Tyto náboje na stěnách nejsou kompenzovány, zatímco uvnitř dielektrika je součet vázaných nábojů nulový. Vázané náboje na stěnách vytváří v dielektriku elektrické pole s intenzitou \vec{E}_p , která má opačnou orientaci než vektor \vec{E}_0 .



Obr. 2.27: Dielektrikum v elektrickém poli

Výsledná intenzita \vec{E} elektrického pole v dielektriku je

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p, \quad (2.47)$$

$$E = E_0 - E_p. \quad (2.48)$$

Polarizaci dielektrika určuje výsledná intenzita elektrického pole \vec{E} . Pro intenzitu elektrického pole \vec{E}_p , která vzniká v důsledku polarizace platí (pro nepříliš silná elektrická pole)

$$\vec{E}_p = \kappa \vec{E}, \quad (2.49)$$

kde κ je součinitel závislý na typu dielektrika (elektrická susceptibilita). Potom dosazením (2.49) do (2.48) dostáváme

$$E = E_0 - \kappa E, \quad (2.50)$$

$$E = \frac{E_0}{1 + \kappa} = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \quad (2.51)$$

kde $\epsilon_r = 1 + \kappa$ se nazývá **relativní permitivita** dielektrika. Např. pro vodu je $\epsilon_r = 81$, pro slídu je $\epsilon_r = 7$ až 11, pro papír $\epsilon_r = 3$. Výsledná intenzita elektrostatického pole je v dielektriku ϵ_r krát menší než původní intenzita E_0 .

Coulombův zákon pro bodové náboje umístěné v homogenním izotropním dielektriku má potom tvar

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\epsilon_r} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad (2.52)$$

kde $\epsilon_0\epsilon_r = \epsilon$ je **permitivita prostředí**. Z uvedeného vyplývá, že ve všech vzorcích, odvozených z Coulombova zákona pro vakuum, se nahradí permitivita vakua ϵ_0 permitivitou dielektrika $\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r$.

Pomocí permitivity a intenzity elektrického pole definujeme v tomto případě **vektor elektrické indukce** $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$.

Tak např. **Gaussova věta** (2.17) pro tok Ψ vektoru \vec{D} bude mít tvar

$$\Psi = \epsilon N = Q \quad (2.53)$$

a **kapacita deskového kondenzátoru** bude (2.44).

$$C = \frac{\epsilon S}{d}. \quad (2.54)$$

Úkol 2.9

Deskový kondenzátor se vzduchovým dielektrikem o ploše každé desky $S=200 \text{ cm}^2$ a vzdálenosti desek $d = 5 \text{ mm}$ byl nabit na napětí $U = 10 \text{ kV}$. Potom byla mezi desky vsunuta deska dielektrika o tloušťce 5 mm a relativní permitivitě $\epsilon_r = 5$. Vypočtěte:



- Intenzitu elektrického pole v dielektriku.
- Elektrickou indukci v dielektriku.
- Napětí na kondenzátoru.
- Kapacitu kondenzátoru.

[$4 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$; $1,77 \cdot 10^{-5} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}$; 2000 V ; 177 pF]

Úkol 2.10

Elektrody kondenzátoru jsou od sebe odděleny porcelánovou deskou o relativní permitivitě $\epsilon_r = 6$ a tloušťce 5 mm a vzduchovou vrstvou tloušťky 5 mm. Určete intenzitu elektrického pole ve vzduchu a v porcelánu, jestliže byl kondenzátor nabit na napětí $U = 10$ kV. Jaké je napětí na každé vrstvě dielektrika?

[1,71 MV.m⁻¹; 286 kV.m⁻¹; 8,57 kV; 1,43 kV]

Příklad 2.6

Prostor mezi rovnoběžnými deskami kondenzátoru o ploše každé desky $S = 100$ cm² je vyplněn dielektrikem o relativní permitivitě $\epsilon_r = 1,7$. Desky kondenzátoru mají náboj $Q = 0,3$ μC a $-Q = -0,3$ μC. Určete:

- Intenzitu elektrického pole v dielektriku.
- Plošnou hustotu indukovaného náboje na plochách dielektrika.
- Složku intenzity elektrického pole pocházející od volného náboje.
- Složku intenzity elektrického pole pocházející od indukovaného náboje.

Řešení:

a) Intenzitu elektrického pole v dielektriku E určíme na základě vztahů (2.51). Platí

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r}, \text{ kde } E_0 = \frac{Q}{S\epsilon_0}.$$

Potom

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r S} = \frac{0,3 \cdot 10^{-6} \text{ C}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \cdot 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2} = 1,99 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}.$$

b) Plošnou hustotu indukovaného náboje σ_p určíme ze vztahu (2.49) a (2.22). Platí

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0},$$

$$\sigma_p = E_p \epsilon_0 = \kappa \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E = 0,7 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1} \cdot 1,99 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1} = 12,32 \cdot 10^{-6} \text{ C.m}^{-2}$$

c) Složku intenzity elektrického pole E_0 pocházející od volného náboje určíme ze vztahu (2.51). Odtud vyplývá

$$E_0 = \epsilon_r E = 1,7 \cdot 1,99 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1} = 3,38 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}.$$

d) Složka intenzity elektrického pole E_p pocházející od indukovaného náboje σ_p je

$$E_p = \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{12,32 \cdot 10^{-6} \text{ C} \cdot \text{m}^{-2}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}} = 1,39 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Pro výslednou intenzitu elektrického pole v dielektriku platí

$$E = E_0 - E_p = 3,38 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} - 1,39 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1} = 1,99 \cdot 10^6 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Kontrolní otázky 2.2

1. Vysvětlete podstatu elektrické indukce.
2. Zdůvodněte skutečnost, že se náboj vodiče nachází pouze na jeho povrchu a uvnitř vodiče není elektrické pole.
3. Vysvětlete definici elektrické kapacity pro osamělý vodič a pro kondenzátor.
4. Ukažte, jak závisí kapacita kondenzátoru na rozměrech elektrod a na dielektriku mezi elektrodami.
5. Jak určíme výslednou kapacitu při paralelním spojení více kondenzátorů?
6. Vysvětlete podstatu jevu polarizace dielektrika a způsoby, jimiž vzniká.
7. Objasněte odlišnost jevů elektrické indukce a dielektrické polarizace.
8. Co vyjadřuje vektor elektrické indukce a jak souvisí s intenzitou elektrického pole?



2.5 Autotest



1. Vyjádřete Coulombův zákon rovnicí a slovy.
2. Odvoďte intenzitu elektrického pole od bodového náboje Q v libovolné vzdálenosti r .
3. Vysvětlete, jaké základní znaky konzervativního silového pole má elektrostatické pole.
4. Definujte elektrické napětí mezi dvěma body elektrostatického pole.
5. Zdůvodněte, proč je potenciál elektrostatického pole dipólu na ose souměrnosti dipólu nulový.
6. Jakým způsobem můžete dosáhnout odstínění daného prostoru od vnějšího elektrického pole?
7. Jak určíme kapacitu soustavy sériově spojených kondenzátorů?
8. Definujte tok vektoru elektrické intenzity danou uzavřenou plochou a vysvětlete, jak závisí na nábojích tvořících zdroj elektrického pole?

2.6 Klíč k autotestu 2.5



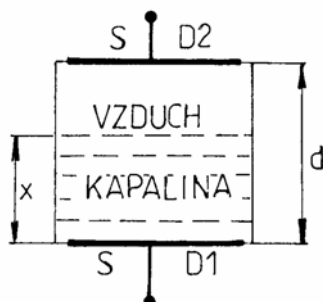
1. $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2}$, síla mezi dvěma bodovými elektrickými náboji je úměrná součinu velikosti nábojů a nepřímo úměrná kvadrátu vzdálenosti.
2. $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$.
3. Práce vykonaná elektrostatickou silou mezi dvěma body elektrostatického pole je nezávislá na tvaru trajektorie, závisí pouze na poloze počátečního a koncového bodu trajektorie.
4. $U_{12} = V_1 - V_2$, kde V_1, V_2 jsou potenciály obou bodů.
5. Výsledný potenciál je dán součtem potenciálů dvou stejně velkých opačných nábojů ve stejné vzdálenosti od nábojů.
6. Kolem chráněného prostoru umístíme vodivé prostředí.
7. Převrácená hodnota výsledné kapacity je rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých kapacit.
8. Tok vektoru elektrické intenzity danou plochou je dán plošným integrálem normálové složky intenzity elektrického pole. Pro uzavřenou plochu je dán podílem celkového náboje uvnitř plochy děleném permitivitou prostředí.

2.7 Korespondenční úkoly



1. Aplikujte Gaussovu větu na výpočet intenzity elektrostatického pole nabitě vodivé kulové plochy.
2. Odvoďte vztah pro práci elektrostatického pole při přemístění částice s nábojem Q ze vzdálenosti r od bodového náboje Q' do nekonečna.
3. Odvoďte vztah pro potenciál pole bodového náboje.
4. Odvoďte výraz pro kapacitu kulového vodiče.
5. Odvoďte výraz pro kapacitu deskového kondenzátoru.
6. Navrhněte způsob využití deskového kondenzátoru jako kapacitního snímače mechanického posuvu.
7. V čem se liší Coulombův zákon pro dva bodové náboje nacházející se v homogenním dielektriku od případu, že se tyto náboje nacházejí ve vakuu?
8. V pravouhlém souřadnicovém systému se nachází dva bodové náboje. Náboj $Q_1 = 10^{-8}$ C je umístěn v bodě $A_1[0,1;0;0]$ m, náboj $Q_2 = -10^{-8}$ C v bodě $A_2[-0,1;0;0]$ m. Najděte velikost a směr intenzity elektrického pole těchto nábojů v bodě $A_3[0;0,1;0]$ m.
9. Elektron vletne počáteční rychlostí $v_0 = 3 \cdot 10^6$ m.s⁻¹ kolmo na směr siločar do homogenního elektrického pole s intenzitou elektrického pole $E = 200$ V.m⁻¹. Oblast, ve které se vyskytuje elektrické pole, má šířku ve směru pohybu elektronu 0,1 m. Určete:

- a) Zrychlení elektronu v elektrickém poli.
 b) Dobu pohybu elektronu v elektrickém poli.
 c) Posuv elektronu ve směru siločar při výstupu z elektrického pole.
 d) Rychlost elektronu při výstupu z elektrického pole.
10. Určete závislost kapacity deskového kapacitního snímače D_1 a D_2 na výšce x hladiny nevodivé kapaliny s relativní permitivitou ϵ_r podle obr. 2.28. Mezi deskami kondenzátoru je vzdálenost d .



Obr. 2.28: Ke korespondenční úloze 10

11. Deskový kondenzátor se vzduchovým dielektrikem o ploše každé desky $S = 200 \text{ cm}^2$ a vzdálenosti desek $d = 5 \text{ mm}$ byl nabit na napětí $U = 10 \text{ kV}$. Potom byla mezi desky vsunuta deska dielektrika o tloušťce 5 mm a relativní permitivitě $\epsilon_r = 5$. Vypočtěte:
- a) Intenzitu elektrického pole v dielektriku.
 b) Elektrickou indukci v dielektriku.
 c) Napětí na kondenzátoru.
 d) Kapacitu kondenzátoru.

2.8 Závěr

Elektromagnetická interakce je základem všech elektrických a magnetických jevů.



Elektromagnetickou interakcí se vyznačují všechny známé elementární částice a antičástice s výjimkou neutrina. Některé částice mají elektrický náboj a magnetický moment, jiné jen elektrický náboj nebo jen magnetický moment.

Elektrický náboj chápeme jako fyzikální veličinu, která je mírou schopnosti elementárních částic působit na sebe vzájemně elektrickými a magnetickými silami.

V okolí elektricky nabitých částic existuje elektromagnetické pole.

Elektromagnetické pole je plně popsáno, jsou-li v každém bodě pole zadány vektory **intenzity elektrického pole** \vec{E} , **elektrické indukce** \vec{D} , **intenzity magnetického pole** \vec{H} a **magnetické indukce** \vec{B} .

Dva bodové náboje Q_1 a Q_2 na sebe působí silou, která je přímo úměrná součinu velikostí obou nábojů a nepřímo úměrná kvadrátu jejich vzdáleností (**Coulombův zákon**).

Vzájemné silové působení mezi dvěma náboji nezávisí na působení jiných nábojů, pokud se tímto působením nezmění poloha nebo rozložení obou nábojů.

Elektrostatické pole charakterizujeme v libovolném bodě **intenzitou elektrostatického pole** \vec{E} , která je číselně rovna síle, která by v daném bodě pole působila na jednotkový kladný bodový náboj.

Elektrostatické pole můžeme graficky znázornit **silovými čarami** (siločarami).

Elektrický dipól je soustava dvou bodových nábojů stejné absolutní velikosti a opačného znaménka. Dipól je charakterizován **elektrickým dipólovým momentem**.

Tok vektoru intenzity \vec{E} libovolnou uzavřenou plochou S , ležící v elektrostatickém poli, se rovná podílu celkového elektrického náboje v objemu uzavřeném plochou S a permitivity prostředí.

Energie elektrostatického pole je dána prací, která musí být vykonána, aby toto pole vzniklo, čili aby byl původně nenabitému tělesu předán elektrický náboj.

Velikost práce nezávisí na tvaru trajektorie s , po které se posunutí děje, ale pouze na poloze počátečního a koncového bodu trajektorie.

Potenciální energie bodového náboje je dána prací vnější síly $\vec{F}_v = -\vec{F}$, která je stále v rovnováze s elektrostatickou silou \vec{F} , působící na bodový náboj Q , při posuvu tohoto náboje z místa zvolené potenciální energie E_{p0} (vztažné místo o polohovém vektoru \vec{r}_0) do daného bodu.

Mezi dvěma body elektrostatického pole je **elektrické napětí** 1 V, jestliže při přemístění náboje 1 C z jednoho bodu do druhého vykonají síly pole práci 1 J.

Vložíme-li vodič do elektrostatického pole, působí na volné nosiče náboje síla, která vyvolá posuv volného náboje.

Rovnovážný stav ve vodiči nastává tehdy, až je uvnitř vodiče výsledná intenzita $\vec{E} = 0$, tedy až pole indukovaného náboje o intenzitě \vec{E}_i vykompenzuje uvnitř vodiče pole o intenzitě \vec{E}_v , do kterého byl vodič vložen.

Potenciál tělesa závisí nejen na velikosti dodaného elektrického náboje, ale také na tvaru a velikosti tělesa, jeho vzdálenosti od země a jiných těles a na vlastnosti prostředí kolem tělesa. Poměr náboje Q a potenciálu V se nazývá **kapacita** C vodiče.

Kapacita kondenzátoru je definována vztahem

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U},$$

kde U je elektrické napětí mezi oběma tělesy.

Při **paralelním řazení** kondenzátorů je výsledná kapacita dána součtem dílčích kapacit.

Při **sériovém spojení** je převrácená hodnota výsledné kapacity dána součtem převrácených hodnot dílčích kapacit.

Elektrické jevy v dielektrikách se od jevů ve vakuu liší tím, že při nich působí vliv prostředí.

Při vložení dielektrika do vnějšího elektrického pole dochází k **polarizaci dielektrika**.

Atomová (elektronová) **polarizace** vzniká vzájemným posunutím kladně nabitého jádra a záporně nabitého elektronového obalu atomu ve vnějším elektrickém poli.

Iontová polarizace vzniká v látkách, jejichž molekuly jsou složeny ze dvou nebo více iontů (polární dielektrika).

Orientační polarizace vzniká v polárních dielektrikách, jestliže jsou molekuly volné a mohou se působením vnějšího elektrického pole otáčet (v kapalinách a plynech).

Po vložení dielektrika do elektrického pole mezi desky kondenzátoru o původní intenzitě elektrostatického pole \vec{E}_0 dochází k polarizaci dielektrika.

Výsledná intenzita elektrostatického pole je ϵ_r krát menší než původní intenzita E_0 .

Ve všech vzorcích, odvozených z Coulombova zákona pro vakuum, se nahradí permitivita vakua ϵ_0 permitivitou dielektrika $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$.

3 Ustálený elektrický proud

3.1 Elektrický proud

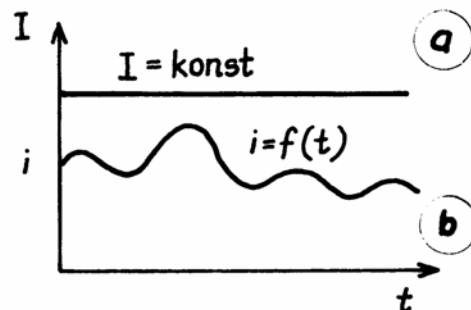
Nachází-li se elektricky nabitá částice v elektrickém poli, působí na ni pole elektrickou silou. Je-li částice volná, uvede ji tato síla do pohybu. Pohyb částic s elektrickým nábojem nazýváme obecně elektrickým proudem. Jde-li o pohyb elementárních částic s elektrickým nábojem (např. elektronů) v atomech a molekulách, mluvíme o **mikroskopických proudech**. Uspořádaný pohyb velkého počtu částic s elektrickým nábojem nazýváme **makroskopickým proudem**. Pohybují-li se nosiče náboje v látce uspořádaně, nazýváme tento **proud kondukční**. Uspořádaný pohyb částic s elektrickým nábojem, ke kterému dochází při makroskopickém pohybu nabitých těles, nazýváme **proudem konvekčním**. Například Země má nekompensovaný záporný náboj, a tedy při jejím pohybu vzniká konvekční proud.



S elektrickou polarizací dielektrika částečně souvisí **posuvný proud**, který závisí na časové změně vektoru elektrické indukce \vec{D} .

Dále se budeme zabývat kondukčním proudem. V kovech je tvořen uspořádaným pohybem volných elektronů, v elektrolytech pohybem kladných a záporných iontů, v polovodičích pohybem vodivostních elektronů a děr, v ionizovaných plynech pohybem elektronů a kladných a záporných iontů.

Nutnou podmínkou pro vznik elektrického proudu v látce je kromě volných nosičů náboje také existence sil, které způsobují pohyb nosičů náboje. V případě elektrických sil musí být ve vodiči vytvořeno elektrické pole s intenzitou $\vec{E} \neq 0$. To je vyvoláno a udržováno zdrojem elektrického proudu (galvanický článok, akumulátor, generátor elektrického proudu aj.). Podle časové závislosti intenzity elektrického pole ve vodiči vzniká buďto proud časově závislý (např. střídavý) nebo časově nezávislý (ustálený stejnosměrný proud) (obr. 3.1). Uspořádaný pohyb náboje však může vznikat také v důsledku neelektrických sil, např. v důsledku prostorového rozložení koncentrace nosičů náboje nebo teploty.



Obr. 3.1: Časová závislost elektrického proudu a) ustálený stejnosměrný, b) stejnosměrný proud

Elektrický proud charakterizujeme fyzikální veličinou nazvanou **elektrický proud** (proud). Označuje se symbolem I (pro časově proměnný proud i). Je to základní fyzikální veličina a její jednotka ampér (značka A) je jednotkou základní.

Ampér je definován jako stálý elektrický proud, který při průtoku dvěma rovnoběžnými, přímými a nekonečně dlouhými vodiči zanedbatelného kruhového průřezu, umístěnými ve vakuu ve vzájemné vzdálenosti 1 m, vyvolá mezi nimi stálou sílu $2 \cdot 10^{-7}$ N na metr délky. Za směr proudu se podle dohody pokládá směr uspořádaného pohybu kladně nabitých částic. Je-li proud tvořen pohybem záporně nabitých částic, je jeho směr opačný než směr pohybu těchto částic.

Mezi proudem a elektrickým nábojem Q , který prochází průřezem vodiče, platí vztah

$$dQ = I dt, \quad (3.1)$$

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad (3.2)$$

kde dQ je náboj, který projde průřezem vodiče za elementární časový interval dt . Prochází-li záporný náboj vodičem, bereme $dQ = |dQ_-|$.

Jednotkou náboje je coulomb (C), $C = A \cdot s$. Prochází-li vodičem stálý proud 1 A, projde průřezem vodiče za 1 s náboj 1 C. V kovech to odpovídá průchodu $6,24 \cdot 10^{18}$ elektronů za jednu sekundu.

V této kapitole se budeme zabývat pouze ustálenými stejnosměrnými proudy. Vznikají za předpokladu, že ve vodiči existuje stacionární elektrické pole o intenzitě $\vec{E}(t) = \text{konst.}$ Toto pole vyvolá časově nezávislý elektrický proud $I(t) = \text{konst.}$ Stacionární elektrické pole je tedy časově neproměnné elektrické pole, ve kterém se pohybují elektrické náboje (počet nábojů na jednotlivých elektrodách zdroje se nemění).

Příklad 3.1



Určete elektrický náboj, který projde průřezem vodiče za dobu $t_1 = 60$ s v těchto případech:

- Proud ve vodiči má konstantní hodnotu $I_0 = 10$ A.
- Proud ve vodiči narůstá lineárně od hodnoty 0 v čase $t = 0$ až do hodnoty $I_0 = 10$ A v čase $t = 60$ s.
- Proud ve vodiči klesá exponenciálně s časovou konstantou $\tau = 0,1$ s z hodnoty $I_0 = 10$ A v čase $t = 0$.

Řešení:



Za elementární časový interval dt projde průřezem vodiče při proudu I elektrický náboj $dQ = I dt$. V časovém intervalu $\langle 0, t_1 \rangle$ projde průřezem vodiče

celkový elektrický náboj $Q = \int_0^{t_1} I dt$. Platí:

$$a) Q = \int_0^{60s} 10 \text{ A} dt = 10 \text{ A} [t]_0^{60s} = 600 \text{ C}.$$

b) V případě lineárního narůstání proudu z hodnoty 0 až na hodnotu 10 A lze časový průběh proudu vyjádřit funkcí

$$I = \frac{10 \text{ A}}{60 \text{ s}} t = \frac{1}{6} \text{ A} \cdot \text{s}^{-1} t.$$

Potom

$$Q = \int_0^{60s} \frac{1}{6} \text{ A} \cdot \text{s}^{-1} t dt = \frac{1}{6} \text{ A} \cdot \text{s}^{-1} \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^{60s} = 300 \text{ C}.$$

c) Časová závislost proudu je dána funkcí

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}} = 10 \text{ A} e^{-\frac{t}{0,1s}}.$$

Potom

$$Q = \int_0^{60s} 10 \text{ A} e^{-\frac{t}{0,1s}} dt = 10 \text{ A} \left[e^{-\frac{t}{0,1s}} / \left(-\frac{1}{0,1s} \right) \right]_0^{60s} = -1 \text{ A} \cdot \text{s} \cdot (e^{-600} - e^0) = 1 \text{ C}.$$

3.2 Princip kontinuity proudu

Elektrický proud, který prochází v témže okamžiku různými místy uvažovaného průřezu vodiče, může mít různé rozložení (různou hustotu) podél průřezu vodiče. Toto rozložení charakterizujeme **vektorem proudové hustoty** \vec{J} . Je-li střední rychlost uspořádaného pohybu kladného náboje v oblasti uvažované elementární plošky dS \vec{v} a touto ploškou protéká proud dI (obr. 3.2), je vektor proudové hustoty \vec{J} definován rovnicí



$$\vec{J} = \frac{dI}{dS \cos \alpha} \vec{v}^0, \quad (3.3)$$

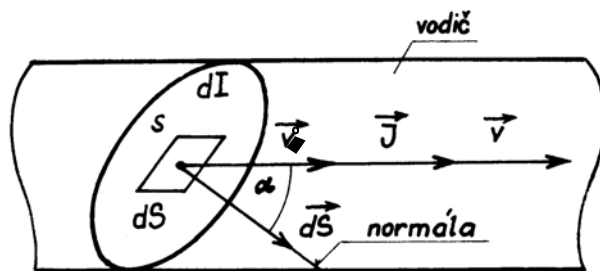
kde $\vec{v}^0 = \frac{\vec{v}}{v}$ je jednotkový vektor ve směru rychlosti kladného náboje, α je úhel mezi vektorem \vec{v} a normálou k plošce dS a $dS \cos \alpha$ je obsah průmětu plošky dS do roviny kolmé k vektoru \vec{v} .

Známe-li rozložení vektoru proudové hustoty \vec{J} na dané ploše S , je proud procházející ploškou dS podle (3.3)

$$dI = J \cos \alpha dS \quad (3.4)$$

a celkový proud procházející plochou S je

$$I = \int_S J \cos \alpha dS = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}. \quad (3.5)$$



Obr. 3.2: K definici vektoru proudové hustoty

Proudovou hustotu můžeme také vyjádřit pomocí objemové hustoty ρ volného náboje a rychlosti. Za elementární časový interval dt projde ploškou dS náboj dQ , který je obsažen v objemu $dV = dS \cos \alpha v dt$,

$$dQ = \rho dV = \rho dS \cos \alpha v dt. \quad (3.6)$$

Potom

$$J = \frac{dI}{dS \cos \alpha} = \frac{\frac{dQ}{dt}}{dS \cos \alpha} = \rho v, \quad (3.7)$$

$$\vec{J} = \rho \vec{v}. \quad (3.8)$$

Je-li proud vyvolán pohybem několika různých typů nosičů náboje, je výsledná proudová hustota dána superpozicí složek podle (3.8).

Ke znázornění směru pohybu elektrického náboje slouží **proudové čáry**. V každém bodě proudové čáry leží příslušný vektor \vec{J} v tečně k této čáře. Soustava proudových čar tvoří proudovou trubici.

Vytéká-li elektrický proud I z určitého objemu V vodivého prostředí, ohraničeného uzavřenou plochou S , musí se to projevit obecně úbytkem náboje uvnitř objemu. Platí

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt}, \quad (3.9)$$

kde dQ značí změnu náboje v objemu a vektor $d\vec{S}$ je orientován ve směru vytékajícího proudu. Rovnice (3.9) vyjadřuje **princip kontinuity proudu v integrálním tvaru**.

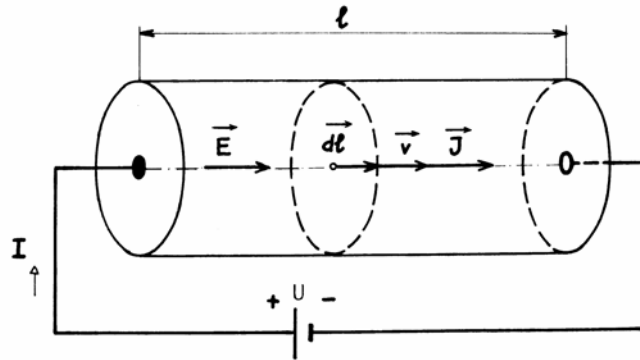
Pro ustálený proud je ve vodiči stacionární elektrické pole a náboj Q v uvažovaném objemu musí zůstat konstantní. Potom $\frac{dQ}{dt} = 0$ a rovnice (3.9) má pro ustálený proud tvar

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (3.10)$$

Tato rovnice vyjadřuje skutečnosti, že elektrický proud, který určitou částí uzavřené plochy S do objemu vtéká, jinou částí plochy S vystupuje. Rovnice (3.10) je obecným tvarem **prvního Kirchhoffova zákona**.

3.3 Ohmův zákon

Uvažujme vodič délky l a průřezu S (rovina řezu je kolmá ke směru proudu), který je připojen ke zdroji o svorkovém napětí U (obr. 3.3).



Obr. 3.3: K odvození Ohmova zákona

Proudovou hustotu můžeme vyjádřit podle (3.8) ve tvaru

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = ne\mu \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (3.11)$$

kde \vec{v} je střední rychlost uspořádaného pohybu nosičů kladného náboje, n je koncentrace volných nosičů náboje, e je absolutní hodnota elektrického náboje nosiče, $\rho = ne$ je objemová hustota volného náboje, μ je pohyblivost nosičů ($\vec{v} = \mu \vec{E}$), $\gamma = ne\mu$ je měrná elektrická vodivost, \vec{E} je intenzita elektrického pole ve vodiči.

Rovnice

$$\vec{J} = \gamma \vec{E} \quad (3.12)$$

je vyjádřením **Ohmova zákona v diferenciálním tvaru**. Obecně může být intenzita \vec{E} vyvolána jak elektrickým polem, tak polem jiné povahy (např. vnějším magnetickým polem při pohybu vodiče).

Napětí na vodiči U určíme integrací po proudové čáře, pro kterou platí $\vec{J} \cdot d\vec{l} = J dl$, kde $d\vec{l}$ je element proudové čáry. Podle (2.35) a (3.12) platí

$$U = \int_0^l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_0^l \frac{\vec{J}}{\gamma} \cdot d\vec{l} = \int_0^l \frac{J}{\gamma} dl. \quad (3.13)$$

Určíme hodnotu napětí pro konstantní proudovou hustotu a konstantní γ po celé délce vodiče. Uvážíme-li, že $I = JS$, je

$$U = \frac{J}{\gamma} l = \frac{l}{\gamma S} I = \rho \frac{l}{S} I = RI \quad (3.14)$$

kde $\rho = \frac{1}{\gamma}$ je **měrný elektrický odpor** (nezaměňovat s objemovou hustotou náboje), R je **elektrický odpor**,

$$R = \frac{\rho l}{S}. \quad (3.15)$$

Jednotkou elektrického odporu je ohm (Ω),

$$[R] = \frac{[U]}{[I]} = \frac{\text{V}}{\text{A}} = \Omega. \quad (3.16)$$

Veličina $G = \frac{1}{R}$ se nazývá vodivost daného vodiče.

Rovnice $U = RI$ je vyjádřením **Ohmova zákona v integrálním tvaru**.

3.4 Elektrický odpor vodičů

Odpor vodiče R je podle (3.14) definován jako poměr mezi napětím na svorkách vodiče a proudem, který vodičem prochází,

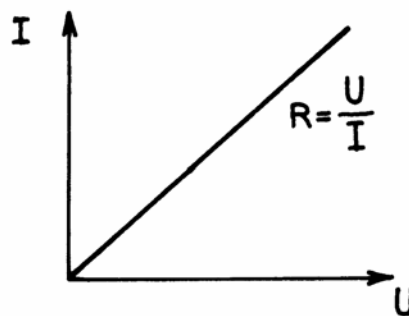
$$R = \frac{U}{I}. \quad (3.17)$$

Pro určení odporu vodiče je důležitá **voltampérová charakteristika** (VA charakteristika) vodiče, která udává závislost proudu procházejícího vodičem na napětí na vodiči. Podle tvaru voltampérové charakteristiky rozdělujeme vodiče na lineární (lineární prvek, lineární rezistor) a nelineární (obr. 3.4).

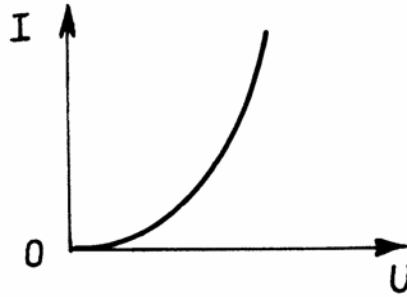
U vodičů s nelineární VA charakteristikou můžeme definovat **statický odpor** R_s podle (3.17) a **dynamický odpor** (diferenciální odpor)

$$R_d = \frac{dU}{dI}. \quad (3.18)$$

Používáme-li vodiče jako spojovací vedení k přenosu elektrické energie, je jejich elektrický odpor nežádoucí vlastností, neboť v důsledku odporu vedení dochází ke ztrátám elektrické energie ve vedení. Vodiče s definovanou velikostí odporu však můžeme používat též jako prvky elektrických obvodů, jako děliče napětí, k regulaci proudu v obvodu, převodníků proudu na napětí, prvků elektrických filtrů a pod. Takový vodič nazýváme **odpor** (rezistor).



Obr. 3.4: a) Voltampérová charakteristika kovového vodiče



Obr. 3.4.b) Voltampérová charakteristika polovodičové diody

Technické provedení odporů (součástek) závisí na účelu, ke kterému se mají používat. Podle konstrukčního provedení je dělíme na dvě skupiny:

1. odpory se dvěma vývody (pevné a nastavitelné),
2. odpory s více než dvěma vývody (s odbočkami a potenciometry).

Z technologického hlediska dělíme odpory na vrstevové (odporový materiál ve formě vrstvy) a na drátové (vinuté odporovým drátem).

Vrstevové odpory jsou tvořeny keramickým nosným tělískem obvykle tvaru válce, na jehož povrchu je nanášena odporová vrstva uhlíková (uhlíkový prášek s vhodným plnidlem) nebo z oxidů kovů nebo slitin.

Drátové rezistory jsou vinuty odporovým drátem na nosné tělísko.

Charakteristickými parametry odporů jsou jmenovitý odpor, jeho tolerance, jmenovité výkonové zatížení, největší dovolené napětí a teplotní součinitel odporu.

3.4.1 Řazení odporů

Odpory můžeme spojovat do série, paralelně nebo kombinovat paralelní a sériové zapojení.

Při **sériovém spojení** odporů (obr. 3.5a) je výsledné napětí

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_2 + \dots + U_n = R_1 I + R_2 I + \dots + R_n I = \\ &= (R_1 + R_2 + \dots + R_n) I = RI. \end{aligned} \quad (3.19)$$

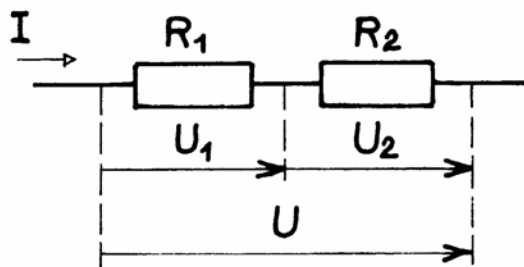
Výsledný odpor R je dán při sériovém řazení odporů součtem dílčích odporů.

Při **paralelním spojení** odporů je výsledný proud I dán součtem proudů, které protékají jednotlivými odpory (obr. 3.5b)

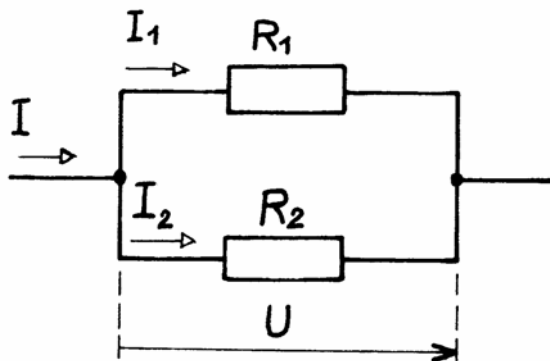
$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 + \dots + I_n = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \dots + \frac{U}{R_n} = \\ &= U \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n} \right) = U \frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Pro výsledný odpor R při paralelním řazení odporů tedy platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (3.21)$$



Obr. 3.5: a) Sériové řazení dvou odporů



b) Paralelní řazení dvou odporů

Příklad 3.2

Výsledný odpor dvou vodičů spojených do série je $R_s = 5 \Omega$. Jsou-li zapojeny paralelně, je výsledný odpor $R_p = 1,2 \Omega$. Vypočítejte odpor vodičů R_1 a R_2 .

Řešení:

Spojíme-li vodiče o odporu R_1 a R_2 sériově, platí pro výsledný odpor této kombinace

$$R_s = R_1 + R_2.$$

Při paralelním spojení platí

$$R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Z těchto rovnic dostáváme pro odpor R_1 kvadratickou rovnici

$$R_1^2 - R_1 R_s + R_p R_s = 0,$$

$$R_1^2 - 5\Omega R_1 + 6\Omega^2 = 0.$$

Její řešení dostáváme

$$R_1 = \frac{5\Omega \pm \sqrt{(5\Omega)^2 - 4 \cdot 6\Omega^2}}{2} = \begin{cases} 3\Omega \\ 2\Omega \end{cases}$$

$$\text{Odpor } R_2 = R_s - R_1 = \begin{cases} 2\Omega \\ 3\Omega \end{cases}$$

Uvedenému zadání vyhovuje dvojice odporů $3\ \Omega$ a $2\ \Omega$.

Úkol 3.1

Elektrický obvod se skládá ze tří vodičů stejné délky, zhotovených ze stejného materiálu a různých průřezů $1\ \text{mm}^2$, $2\ \text{mm}^2$ a $3\ \text{mm}^2$. Všechny tři vodiče jsou zapojeny do série a připojeny ke zdroji elektrického proudu o svorkovém napětí $12\ \text{V}$. Určete napětí na jednotlivých vodičích.



[6,545 V; 3,273 V; 2,182 V]

Úkol 3.2

V hale je zapojeno 20 žárovek $220\ \text{V}/60\ \text{W}$ pomocí přípojky dlouhé $25\ \text{m}$ na síť $220\ \text{V}$, $50\ \text{Hz}$. Jaký musí být průřez měděných vodičů přípojky, aby úbytek napětí na přípojce nepřesáhl $3,3\ \text{V}$? Měrný odpor mědi je $\rho = 1,78 \cdot 10^{-8}\ \Omega \cdot \text{m}$.



[1,47 mm^2 nebo větší]

3.4.2 Závislost odporu vodičů na teplotě

U kovových vodičů dochází při zvyšování teploty vodiče k růstu elektrického odporu. Pro malé teplotní změny $\Delta T = T - T_0$ platí pro změnu odporu ΔR



$$\Delta R = \alpha R_0 \Delta T, \quad (3.22)$$

kde R_0 je odpor při teplotě T_0 a α je teplotní součinitel odporu. Výsledný odpor R při teplotě T je potom dán vztahem

$$R = R_0 + \Delta R = R_0(1 + \alpha \Delta T). \quad (3.23)$$

Při větších teplotních rozdílech ΔT platí pro výsledný odpor vztah

$$R = R_0[1 + \alpha \Delta T + \beta(\Delta T)^2], \quad (3.24)$$

kde součinitelé α a β závisí na typu kovu, čistotě a strukturním stavu kovu. Např. pro platinu v intervalu teplot $0\ ^\circ\text{C}$ až $630\ ^\circ\text{C}$ je $\alpha = 3,9075 \cdot 10^{-3}\ \text{K}^{-1}$, $\beta = -0,575 \cdot 10^{-6}\ \text{K}^{-2}$. Má-li tedy platinový vodič při teplotě $0\ ^\circ\text{C}$ odpor $100\ \Omega$, má při teplotě $100\ ^\circ\text{C}$ odpor $138,5\ \Omega$.

Růst odporu kovů s teplotou je způsoben tím, že při zvyšování teploty kovového vodiče se zvyšuje amplituda tepelných kmitů iontů mřížky kovu. Tím dochází ke zvyšování pravděpodobnosti srážek s vodivostními elektrony, což se projevuje snížením hodnoty proudu ve vodiči (klesá rychlost uspořádaného pohybu elektronů).

U některých slitin kovů (manganin, konstantan, nikelin aj.) je závislost odporu na teplotě velmi malá. Tyto slitiny se používají k výrobě odporů a odporových normálů.

Příklad 3.3



Žárovkou zapojenou na elektrickou síť o efektivní hodnotě elektromotorického napětí $U = 220 \text{ V}$ prochází při provozní teplotě wolframového vlákna $T = 2500 \text{ °C}$ proud $I = 0,272 \text{ A}$. Jak velký je nárazový proud I_0 v okamžiku rozsvícení žárovky při teplotě vlákna $T_0 = 20 \text{ °C}$, je-li teplotní součinitel odporu wolframu $\alpha = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$?

Řešení:



Při teplotě T je odpor žárovky

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T) = \frac{U}{I},$$

kde R_0 je odpor při teplotě T_0 a $\Delta T = T - T_0$. Odtud určíme počáteční odpor

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha\Delta T} = \frac{U}{I(1 + \alpha\Delta T)} = \frac{220 \text{ V}}{0,272 \text{ A} (1 + 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1} \cdot 2480 \text{ K})} = 72,42 \Omega.$$

Nárazový proud I_0 určíme z Ohmova zákona

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = \frac{220 \text{ V}}{72,42 \Omega} = 3,04 \text{ A}.$$

Poměr k nárazového a provozního proudu je

$$k = \frac{I_0}{I} = \frac{3,04 \text{ A}}{0,272 \text{ A}} = 11,17.$$

3.5 Práce a výkon elektrického proudu



Protéká-li vodičem o odporu R (obr. 3.6) ustálený stejnosměrný proud I , projde vodičem za dobu t elektrický náboj $Q = It$. Elektrické pole ve vodiči přitom koná práci

$$W = UQ = UIt, \quad (3.25)$$

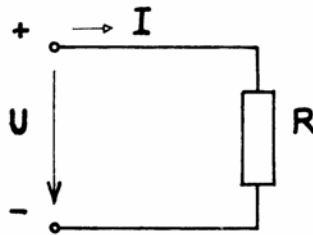
kde U je napětí na svorkách vodiče.

Výkon ustáleného stejnosměrného proudu je potom

$$P = \frac{W}{t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}. \quad (3.26)$$

Práce W , kterou koná elektrické pole ve vodiči při průchodu proudu, se projeví jako přírůstek kinetické energie volných nosičů náboje. Část této energie se při srážkách nosičů náboje s jinými částicemi vodiče (u kovů např. s ionty krystalové mřížky) předává těmto částicím. Dochází ke zvýšení vnitřní energie látky,

keré se projeví zvýšením teploty látky. Tato tepelná energie se nazývá Jouleovo teplo.



Obr. 3.6: Obvod se spotřebičem (odporem)

Úkol 3.3

Odpor topné spirály elektrického vařiče je 64Ω . Určete dobu, za kterou uvede vařič do varu $0,6 \text{ l}$ vody o teplotě 10°C , je-li účinnost vařiče 60% a vařič je připojen k síti o efektivní hodnotě elektromotorického napětí 220 V . Měrná tepelná kapacita vody je $4186 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Kolik zaplatíme za ohřátí tohoto množství vody, je-li cena za 1 kWh $1,74 \text{ Kč}$?



[498 s; 0,18 Kč]

Úkol 3.4

V elektrickém ohřivači vody o obsahu 80 l se má ohřát voda z 19°C na 90°C v době od 22 hodin do 5 hodin ráno.



- Jak velká je spotřeba elektrické energie odebírané ze sítě 220 V , jsou-li tepelné ztráty za tuto dobu $1,2 \text{ MJ}$?
- Jak velký musí být příkon topné vložky a její provozní odpor?
- Kolik zaplatíme za 1 l ohřáté vody, stojí-li 1 kWh elektrické energie $1,74 \text{ Kč}$? Měrná tepelná kapacita vody je $4186 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

[24,98 MJ; 0,99 kW, 48,9 Ω ; 0,16 Kč]

Úkol 3.5

Elektrický vařič má dvě topné spirály, které můžeme zapínat jednotlivě nebo paralelně. Zapnutím první spirály ohřejeme 1 l vody z teploty 20°C na teplotu 100°C za 14 minut. Totéž množství vody ohřejeme druhou spirálou za 8 minut. Za jakou dobu se ohřeje stejné množství vody, jsou-li ve funkci obě spirály současně? Jaké jsou výkony jednotlivých spirál? Měrná tepelná kapacita vody je $4186 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. [5,09 min; 399 W, 698 W]

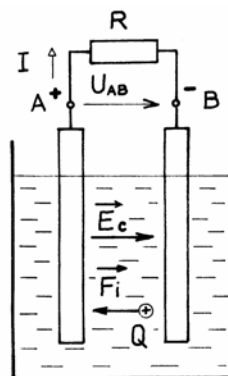


3.6 Elektrický zdroj



Elektrický zdroj je aktivním prvkem elektrického obvodu, který dodává do pasivních prvků (např. odporů) elektrickou energii. Protéká-li elektrickým obvodem ustálený stejnosměrný proud, musí udržovat elektrický zdroj na svorkách obvodu konstantní napětí.

Funkci elektrického zdroje můžeme ukázat na příkladu galvanického článku (obr. 3.7).



Obr. 3.7: Elektrické pole v galvanickém článku

Elektrické napětí U_{AB} mezi kladnou a zápornou elektrodou vzniká v důsledku elektrochemických procesů uvnitř článku. Aby se při průchodu elektrického proudu ve vnějším obvodu o odporu R udržovalo napětí U_{AB} konstantní, je nutné přenášet kladný náboj ve zdroji od záporné elektrody ke kladné nebo záporný náboj opačným směrem proti silám stacionárního elektrického pole o intenzitě \vec{E}_c , vytvořeného náboji na elektrodách. Tento přenos náboje ve zdroji je způsoben neelektrostatickou silou \vec{F}_i , kterou nazýváme **rozdělující síla**.

Rozdělující síly vznikají v elektrochemických zdrojích v důsledku elektrochemických reakcí kovových elektrod a elektrolytu. Ve fotoelektrickém zdroji vznikají v důsledku fotoelektrického jevu. V termoelektrickém zdroji mají původ v termoelektrických jevech. U elektrodynamických zdrojů vznikají např. při pohybu vodiče v magnetickém poli.

3.6.1 Elektromotorické napětí

Práce rozdělující síly \vec{F}_i při přenosu náboje Q po dráze mezi oběma elektrodami zdrojem je

$$W = \int_B^A \vec{F}_i \cdot d\vec{r}. \quad (3.27)$$

Elektromotorickým napětím U_e nazýváme podíl práce W a přeneseného náboje Q

$$U_e = \frac{W}{Q}. \quad (3.28)$$

Jednotkou U_e je volt. Při přenosu náboje Q vnějším obvodem vykoná tedy elektrický zdroj stejnou práci

$$W = U_e Q. \quad (3.29)$$

Je-li zdroj ve stavu naprázdno (ke svorkám zdroje není připojen vnější obvod), je výsledná síla \vec{F} působící na náboj Q ve zdroji nulová

$$\vec{F} = \vec{F}_i + Q\vec{E}_c = 0 \quad (3.30)$$

a intenzita elektrostatického pole

$$\vec{E}_c = -\frac{\vec{F}_i}{Q}. \quad (3.31)$$

Svorkové napětí U_{AB} naprázdno je potom

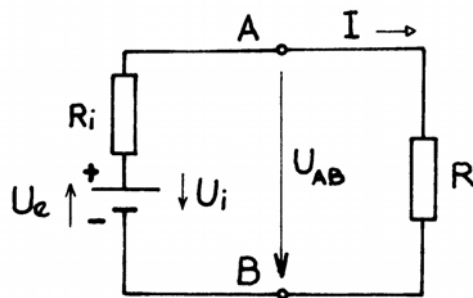
$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E}_c \cdot d\vec{r} = \int_A^B \left(-\frac{\vec{F}_i}{Q} \right) \cdot d\vec{r} = \frac{1}{Q} \int_B^A \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = U_e \quad (3.32)$$

Svorkové napětí zdroje ve stavu naprázdno se rovná elektromotorickému napětí zdroje.

Vodivá cesta ve zdroji (např. elektrolyt v galvanickém článku, vinutí v dynamu) má **vnitřní odpor** R_i daný materiálem a geometrií této vodivé cesty. Při průchodu elektrického proudu I zdrojem vzniká na vnitřním odporu napětí $R_i I$, které je příčinou poklesu napětí U_{AB} na svorkách zdroje (svorkového napětí). Platí

$$U_{AB} = U_e - R_i I = RI, \quad (3.33)$$

kde U_e je elektromotorické napětí zdroje, R_i je vnitřní odpor zdroje, I je proud procházející obvodem, R je odpor vnějšího obvodu. Elektrický zdroj ustáleného stejnosměrného proudu můžeme tedy nahradit ideálním zdrojem o elektromotorickém napětí U_e (s nulovým vnitřním odporem) a sériovým odporem R_i (obr. 3.8).



Obr. 3.8: Uzavřený elektrický obvod s elektrickým zdrojem

Na obrázku je též vyznačen šipkou kladný směr elektromotorického napětí, který je dán směrem pohybu kladného náboje ve zdroji. V teorii elektrických obvodů se užívá místo elektromotorického napětí U_e napětí zdroje U_i (nebo

vnitřní napětí), které se rovná svorkovému napětí naprázdno, a které je orientováno od kladné svorky k záporné. Podle (3.32) je $U_i = U_e$.

3.6.2 Přenos maximálního výkonu

Výkon přenášený ze zdroje do spotřebiče o odporu R (obr. 3.8) je dán vztahem

$$P = RI^2 = R \frac{U_e^2}{(R + R_i)^2}. \quad (3.34)$$

Tento výkon závisí na velikosti odporu spotřebiče R . Maximální hodnoty výkonu dodávaného do spotřebiče v závislosti na velikosti jeho odporu R se dosahuje, je-li splněna podmínka

$$\frac{dP}{dR} = 0. \quad (3.35)$$

Ze vztahu (3.34) a (3.35) dostáváme

$$\frac{dP}{dR} = \frac{U_e^2}{(R + R_i)^2} - 2R \frac{U_e^2}{(R + R_i)^3} = 0. \quad (3.36)$$

Rovnice (3.36) je splněna pro $R = R_i$. Tato podmínka je tedy podmínkou přenosu maximálního výkonu ze zdroje do spotřebiče (**podmínka výkonového přizpůsobení**). Hledaný maximální výkon je potom

$$P_m = \frac{U_e^2}{4R_i}. \quad (3.37)$$

Příklad 3.4



Máme $n_0 = 24$ identických stejnosměrných zdrojů elektrického proudu (galvanických článků) o elektromotorickém napětí $U_e = 1,5$ V a vnitřním odporu $R_i = 0,8$ Ω. Chceme z nich vytvořit m paralelních skupin tak, aby v každé skupině bylo n sériově zapojených zdrojů, a aby výkon přenášený do spotřebiče o odporu $R_z = 1,2$ Ω byl maximální. Určete čísla m a n .

Řešení:



Využijeme poznatku, že při paralelním zapojení identických zdrojů se elektromotorické napětí výsledného zdroje nemění a vnitřní odpor výsledného zdroje je dán paralelním spojením vnitřních odporů dílčích zdrojů. Při sériovém zapojení se sčítají elektromotorická napětí a rovněž výsledný vnitřní odpor je dán součtem vnitřních odporů dílčích zdrojů. Každá sériová skupina se skládá z n sériově řazených zdrojů a dá se tedy nahradit zdrojem o elektromotorickém napětí $U_{es} = n U_e$ a vnitřním odporu $R_{is} = n R_i$. Zařadíme-li m takových skupin paralelně, lze tuto kombinaci nahradit zdrojem o elektromotorickém napětí $U_{ep} = U_{es} = n U_e$ a vnitřním odporu

$$R_{ip} = \frac{R_{is}}{m} = \frac{n}{m} R_i.$$

Uvedená baterie bude dodávat do spotřebiče o odporu R_z proud

$$I = \frac{U_{ep}}{R_z + R_{ip}} = \frac{nU_e}{R_z + \frac{n}{m}R_i}$$

$$\text{a výkon } P = R_z I^2 = \frac{R_z n^2 U_e^2}{\left(R_z + \frac{n}{m}R_i\right)^2}.$$

Ze vztahu (3.35) a (3.36) vyplývá, že tento výkon bude maximální, bude-li splněna podmínka výkonového přizpůsobení, tj. $R_{ip} = R_z$. Potom $\frac{n}{m}R_i = R_z$,

$$\frac{n}{m} = \frac{R_z}{R_i} = \frac{1,2 \Omega}{0,8 \Omega} = 1,5.$$

Současně musí platit $m \cdot n = n_0$, $m \cdot n = 24$.

Řešením těchto dvou rovnic dostáváme $m = 4$, $n = 6$.

Uvedeným zapojením článků vznikne baterie o elektromotorickém napětí

$U_{ep} = n U_e = 6 \cdot 1,5 \text{ V} = 9 \text{ V}$ a vnitřním odporu

$$R_{ip} = \frac{n}{m} R_i = \frac{6}{4} 0,8 \Omega = 1,2 \Omega.$$

Spotřebičem bude potom protékat proud

$$I = \frac{U_{ep}}{R_{ip} + R_z} = \frac{9 \text{ V}}{1,2 \Omega + 1,2 \Omega} = 3,75 \text{ A}.$$

Do spotřebiče bude dodáván elektrický výkon

$$P = R_z I^2 = 1,2 \Omega \cdot (3,75 \text{ A})^2 = 16,88 \text{ W}.$$

Úkol 3.6

Zdroj elektrického proudu má při odběru proudu 3 A svorkové napětí 24 V, při odběru 4 A svorkové napětí 20 V. Určete:



- odpor spotřebiče v obou případech,
- vnitřní odpor zdroje,
- elektromotorické napětí zdroje.

[8Ω, 5Ω; 4Ω; 36V]

Úkol 3.7

Jak je třeba zapojit dva zdroje elektrického proudu, z nichž má každý elektromotorické napětí 1,5 V a vnitřní odpor 1,4 Ω, aby spotřebičem o odporu 0,2 Ω protékal co největší proud. [Paralelně, $I = 1,67 \text{ A}$]

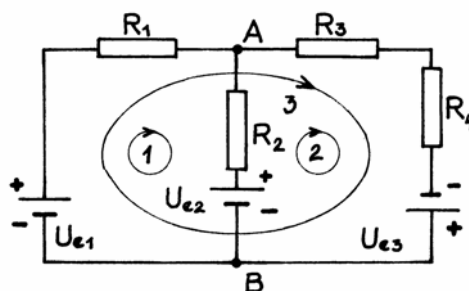


3.7 Řešení obvodů s časově nezávislými elektrickými proudy

3.7.1 Elektrický obvod



Elektrické obvody se skládají z aktivních a pasivních prvků (zdrojů, odporů, kondenzátorů, cívek aj.), které jsou vzájemně propojeny podle účelu a funkce obvodu. Prvkem elektrického obvodu rozumíme základní, dále nedělitelnou část obvodu. Prvky elektrických obvodů mohou být dvojpóly (odpory, elektrické zdroje aj.) nebo vícepóly (transformátor, tranzistor aj.). Dále budeme uvažovat jen obvody sestavené z elektrických zdrojů a odporů. Každý uvedený dvojpól je do obvodu zapojen dvěma svorkami (póly). Spoj tří nebo více dvojpólů tvoří **uzel** (uzel třetího nebo vyššího řádu). Nerozvětvený úsek elektrického obvodu mezi dvěma uzly se nazývá **větev**. Libovolný uzavřený okruh v elektrickém obvodu se nazývá **smyčka**. Složená smyčka v sobě zahrnuje dvě nebo více smyček jednoduchých. Příklad elektrického obvodu sestaveného ze tří zdrojů a čtyř odporů je uveden na obr. 3.9.



Obr. 3.9: Příklad elektrického obvodu

Tento obvod obsahuje dva uzly A a B , tři větve a tři smyčky (dvě jednoduché a jednu složenou).

Řešením elektrického obvodu rozumíme určení zbývajících neznámých parametrů, např. proudů ve větvích, napětí na odporech, výkonů dodávaných do odporů a podobně, k zadaným parametrům obvodu.

3.7.2 Metoda postupného zjednodušování obvodu

Tato metoda je vhodná pro obvody s jedním zdrojem nebo pro skupiny odporů ve složitějších obvodech. Její podstatou je nahrazování sériových a paralelních skupin odporů jedním náhradním odporem. Příklad obvodu je uveden na obr. 3.10.

Chceme-li určit proud I tekoucí ze zdroje do obvodu, zjednodušujeme obvod zprava doleva. Sériovou kombinací odporů 3Ω a 1Ω nahradíme výsledným odporem 4Ω (obr. 3.10b). Paralelní kombinaci odporů o hodnotě 4Ω a 4Ω na-

hradíme výsledným odporem 2Ω (obr. 3.10c). Potom do daného obvodu teče proud $I = \frac{10\text{ V}}{4\ \Omega} = 2,5\text{ A}$.

3.7.3 Kirchhoffovy zákony

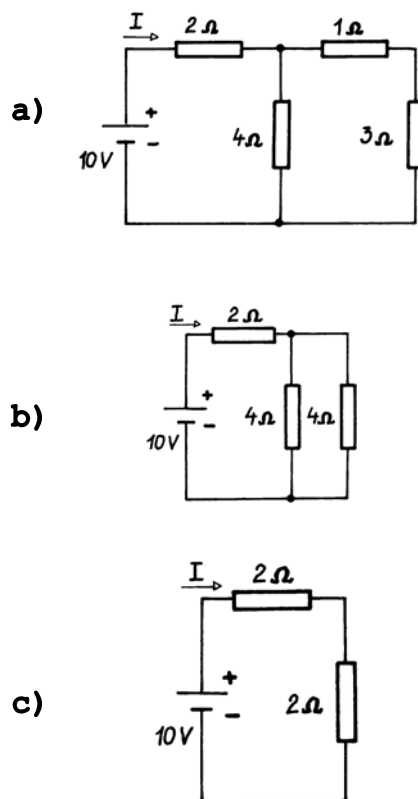
Z principu kontinuity proudu pro ustálený elektrický proud vyplývá **první Kirchhoffův zákon** (I.K.z.): Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule,

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0. \quad (3.38)$$

Proudy vystupující z uzlu dosazujeme s opačným znaménkem než proudy do uzlu vstupující.

Tento zákon vyjadřuje skutečnost, že při průchodu ustáleného proudu obvodem se v žádném místě obvodu nehromadí náboj a potenciál je v každém bodě obvodu stálý.

Podle I.K.z. lze napsat tolik rovnic pro proudy, kolik má daný obvod uzlů. Z nich je však vždy jedna rovnice závislá, vyplývá z platnosti ostatních. Je-li q počet všech uzlů obvodu, můžeme tedy napsat podle I.K.z. $q-1$ nezávislých rovnic pro proudy.



Obr. 3.10: Elektrický obvod s jedním zdrojem

Druhý Kirchhoffův zákon (II.K.z.) je v podstatě zákonem zachování energie v elektrickém obvodu. Pro libovolnou smyčku obvodu platí: Algebraický součet všech elektromotorických napětí působících v uzavřené smyčce se rovná algebraickému součtu úbytků napětí na všech odporech dané smyčky,

$$\sum_{k=1}^n U_{ek} = \sum_{k=1}^m R_k I_k, \quad (3.39)$$

kde n je počet zdrojů ve smyčce a m je počet odporů ve smyčce (včetně vnitřních odporů zdrojů).

Podle II.K.z. lze pro obvod sestavit tolik rovnic, kolik je v obvodu uzavřených smyček. Dá se však dokázat, že počet nezávislých rovnic (resp. počet nezávislých smyček) je

$$l = p - q + 1, \quad (3.40)$$

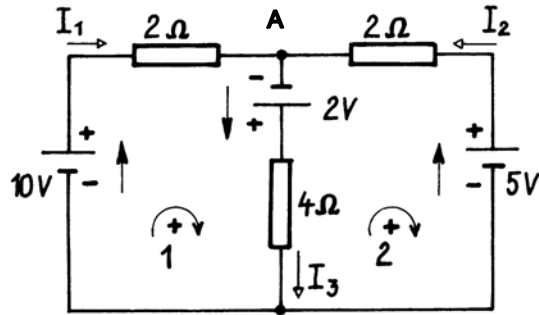
kde p je počet větví obvodu, q je počet všech uzlů.

3.7.4 Řešení elektrických obvodů pomocí Kirchhoffových zákonů

V elektrickém obvodu se známými zdroji a odpory máme obvykle za úkol určit proudy a napětí na odporech. Při použití Kirchhoffových zákonů pro řešení obvodů dodržujeme následující postup:

1. Zvolíme a vyznačíme ve schématu libovolně směry hledaných proudů (záporné znaménko proudu ve výsledku označí ty proudy, jejichž skutečný směr je opačný).
2. Vyznačíme kladné směry elektromotorických napětí U_{ek} (od záporné svorky ke kladné).
3. Vyznačíme libovolně směry oběhu ve smyčkách.
4. Napíšeme uzlové rovnice pro proudy v nezávislých uzlech (pro q uzlů $q-1$ rovnic).
5. Sestavíme smyčkové rovnice pro nezávislé smyčky (celkem $p-q+1$ rovnic pro celkový počet p větví obvodu a q uzlů). Přitom elektromotorická napětí U_{ek} dosazujeme s kladným znaménkem, souhlasí-li zvolený směr oběhu s kladným směrem U_{ek} . V opačném případě dosazujeme U_{ek} se záporným znaménkem. Úbytky napětí $R_k I_k$ dosazujeme s kladným znaménkem, souhlasí-li zvolený směr proudu I_k v odporu R_k se zvoleným směrem oběhu. V opačném případě dosazujeme součin $R_k I_k$ se záporným znaménkem.
6. Provedeme řešení dané soustavy rovnic pro neznámé proudy buďto postupným zjednodušováním soustavy rovnic nebo použitím Cramerova pravidla pomocí determinantů nebo řešením pomocí maticového počtu.

Jako příklad uvedeme řešení obvodu podle obr. 3.11.



Obr. 3.11: Příklad řešení elektrického obvodu

Pro daný elektrický obvod můžeme napsat jednu nezávislou uzlovou rovnici podle I.K.z. a dvě nezávislé smyčkové rovnice podle II.K.z.

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0 \quad (1) \quad (\text{pro uzel A})$$

$$2\Omega I_1 + 4\Omega I_3 = 10\text{V} + 2\text{V} \quad (2) \quad (\text{pro smyčku 1})$$

$$-2\Omega I_2 - 4\Omega I_3 = -5\text{V} - 2\text{V} \quad (3) \quad (\text{pro smyčku 2})$$

Řešením soustavy rovnic (1), (2), (3) dostaneme $I_1 = 2,2 \text{ A}$, $I_2 = -0,3 \text{ A}$ a $I_3 = 1,9 \text{ A}$.

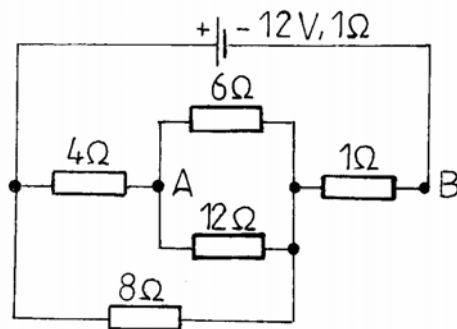
Úkol 3.8

V zapojení podle obr. 3.12 určete:



- proud tekoucí elektrickým zdrojem o elektromotorickém napětí 12 V a vnitřním odporu 1Ω ,
- proud v každém odporu,
- potenciální rozdíl mezi body A a B.

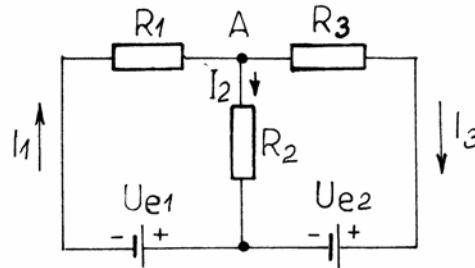
[2 A ; 2 A pro 1Ω , 1 A pro 4Ω , 1 A pro 8Ω , $2/3 \text{ A}$ pro 6Ω , $1/3 \text{ A}$ pro 12Ω ; 6 V]



Obr. 3.12: K úkolu 3.8

Úkol 3.9

V elektrickém obvodu podle obr. 3.13 jsou zapojeny zdroje elektrického proudu o elektromotorických napětích $U_{e1} = 20\text{ V}$, $U_{e2} = 30\text{ V}$ a odporech $R_1 = 320\ \Omega$, $R_2 = 200\ \Omega$ a $R_3 = 250\ \Omega$.



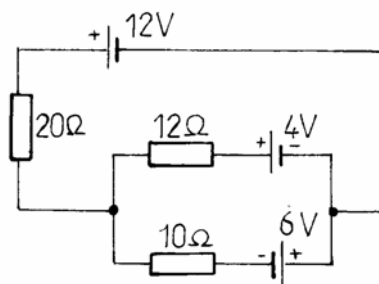
Obr. 3.13: K úkolu 3.9

Určete hodnoty proudů, které protékají jednotlivými odpory a napětí na odporech.

$[-77,3\text{ mA}, -24,74\text{ V}; 23,7\text{ mA}, 4,74\text{ V}; -101\text{ mA}, -25,26\text{ V}]$

Úkol 3.10

Určete výkony elektrického proudu dodávané do jednotlivých odporů obvodu podle obr. 3.14. [Pro $20\ \Omega$ $5,59\text{ W}$; pro $12\ \Omega$ $0,55\text{ W}$; pro $10\ \Omega$ $5,52\text{ W}$]



Obr. 3.14: K úkolu 3.10

3.8 Wheatstoneův most

Velmi důležitým obvodem v měřicí technice je **Wheatstoneův most** (obr. 3.15).

Most je tvořen odpory R_1, R_2, R_3, R_4 a je v uzlech A a C napájen ze zdroje proudu o elektromotorickém napětí U_e . Mezi uzly B a D je zapojen galvanometr (resp. měřič napětí).

Je-li napětí mezi body B a D nulové, neprotéká galvanometrem proud ($I_g = 0$). Tento stav označujeme jako rovnováhu mostu. V tomto případě musí platit

$$I_1 = I_2, I_3 = I_4, \quad (3.41)$$

$$U_1 = U_3, U_2 = U_4, \quad (3.42)$$

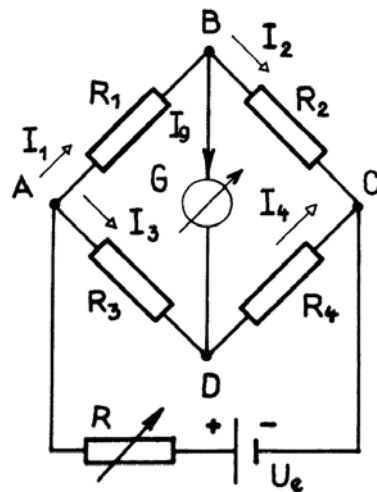
kde napětí U_k je napětí na odporu R_k ($k = 1, 2, 3, 4$). Vyjádříme-li napětí na odporech pomocí proudů a odporů, dostaneme

$$R_1 I_1 = R_3 I_3, R_2 I_2 = R_4 I_4. \quad (3.43)$$

Vzmemme-li v úvahu vztah (3.41), dostáváme

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}. \quad (3.44)$$

Rovnice (3.44) vyjadřuje rovnováhu mostu.



Obr. 3.15: Wheatstoneův most

Wheatstoneův most se používá často pro měření odporů. Je-li např. R_1 neznámý odpor a máme možnost plynule měnit hodnotu některého zbývajících odporů, nastavíme tímto proměnným a známým odporem proud $I_g = 0$ (rovnováha mostu) a hodnotu odporu R_1 určíme ze vztahu (3.44)

$$R_1 = R_2 \frac{R_3}{R_4}. \quad (3.45)$$

Tímto způsobem je možno měřit např. změnu odporu tenzometru při měření mechanického napětí nebo odpor odporového teploměru při měření teploty.

Kontrolní otázky 3.1

1. *Vysvětlete pojmy kondukční proud, konvekční proud a posuvný proud a uveďte příklady.*
2. *Uveďte definici jednotky elektrického proudu.*
3. *Na jakých veličinách závisí elektrický odpor vodičů?*
4. *Na jakých veličinách závisí výkon elektrického proudu dodávaný do spotřebiče?*
5. *Vysvětlete metodu postupného zjednodušování elektrického obvodu při řešení elektrických obvodů.*

3.9 Rozdělení látek podle elektrické vodivosti

Při působení elektrického pole na látku může dojít buďto k posuvu vázaných nábojů v atomech a molekulách látky, nebo k transportu volných nosičů náboje v látce. Elektrické vlastnosti látek jsou charakterizovány vodivostí a permitivitou. Vodivost látek je určena koncentrací volných nosičů a jejich pohyblivostí a pro různé látky se mění v rozsahu asi dvaceti řádů.

Podle elektrické vodivosti dělíme látky do tří skupin:

1. **Izolanty** – jejich měrná elektrická vodivost je menší než $10^{-8} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.
2. **Polovodiče** – měrná vodivost je $10^{-8} \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ až $10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.
3. **Vodiče** – měrná vodivost je větší než $10^6 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Vakuum a plyny jsou za normálních podmínek izolanty. Podobně čisté kapaliny (např. minerální oleje) nemají žádné volné nosiče náboje a patří mezi izolanty. V kovech je koncentrace volných nosičů náboje (elektronů) vysoká, a proto patří mezi vodiče. Pevné látky mohou být vodiči, polovodiči nebo izolanty v závislosti na jejich struktuře a teplotě.

3.10 Vedení elektrického proudu ve vakuu

Elektrický proud může ve vakuu vzniknout pouze tehdy, jestliže jsou do daného vyčerpaného prostoru dodány volné nosiče náboje (elektrony) z kovové elektrody. Uvolnění elektronů z elektrody může být způsobeno:

- a) **Tepelnou emisí** – pravděpodobnost emise elektronu ze žhavené katody je úměrná $\exp(-W_v/kT)$, kde W_v je výstupní práce (2 až 4 eV) elektronu z kovu, k je Boltzmannova konstanta, T je termodynamická teplota.
- b) **Fotoelektronovou emisí** – dopadá-li na kovovou elektrodu proud fotonů, dochází k jejich absorpci. Jestliže je energie absorbovaného fotonu E_f větší nebo rovna výstupní práci elektronu W_v , může dojít k emisi elektronu. Platí tedy:

$$E_f = hf \geq W_v, \quad (3.46)$$

kde h je Planckova konstanta a f je kmitočet příslušného elektromagnetického vlnění. Proudová hustota emitovaných elektronů je potom úměrná intenzitě ozáření elektrody.

- c) **Emise elektronů vyvolaná látkovým zářením** – vzniká např. při dopadu rychlých elektronů na povrch kovů. Absorpcí elektronu o vysoké energii se uvolní dva nebo více sekundárních elektronů.
- d) **Emise elektronů silným elektrickým polem**, neboli emise elektronů ze studené katody, vzniká působením silného elektrického pole na vodivostní elektrony kovu, které zvýší energii těchto elektronů natolik, že mohou vystoupit z kovu.

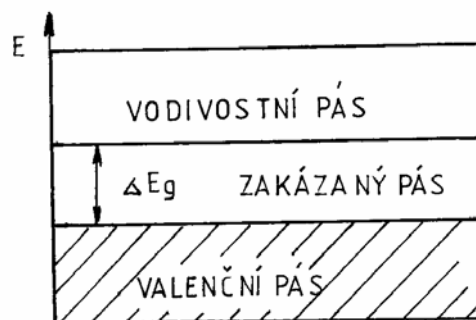
3.11 Elektrická vodivost pevných látek

Teorie elektrické vodivosti pevných látek vychází z pásové teorie krystalů, podle níž je energetické spektrum elektronů v krystalu složeno z páسů dovolených a páсů zakázaných energií. Energie elektronu v dovoleném pásu může nabývat pouze diskrétních hodnot, říkáme, že se elektron nachází na určité energetické hladině. Počet energetických hladin v pásu je však velmi velký, závisí na počtu atomů v krystalu.

Obsazování energetických hladin v pásu se řídí Pauliho principem, podle něhož mohou v každém pohybovém stavu současně existovat pouze dva elektrony s opačným spinem. Vedení elektrického proudu v látce se může uskutečňovat pouze tehdy, jestliže existují v daném energetickém pásu neobsazené energetické hladiny, na které přecházejí elektrony při svém urychlení v elektrickém poli. To znamená, že v plně obsazeném energetickém pásu se nemohou elektrony zúčastnit vedení proudu.

Pro rozlišení látek na vodiče, polovodiče a izolanty je rozhodující jejich vodivost při teplotách blízkých absolutní nule. Za teploty $T = 0$ K zaujmou elektrony stavy s nejnižšími energiemi, které obsadí podle Pauliho principu. Mohou nastat dva typické případy:

a) Nejvyšší pás, v němž jsou ještě elektrony, je plně obsazen. Další pás s vyššími energiemi je úplně volný a je oddělen pásem zakázaných energií (obr. 3.16).

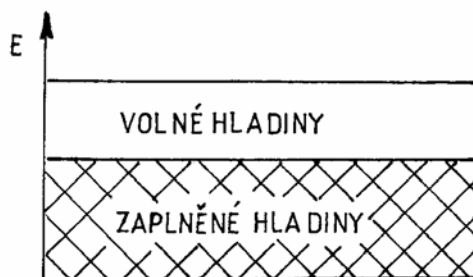


Obr. 3.16: Energetické pásy izolantu a polovodiče

V takové látce neexistují volné elektrony, a proto se nemůže uskutečnit vedení proudu. Jedná se tedy o izolant nebo polovodič. Nejvyšší plně obsazený pás se nazývá valenční (je obsazen valenčními elektrony), první neobsazený pás se nazývá vodivostní. Rozdíl energií dna vodivostního pásu a vrcholu valenčního pásu se nazývá šířka zakázaného pásu ΔE_g .

Podle velikosti ΔE_g rozdělujeme látky na izolanty ($\Delta E_g > 3\text{eV}$) a polovodiče ($\Delta E_g < 3\text{eV}$). Tato hranice se však nedá přesně definovat, protože mezi izolanty a polovodiči není kvalitativní rozdíl. Pokud by byla elektronu z valenčního pásu dodána energie rovna nebo větší než ΔE_g , může překonat zakázaný pás a přejít do vodivostního pásu.

b) Druhou skupinu tvoří ty látky, u nichž nejvyšší pás, v němž jsou elektrony, je obsazen jen částečně (obr. 3.17). Podobná situace nastává i tehdy, jestliže se valenční pás překrývá s dalším volným pásem.



Obr. 3.17: Energetické pásy vodiče

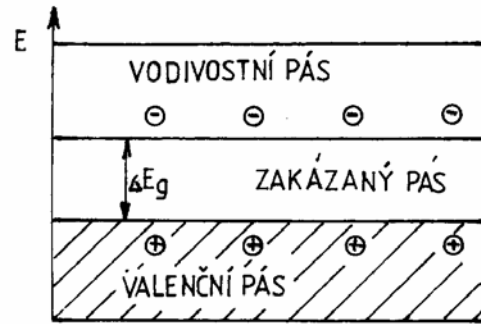
V elektrickém poli mohou elektrony zvyšovat energii, čili mohou přecházet na vyšší energetické hladiny v pásu. Látka může vést elektrický proud.

Při zvyšování teploty krystalu se zvětšuje energie atomů mříže, jejíž střední hodnota se řádově rovná kT (pro $T = 290\text{ K}$ je $kT = 0,025\text{ eV}$). Následkem tepelné excitace mohou některé elektrony přejít na volné vyšší energetické hladiny, jiné zase mohou přeskočit na volné nižší hladiny.

3.12 Vodivost polovodičů

3.12.1 Vlastní (intrinsická) vodivost

Polovodiče jsou látky, jejichž šířka zakázaného pásu je menší než u izolantů. Např. germanium má $\Delta E_g = 0,7\text{ eV}$, křemík $1,1\text{ eV}$. Při teplotě $T \rightarrow 0\text{ K}$ mají plně obsazený valenční pás a neobsazený vodivostní pás. Při dostatečně vysoké teplotě může elektron z valenčního pásu překonat působením tepelných kmitů krystalové mříže zakázaný pás a přejít do vodivostního pásu, kde je volným nosičem a přispívá k elektrické vodivosti (obr. 3.18). Ve valenčním pásu se objevuje prázdné místo, které se chová jako nosič s kladným nábojem. Nazývá se díra a může se volně přemísťovat v pásu. Tento typ vodivosti se nazývá **vlastní vodivost**.



Obr. 3.18: Energetické pásy polovodiče

Popsaný mechanismus vzniku vodivosti můžeme ukázat na příkladu germaniového krystalu. Každý atom v krystalu Ge je obklopen čtyřmi sousedními atomy, s nimiž je vázán kovalentní vazbou. Ta je uskutečněna tím, že dva sousední atomy sdílejí po jednom z valenčních elektronů. Kovalentní vazbu tedy tvoří vždy dva elektrony, jimiž je vazba nasycena. Energetické stavy těchto elektronů spadají do valenčního pásu, který je elektrony vytvářejícími vazby plně obsazen. Tepelnými kmity mřížce může dojít k vytržení elektronu z vazby, čemuž odpovídá v pásovém modelu přechod elektronu z valenčního do vodivostního pásu. Vzniká volný (vodivostní) elektron a kladně nabitá díra v kovalentní vazbě, která může být zaplněna přeskokem elektronu ze sousední vazby. Tento děj se může opakovat a výsledkem je pohyb díry po krystalu.

Je-li na krystal vloženo vnější elektrické napětí, usměrní elektrické pole pohyb elektronů proti směru intenzity elektrického pole \vec{E} . Celková proudová hustota \vec{J} je potom dána vztahem

$$\vec{J} = en\mu_n\vec{E} + ep\mu_p\vec{E}, \quad (3.47)$$

kde n a p jsou koncentrace vodivostních elektronů a děr, μ_n a μ_p je pohyblivost elektronů a děr, e je elementární náboj. Pro vlastní polovodič platí $n = p = n_i$, kde veličina n_i se nazývá intrinsická koncentrace. Koncentrace vodivostních elektronů závisí na teplotě a šířce zakázaného pásu. Platí

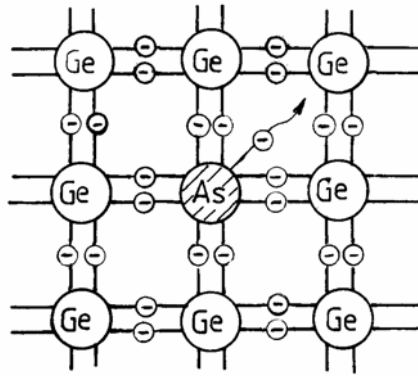
$$n = Ke^{-\frac{\Delta E_g}{2kT}}. \quad (3.48)$$

Při pokojové teplotě je pro Ge $n_i = 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$. Protože v 1 cm^3 Ge je $4,4 \cdot 10^{22}$ atomů, je tepelně ionizován v průměru 1 atom na $2 \cdot 10^9$ atomů germania.

3.12.2 Nevlastní vodivost polovodičů

Vlastnosti polovodičů lze významně ovlivnit přidáním malého množství příměsí (řádově 1 atom příměsí na 10^9 atomů základního krystalu).

Jestliže byl např. při růstu krystalu Ge přidán pětimocný arzen, bude se atom arzenu v mřížce krystalu vázat čtyřmi elektrony se čtyřmi sousedními atomy germania. Pátý elektron je slabě vázán ke kladnému jádru atomu arzenu a k jeho přechodu do vodivostního pásu dostačuje energie asi 0,05 eV (obr. 3.19).



Obr. 3.19: Arzen ve vazbě germania

Tento typ vodivosti se nazývá **nevládní vodivost typu N** (elektronová). Příměši, které vytvářejí vodivost typu N nazýváme **donory**. Jsou to např. prvky Sb a As. Donory vytvářejí v energetickém schématu příměsné hladiny v zakázaném pásu v blízkosti dna vodivostního pásu. Ionizované donory mají kladný náboj e , jsou kladnými ionty.

Jestliže v krystalové mřížce nahradíme atom Ge atomem třímocného prvku (**akceptorem**), např. atomem In, zůstává jedna vazba nenasycená. Stačí energie řádově 0,01 eV k tomu, aby některý valenční elektron sousedního atomu zaplnil toto prázdné místo ve vazbě. Atom akceptoru se stává záporným iontem a ve vazbě germania se objeví kladně nabitá díra. Vzniká **nevládní vodivost typu P** (děrová).

3.12.3 Přechod PN

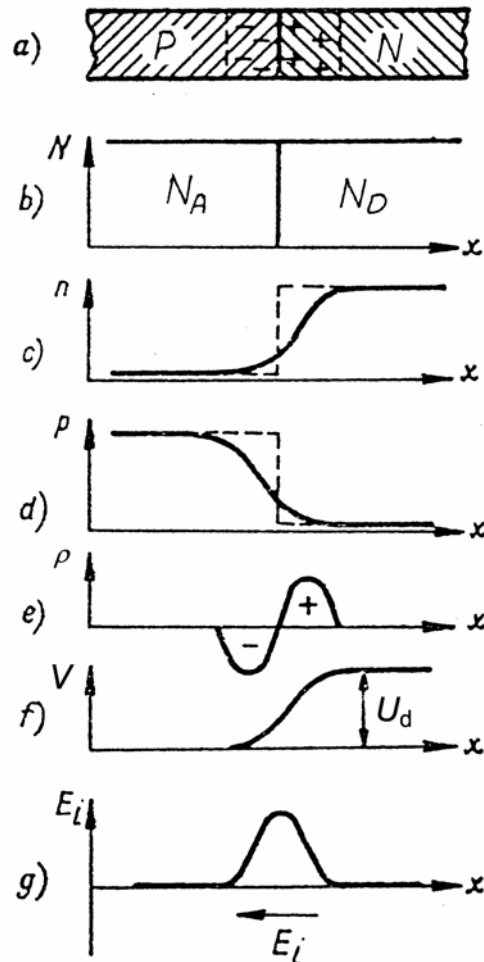
Vytvoříme-li v jednom krystalu polovodiče oblast s vodivostí typu P a oblast s vodivostí typu N, vznikne na rozhraní mezi těmito oblastmi **přechod PN** (obr. 3.20). Tento přechod lze např. vytvořit při tažení krystalu z taveniny změnou legujících příměsí. V oblasti P jsou majoritními (většinovými) nosiči díry, v oblasti N elektrony.

V důsledku vlastní vodivosti se však vyskytují v oblasti P také minoritní (menšinové) nosiče elektrony a v oblasti N minoritní díry. Koncentrace děr p v oblasti P je však mnohem větší než v oblasti N, a proto díry difundují v důsledku tepelného pohybu do oblasti N a snaží se tak vyrovnat koncentraci děr v celé oblasti. V oblasti N však rekombinují s elektrony, které jsou zde majoritními nosiči.

Ze stejného důvodu difundují elektrony z oblasti N do oblasti P, kde rekombinují s dírami. Oblast přechodu se tímto dějem ochuzuje o volné nosiče a zůstávají zde nekompensované záporné akceptory na straně polovodiče P a nekompensované kladné donory v oblasti N. V přechodu se objevuje prostorový náboj, který vytváří elektrické pole o intenzitě \vec{E}_i a potenciálu V , které brání difuzi dalších nosičů.

V dynamické rovnováze je potom difuzní proud kompenzován opačně orientovaným proudem driftovým, který vzniká v důsledku elektrického pole přechodu. Elektrické poměry na přechodu PN jsou zjednodušeně znázorněny na Obr. 3.20a) až g), kde N_A a N_D jsou koncentrace akceptorů a donorů, p a n jsou

koncentrace děr a elektronů, ρ je hustota prostorového náboje, E_i je intenzita elektrického pole v přechodu a V je potenciál. V důsledku prostorového náboje vzniká mezi oblastí N a P rozdíl potenciálů (potenciálová bariéra) U_D , kterému se říká **difuzní napětí**.



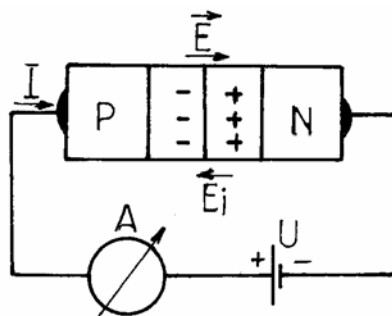
Obr. 3.20: Přechod PN

3.12.4 Polovodičové diody

Polovodičové diody jsou součástky obsahující jeden přechod PN. Dnes jsou zhotovovány nejčastěji z přechodů PN vytvořených v křemíku. Pro speciální účely se užívají diody s přechody PN z jiných materiálů, např. GaAs, GaP, GaAlAs, GaAsP a dalších.

Činnost polovodičové diody je odvozena z vlastností PN přechodu polarizovaného v přímém, resp. zpětném směru.

Je-li přechod PN polarizován v přímém směru (propustný stav přechodu PN), je kladný pól vnějšího zdroje připojen na oblast P a záporný pól na oblast N, obr. 3.21.



Obr. 3.21: Propustný stav přechodu PN

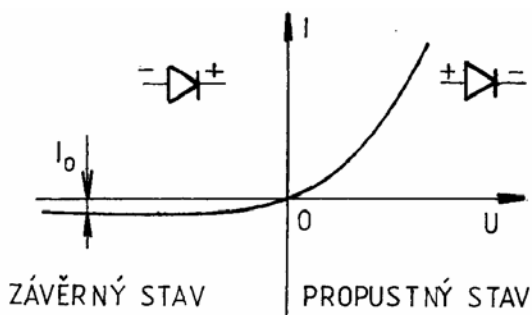
Intenzita elektrického pole \vec{E} vytvořená vnějším zdrojem o svorkovém napětí U v přechodu je orientována proti intenzitě \vec{E}_i elektrického pole prostorového náboje přechodu. Potenciálová bariéra mezi oběma oblastmi se zmenšuje a difuzní proudy, elektronový a děrový, se zvětšují. Celkový proud přechodem PN závisí na přiloženém napětí U a je vyjádřen vztahem

$$I = I_0 \left(e^{\frac{eU}{kT}} - 1 \right), \quad (3.49)$$

kde I_0 je nasycený proud, k je Boltzmannova konstanta a T je termodynamická teplota.

Připojíme-li k polovodiči s přechodem PN vnější napětí tak, že kladný pól zdroje je připojen na oblast N a záporný pól na oblast P, je přechod polarizován ve zpětném směru (závěrný stav). Vnější elektrické pole působí souhlasně s polem vnitřním, ochuzená oblast (oblast prostorového náboje) se rozšiřuje a přechodem protéká pouze proud minoritních elektronů z oblasti P do oblasti N a minoritních děr z oblasti N do oblasti P, který vytváří nasycený proud I_0 ve vztahu (3.49). Nasycený proud I_0 není ovlivněn vnějším elektrickým polem.

Voltampérová charakteristika polovodičové diody je závislost proudu I procházejícího diodou na napětí U na diodě. V případě ideální diody je tato závislost dána analyticky vztahem (3.49). Typický průběh VA charakteristiky diody je uveden na obr. 3.22. Tato charakteristika je příkladem nelineární charakteristiky. Proud I_0 je řádově μA , proud v propustném stavu závisí na typu diody a může být řádově desítky až stovky A.



Obr. 3.22: VA charakteristika diody

Polovodičové diody se používají v řadě aplikací zejména pro svou silně nelineární VA charakteristiku. Jsou to:

1. **Usměrňovače** střídavého proudu – dioda propouští proud ze zdroje jen při takové polaritě zdroje, kdy je dioda polarizována v propustném směru.
2. **Směšovače** – ze dvou zdrojů proudu harmonického napětí o různých kmitočtech produkuje složku proudu s kmitočtem součtovým a složku proudu s kmitočtem rozdílovým.
3. **Demodulátory** amplitudově modulovaných signálů a další.

Jinými aplikacemi diod jsou:

1. **Luminiscenční dioda** – např. při injekci elektronů z oblasti N do P dochází k jejich rekombinaci s děrami, energie uvolněná při rekombinaci se může při vhodné volbě polovodičového materiálu a technologie vyzářit ve formě fotonů elektromagnetického záření ve viditelné nebo infračervené oblasti.
2. **Fotodioda** – generaci páru elektron-díra lze v polovodiči dosáhnout také osvětlením, tj. proudem fotonů s energiemi většími než je šířka zakázaného pásu energií, a tak zvýšit vodivost diody.

Kontrolní otázky 3.2

1. *Popište způsoby emise elektronů z kovu.*
2. *Charakterizujte hlavní znaky vlastní a příměsové (nevlastní) vodivosti polovodičů.*



3.13 Vedení elektrického proudu v kapalinách

Kapaliny, podobně jako pevné látky, mohou být dielektriky, vodiči i polovodiči. Dielektrikem je například destilovaná voda, vodičem roztoky solí a polovodičem roztavený selen.



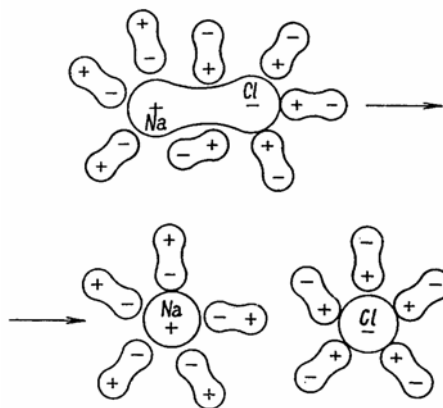
3.13.1 Disociace molekul

Kapaliny, které vedou elektrický proud se nazývají elektrolyty. Patří mezi ně vodné roztoky kyselin, zásad a solí. Název elektrolyt se později přenesl i na tyto látky samé. Nositeli proudu v kapalinách jsou kladné a záporné ionty (kationty a anionty), které vznikají štěpením, čili disociací molekul iontových sloučenin.

Disociace nastává v roztocích působením polárních molekul rozpouštědla a v taveninách účinkem intenzivního tepelného pohybu molekul. Účinným rozpouštědlem iontových sloučenin je voda, protože její molekuly tvoří silné elektrické dipóly (obr. 2.24), což potvrzuje její vysoká polarizovatelnost, a tím i vysoká relativní permitivita ($\epsilon_r = 81$).

Molekuly polárního rozpouštědla, kterými je molekula rozpouštěné látky obklopena, se orientují tak, že jejich elektrické pole částečně kompenzuje pole iontové vazby, která se tak oslabí a obě části rozpuštěné látky (kladná a záporná) se potom fluktuacemi energie tepelného pohybu uvolní (obr. 3.23).

Uvolněné ionty migrují roztokem a při vzájemné srážce s iontem opačného náboje může dojít k jejich opětovnému sloučení v molekulu. Tento proces se nazývá **rekombinace** iontů a je v dynamické rovnováze s disociací.



Obr. 3.23: Disociace molekuly NaCl

3.13.2 Elektrolytická vodivost

Disociované ionty konají v rozpouštědle náhodný tepelný pohyb. Ve vnějším elektrickém poli se superponuje tomuto pohybu uspořádaný pohyb iontů, kladných ve směru intenzity elektrického pole \vec{E} a záporných v opačném směru. Proudová hustota \vec{J} v elektrolytu je potom ve shodě se vztahem (3.11) dána vztahem

$$\vec{J} = en_k z_k \mu_k \vec{E} + en_a z_a \mu_a \vec{E} = \gamma \vec{E}, \quad (3.50)$$

kde e je elementární náboj, n_k a n_a jsou koncentrace kationtů a aniontů v roztoku, z_k a z_a jsou jejich mocnosti, μ_k a μ_a jsou pohyblivosti a γ je měrná elektrická vodivost elektrolytu. Pohyblivosti iontů jsou asi o 4 řády menší než pohyblivost elektronů v kovu. Vztah (3.50) je Ohmův zákon v diferenciálním tvaru pro vedení proudu v elektrolytu.

3.13.3 Faradayovy zákony

Vložíme-li do elektrolytu elektrody připojené na vnější zdroj proudu, vytvoříme v elektrolytu elektrické pole. Záporné ionty se pohybují k anodě, kde odevzdávají elektrony a kladné ionty ke katodě, kde elektrony přijímají. Potom se vylučují na elektrodách nebo chemicky reagují s rozpouštědlem nebo materiálem elektrody. Uvedený děj se nazývá elektrolýza. Při průchodu proudu elektrolytem tak dochází jak k transportu náboje, tak i látky. Vylučování látky na elektrodách při elektrolýze popisují dva **Faradayovy zákony**:

1. Množství různých látek vyloučených nebo jinak chemicky pozměněných při průchodu elektrického proudu roztokem je úměrné prošlému náboji.
2. Množství různých látek vyloučených při průchodu téhož náboje jsou chemicky ekvivalentní.

Oba zákony lze formulovat rovnicí

$$m = \frac{MQ}{Fz}, \quad (3.51)$$

kde m je hmotnost vyloučené látky, M je molová hmotnost příslušných iontů a z jejich mocností, $F = 96493 \text{ C}\cdot\text{mol}^{-1}$ je Faradayova konstanta, Q je elektrický náboj přenesený vnějším obvodem.

V technické praxi se elektrolyza využívá např. v elektrometalurgii, pro pokovování, pro výrobu kyslíku a vodíku elektrolyzou a podobně.

Úkol 3.11

Určete, jaké množství mědi se vyloučí z roztoku CuSO_4 proudem 10 A za 1 hodinu. Molová hmotnost mědi je $63,57 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ a mocnost je 2.



[11,86 g]

Úkol 3.12

Poniklování kovového předmětu, který má povrch 120 cm^2 , trvalo 5 hodin při elektrickém proudu 0,3 A. Nikl je dvojmocný, jeho molová hmotnost je $58,7 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ a hustota $8900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$. Určete tloušťku vrstvy.



[15,3 μm]

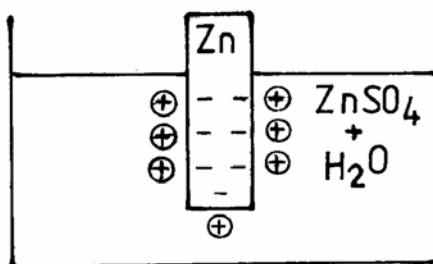
3.13.4 Elektrodové potenciály

Vložíme-li do elektrolytu dvě elektrody z různých kovů, naměříme mezi nimi elektrické napětí. Např. měděná elektroda má vzhledem k zinkové elektrodě ve vodném roztoku kyseliny sírové napětí 1,1 V. Soustava dvou různých elektrod v elektrolytu tvoří galvanický článek a potenciální rozdíl mezi elektrodami pro nezátížený stav je jeho elektromotorické napětí.



Vznik elektrodového potenciálu lze zjednodušeně vyložit jako výsledek působení polárních molekul vody, které svým elektrickým polem a chemickým působením kompenzují kohezní síly držící ionty kovu v jeho krystalové mřížce. Ionty kovu přecházejí do roztoku, který se nabíjí kladně, zatímco v kovu zůstávají elektrony. Ten se tedy nabíjí vzhledem k elektrolytu záporně. Na rozhraní elektrody a elektrolytu vzniká elektrická dvojrůstava (obr. 3.24), v níž vytvořené elektrické pole vrací uvolněné kladné ionty zpět na elektrodu. V dynamické rovnováze se oba procesy kompenzují. Potenciální rozdíl na této elektrické dvojrůstvě je tzv. **elektrodový potenciál**.

Přímé měření elektrodových potenciálů není možné, protože k měření je nutné vložit do elektrolytu další elektrodu, jejíž elektrodový potenciál se od měřeného odečítá. Proto se udávají elektrodové potenciály pouze relativně vzhledem k normální vodíkové elektrodě. Elektrodový potenciál závisí na materiálu elektrod a charakterizuje míru schopnosti kovu uvolňovat ionty do vodného roztoku.

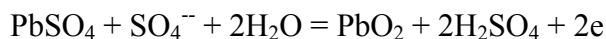


Obr. 3.24: Vznik elektrické dvojvrstvy

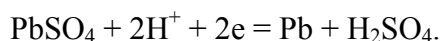
3.13.5 Polarizace elektrod

Jedná se o jev, který souvisí s vedením proudu elektrolytem a s elektrodovými potenciály. Jev vysvětlíme na příkladu článku se dvěma stejnými platinovými elektrodami, ponořenými do roztoku CuSO_4 . Při nepříliš velkém napětí zdroje proudu, připojenému k elektrodám, se bude na katodě vylučovat kovová měď a na anodě plynný kyslík. Původně stejné platinové elektrody se tedy elektrolyzou mění na elektrodu měděnou a kyslíkovou, které už mají vzhledem k roztoku různé potenciály. Vytváří se galvanický článek, jehož elektromotorické napětí směřuje proti napětí vnějšího zdroje.

Praktické využití uvedeného jevu můžeme demonstrovat na příkladu olověného akumulátoru. Obě elektrody jsou v nenabitěm stavu pokryty síranem olovnatým, elektrolytem je roztok kyseliny sírové. Při nabíjení akumulátoru probíhá na anodě reakce



a na katodě



Elektrody se při nabíjení polarizují a vytváří se článek $\text{PbO}_2\text{-Pb}$, jehož počáteční napětí 2,4 V rychle klesá na 2,1 V. Vnější projevem nabíjení je zvyšování koncentrace elektrolytu. Neklesne-li vybíjecí napětí pod 1,85 V, je tento proces vratným procesem.

Kontrolní otázky 3.3



1. Proč nepozorujeme přenos látky v kovech, zatímco v kapalinách ano?
2. Objasněte vznik iontů v kapalinách disociací iontových sloučenin.
3. Uveďte a vysvětlete Faradayovy zákony elektrolyzy.
4. Objasněte rozdíl mezi elektrochemickými články nevratnými a vratnými a uveďte příklady.

3.14 Vedení elektrického proudu v plynech

3.14.1 Ionizace plynu

Za normálních podmínek jsou plyny velmi dobrými izolanty, protože kromě neutrálních atomů nebo molekul obsahují jen velmi malé množství volných elektronů a iontů. Aby plyn mohl vést elektrický proud, je zapotřebí ionizovat jeho atomy nebo molekuly nebo uvolňovat nosiče náboje (elektrony) z kovových elektrod, které slouží k přívodu elektrického proudu.



Ionizaci plynu lze uskutečnit elektromagnetickým zářením (ultrafialové, rentgenové, gama), látkovým zářením (alfa, beta částice), elektrickým polem (elektrické pole urychluje nabitě částice tak, že jsou schopny samy ionizovat neutrální částice nárazem) a vysokou teplotou (molekuly plynu mají dostatečnou energii tepelného pohybu k ionizaci jiných molekul).

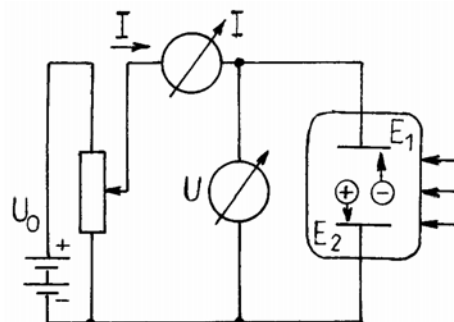
K uvolnění nosičů náboje z elektrod může dojít např. tepelnou emisí elektronů ze žhavené katody, vytrháváním elektronů ze studené katody vlivem silného elektrického pole, fotoemisí elektronů z elektrody při dopadu elektromagnetického záření a sekundární emisí elektronů při dopadu rychlých elektronů nebo iontů na elektrodu.

Jestliže je ionizace plynu způsobena vnějším ionizačním činidlem, mluvíme o **nesamostatném výboji**. Je-li vznik volných nosičů náboje způsoben doprovodnými jevy při vedení proudu, je **výboj samostatný**. Současně s ionizací plynu působí vždy i opačný pochod, rekombinace kladných a záporných iontů.

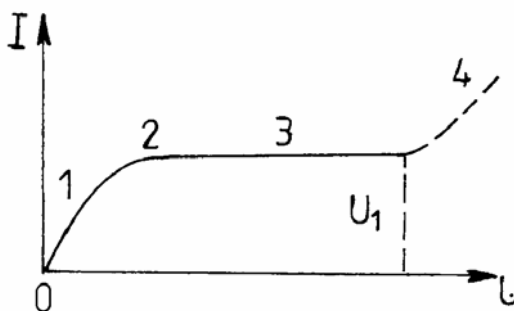
Charakter výboje v plynech závisí na mnoha činitelích. Jsou to např. teplota a tlak plynu, chemické vlastnosti plynu, tvar a vzdálenost elektrod, proud procházející plynem, napětí na elektrodách a podobně.

3.14.2 Nesamostatný výboj

Vedení proudu v plynech se nazývá výboj v plynech. Studium nesamostatného výboje v homogenním elektrickém poli lze provést zařízením podle obr. 3.25a).



Obr. 3.25: a) Měření VA charakteristiky nesamostatného výboje



Obr. 3.25 b) VA charakteristika nesamostatného výboje

V prostoru mezi elektrodami E_1 a E_2 je plyn, který je ionizován vnějším ionizačním činidlem. Na elektrody přivádíme regulovatelné napětí U , které vyvolá proud I v ionizovaném plynu. Nesamostatný výboj má tři hlavní rysy:

1. Proud prochází pouze po dobu působení ionizačního činidla.
2. Proud začíná téci již při velmi malých napětích.
3. Velikost proudu je ovlivněna intenzitou ionizačního činidla.

Voltampérová charakteristika podle obr. 3.25b) má oblast Ohmova zákona (1), kdy je proud úměrný napětí, oblast přechodovou (2) a oblast nasyceného proudu (3), kdy jsou všechny ionty vzniklé působením ionizačního činidla odvedeny na elektrody. Nasycený proud je přímo úměrný počtu iontů vzniklých v jednotkovém objemu plynu za 1s a může proto sloužit za míru intenzity ionizujícího záření. Při napětích odpovídajících oblasti (4) VA charakteristiky by už docházelo k narůstání proudu v důsledku nárazové ionizace ionty, urychlenými v elektrickém poli.

3.14.3 Samostatný výboj v plynu

Charakter samostatného výboje v plynu je určen především tlakem plynu ve výbojovém prostoru. Jeho základním rysem je to, že k němu dochází teprve tehdy, když napětí mezi elektrodami přestoupí tzv. **zápalné napětí**, které závisí na uspořádání elektrod a na vlastnostech plynu.

Při normálním tlaku vzniká buďto **jiskrový výboj** (dosáhne-li intenzita vnějšího elektrického pole v plynu hodnoty dielektrické pevnosti plynu) nebo **koróna** (v případě hrotové elektrody proti plošné elektrodě v silně nehomogenním elektrickém poli) nebo **elektrický oblouk**. Pro elektrický oblouk je charakteristická vysoká hustota proudu v silně ionizovaném plynu, tzv. plazmatu. **Plazma** vzniká také v jiných případech, např. při vysokých teplotách tepelnou ionizací nebo při intenzivních jaderných reakcích.

Kontrolní otázky 3.4



1. Jakým způsobem je možno ionizovat plyn?
2. Jaké jsou hlavní znaky nesamostatného výboje?

3.15 Autotest

1. Vysvětlete odlišnosti vedení elektrického proudu v pevných látkách, kapalinách a plynech.
2. Uveďte princip kontinuity proudu pro ustálený proud.
3. Odvoďte vzorec pro výsledný odpor při sériovém a paralelním zapojení dvou odporů.
4. Jak je definováno elektromotorické napětí zdroje? Uveďte rozdíl mezi elektromotorickým napětím a svorkovým napětím.
5. Vysvětlete význam prvního a druhého Kirchhoffova zákona pro řešení elektrických obvodů.
6. Jaká je základní odlišnost energetického spektra elektronu v pásové teorii krystalů pro izolanty a pro vodiče?
7. Jakou úlohu hrají v nevlastní vodivosti donory a akceptory?
8. Které nabité částice jsou nositeli proudu v kapalinách?
9. Jak disociuje ve vodném roztoku: chlorid sodný, chlorid amonný, kyselina sírová, síran měďnatý?
10. Vysvětlete vznik elektrodového potenciálu kovu vůči elektrolytu.
11. Popište děje na anodě při nabíjení olověného akumulátoru.
12. Vysvětlete ionizaci plynu silným elektrickým polem.
13. Vysvětlete mechanismus vedení proudu při nesamostatném výboji v oblasti nasyceného proudu.



3.16 Klíč k autotestu 3.15

1. V kovech je proud tvořen uspořádaným pohybem volných elektronů, v polovodičích volnými elektrony a děrami, v elektrolytech kladnými a zápornými ionty a v plynech kladnými a zápornými ionty a volnými elektrony.
2. V ustáleném stavu je proud v libovolném průřezu vodiče stejný a konstantní.
3. Při sériovém zapojení je proud v odporech stejný a výsledné napětí na odporech je rovno součtu napětí na jednotlivých odporech. Při paralelním zapojení odporů jsou poměry obrácené. Odtud aplikací Ohmova zákona získáme výsledný odpor dané kombinace.
4. Elektromotorické napětí zdroje je dáno podílem práce, kterou konají rozdělující síly při přenosu náboje zdrojem a tohoto náboje.
5. První Kirchhoffův zákon využívá princip kontinuity proudu, druhý zákon je vyjádřením zákona zachování energie.
6. Izolanty mají na rozdíl od vodičů nepřekrývající se valenční a vodivostní pás, oba pásy jsou od sebe odděleny pásem zakázaných energií.



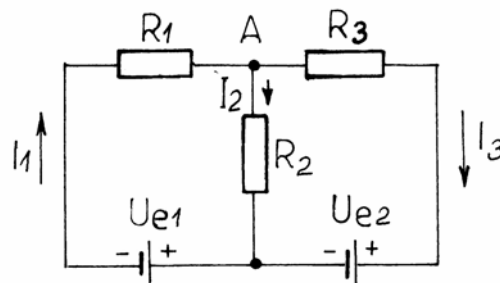
7. Donory při ionizaci předávají do vodivostního pásu volné elektrony. Akceptory předávají do valenčního pásu volné díry.
8. V kapalinách jsou nositeli proudu kladné a záporné ionty, které vznikají disociací kyselin, zásad a solí.
9. $\text{Na}^+ + \text{Cl}^-$, $\text{NH}_3^+ + \text{Cl}^-$, $\text{H}_2^{++} + \text{SO}_4^{--}$, $\text{Cu}^{++} + \text{SO}_4^{--}$.
10. Kladné ionty kovu přecházejí do roztoku, který se nabíjí kladně, kov se nabíjí záporně.
11. Na anodě vzniká PbO_2 a H_2SO_4 .
12. Volné elektrony nebo ionty v plynu jsou elektrickým polem urychleny a mohou ionizovat další molekuly plynu.
13. V oblasti nasyceného proudu jsou všechny ionty generované vnějším ionizujícím činitelem odvedeny na elektrody.

3.17 Korespondenční úkoly



1. Jaké jsou nutné podmínky pro vznik elektrického proudu v látce?
2. Formulujte Ohmův zákon v diferenciálním a integrálním tvaru.
3. Jak lze využít elektrický odpor pro měření teploty?
4. Jak ovlivňuje vnitřní odpor zdroje přenos elektrického výkonu ze zdroje do spotřebiče? Kdy je tento výkon maximální při daném elektromotorickém napětí?
5. Vysvětlete použití Wheatstoneova mostu pro měření neznámého elektrického odporu vodiče.
6. Popište mechanismus vedení proudu ve vlastním polovodiči pomocí pásové teorie.
7. Popište vlastnosti přechodu PN.
8. Vysvětlete, proč můžeme použít polovodičovou diodu k usměrňování střídavých proudů.
9. Popište mechanismus vedení proudu v elektrolytech.
10. Vysvětlete děje vznikající při průchodu proudu v elektrolytech a uveďte, k čemu se používají.
11. Vysvětlete vznik elektromotorického napětí elektrochemického článku.
12. Popište děje na katodě při nabíjení oloveného akumulátoru.
13. Co může ovlivňovat charakter výboje v plynech?
14. Jaké podmínky musí být splněny, aby došlo k samostatnému výboji v plynu?
15. V elektrickém ohříváči vody o obsahu 80 l se má ohřát voda z 19°C na 90°C v době od 22 hodin do 5 hodin ráno.
 - a) Jak velká je spotřeba elektrické energie odebírané ze sítě 220 V, jsou-li tepelné ztráty za tuto dobu 1,2 MJ?

- b) Jak velký musí být příkon topné vložky a její provozní odpor?
- c) Kolik zaplatíme za 1 l ohřáté vody, stojí-li 1 kWh elektrické energie 1,74 Kč? Měrná tepelná kapacita vody je $4186 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.
16. Zdroj elektrického proudu má při odběru proudu 3 A svorkové napětí 24 V, při odběru 4 A svorkové napětí 20 V. Určete:
- odpor spotřebiče v obou případech,
 - vnitřní odpor zdroje,
 - elektromotorické napětí zdroje.
17. V elektrickém obvodu podle obr. 3.26 jsou zapojeny zdroje elektrického proudu o elektromotorických napětích $U_{e1} = 20 \text{ V}$, $U_{e2} = 30 \text{ V}$ a odporech $R_1 = 320 \Omega$, $R_2 = 200 \Omega$ a $R_3 = 250 \Omega$.



Obr. 3.26: Ke korespondenčnímu úkolu 17

Určete hodnoty proudů, které protékají jednotlivými odpory a napětí na odporech.

3.18 Závěr

Pohyb částic s elektrickým nábojem nazýváme obecně elektrickým proudem.

Pohybují-li se nosiče náboje v látce uspořádaně, nazýváme tento **proud kondukční**.

S elektrickou polarizací dielektrika částečně souvisí **posuvný proud**, který závisí na časové změně vektoru elektrické indukce \vec{D} .

Nutnou podmínkou pro vznik elektrického proudu v látce je kromě volných nosičů náboje také existence sil, které způsobují pohyb nosičů náboje. V případě elektrických sil musí být ve vodiči vytvořeno elektrické pole s intenzitou $\vec{E} \neq 0$.

Uspořádaný pohyb náboje však může vznikat také v důsledku neelektrických sil.



Elektrický proud charakterizujeme fyzikální veličinou nazvanou **elektrický proud** (proud). Je to základní fyzikální veličina a její jednotka ampér (značka A) je jednotkou základní.

Jednotkou náboje je coulomb (C), $C = A \cdot s$. Prochází-li vodičem stálý proud 1 A, projde průřezem vodiče za 1 s náboj 1 C.

Ustálené stejnosměrné proudy vznikají za předpokladu, že ve vodiči existuje stacionární elektrické pole o intenzitě $\vec{E}(t) = \text{konst.}$

Rozložení proudu podél průřezu vodiče charakterizujeme **vektorem proudové hustoty** \vec{J} .

Pro ustálený proud je ve vodiči stacionární elektrické pole a náboj Q v uvažovaném objemu musí zůstat konstantní.

Elektrický proud, který určitou částí uzavřené plochy S do objemu vtéká, jinou částí plochy S vystupuje.

Proudová hustota je úměrná intenzitě elektrického pole ve vodiči, rovnice

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}$$

je vyjádřením **Ohmova zákona v diferenciálním tvaru**.

Rovnice $U = R I$ je vyjádřením **Ohmova zákona v integrálním tvaru**, kde R je elektrický odpor.

Odpor vodiče R je definován jako poměr mezi napětím na svorkách vodiče a proudem, který vodičem prochází.

Při **sériovém spojení** odporů je výsledný odpor R je dán součtem dílčích odporů.

Při **paralelním spojení** odporů pro výsledný odpor R platí

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}.$$

U kovových vodičů dochází při zvyšování teploty vodiče k růstu elektrického odporu.

Výkon ustáleného stejnosměrného proudu je roven

$$P = \frac{W}{t} = UI = RI^2 = \frac{U^2}{R}.$$

Elektrický zdroj je aktivním prvkem elektrického obvodu, který dodává do pasivních prvků (např. odporů) elektrickou energii.

Je charakterizován **elektromotorickým napětím** U_e , které je dáno podílem práce W a přeneseného náboje Q elektrolytem.

Vodivá cesta ve zdroji (např. elektrolyt v galvanickém článku, vinutí v dynamu) má **vnitřní odpor** R_i .

Řešením elektrického obvodu rozumíme určení zbývajících neznámých parametrů, např. proudů ve větvích, napětí na odporech, výkonů dodávaných do odporů a podobně, k zadaným parametrům obvodu.

Metoda postupného zjednodušování obvodu je vhodná pro obvody s jedním zdrojem nebo pro skupiny odporů ve složitějších obvodech. Její podstatou je nahrazování sériových a paralelních skupin odporů jedním náhradním odporem.

Z principu kontinuity proudu pro ustálený elektrický proud vyplývá **první Kirchhoffův zákon** (I.K.z.): Algebraický součet všech proudů v uzlu se rovná nule.

Druhý Kirchhoffův zákon (II.K.z.) je v podstatě zákonem zachování energie v elektrickém obvodu. Pro libovolnou smyčku obvodu platí: Algebraický součet všech elektromotorických napětí působících v uzavřené smyčce se rovná algebraickému součtu úbytků napětí na všech odporech dané smyčky.

Velmi důležitým obvodem v měřicí technice je **Wheatstoneův most**. Most je tvořen odpory R_1, R_2, R_3, R_4 a je v uzlech A a C napájen ze zdroje proudu o elektromotorickém napětí U_e . Mezi uzly B a D je zapojen galvanometr (resp. měřič napětí). Wheatstoneův most se používá často pro měření odporů.

Elektrické vlastnosti látek jsou charakterizovány vodivostí a permitivitou. Vodivost látek je určena koncentrací nosičů a jejich pohyblivostí a pro různé látky se mění v rozsahu asi dvaceti řádů.

Elektrický proud může ve vakuu vzniknout pouze tehdy, jestliže jsou do daného vyčerpaného prostoru dodány volné nosiče náboje (elektrony) z kovové elektrody. Uvolnění elektronů z elektrody může být způsobeno:

- a) tepelnou emisí,
- b) fotoelektronovou emisí,
- c) emisí elektronů vyvolaná látkovým zářením,
- d) emisí elektronů silným elektrickým polem.

Teorie elektrické vodivosti pevných látek vychází z pásové teorie krystalů, podle níž je energetické spektrum elektronů v krystalu složeno z pásů dovolených a pásů zakázaných energií.

Pro rozlišení látek na vodiče, polovodiče a izolanty je rozhodující jejich vodivost při teplotách blízkých absolutní nule.

Polovodiče jsou látky, jejichž šířka zakázaného pásu je menší než u izolantů.

Vodivost polovodičů je vlastní a nevlastní, typu P a typu N.

Kapaliny, podobně jako pevné látky, mohou být dielektriky, vodiči i polovodiči. Dielektrikem je například destilovaná voda, vodičem roztoky solí a polovodičem roztavený selen.

Kapaliny, které vedou elektrický proud se nazývají elektrolyty.

Faradayovy zákony:

1. Množství různých látek vyloučených nebo jinak chemicky pozměněných při průchodu elektrického proudu roztokem je úměrné prošlému náboji.
2. Množství různých látek vyloučených při průchodu téhož náboje jsou chemicky ekvivalentní.

Vložíme-li do elektrolytu dvě elektrody z různých kovů, naměříme mezi nimi elektrické napětí.

Za normálních podmínek jsou plyny velmi dobrými izolanty, protože kromě neutrálních atomů nebo molekul obsahují jen velmi malé množství volných elektronů a iontů.

Vedení proudu v plynech se nazývá výboj v plynech. Výboj může být nesamostatný nebo samostatný.

4 Magnetické pole

4.1 Magnetické silové působení

Jsou-li dvě elektricky nabitě částice nehybné v inerciální soustavě pozorovatele, působí na sebe elektrostatickou silou danou Coulombovým zákonem (2.1). Tato síla se nazývá též Coulombova síla. Pohybují-li se částice, působí na sebe kromě této síly další silou, kterou nazýváme magnetickou silou. **Magnetické silové působení** se uskutečňuje prostřednictvím magnetického pole, které existuje v prostoru kolem každé pohybující se elektricky nabitě částice.



Elektrické a magnetické pole pohybující se nabitě částice vytváří **elektromagnetické pole**. Samotné magnetické pole můžeme pozorovat tehdy, jestliže je elektrické pole pohybujících se nábojů kompenzované. Nejčastějším případem kompenzovaného elektrického pole je elektrické pole neutrálního kovového vodiče, kdy elektrické pole vodivostních elektronů je v okolí vodiče kompenzováno elektrickým polem kladných iontů mřížky.

Magnetické síly jsou svou podstatou síly elektrodynamické, jimiž na sebe navzájem působí vedle sil elektrostatických všechny elektricky nabitě částice, které se pohybují. Magnetické pole vytváří každá pohybující se nabitá částice. Vytvářejí je proto i elementární částice, z nichž jsou složeny atomy všech látek. Jsou-li pohyby těchto částic v látce neuspořádané, je výsledné magnetické pole v okolí daného tělesa dáno superpozicí magnetických polí jednotlivých částic, a tedy se v průměru ruší. Magnetická pole těchto částic se projevují v makroskopickém měřítku pouze tehdy, jsou-li pohyby částic v látce alespoň částečně uspořádané. Tak např. magnetické pole vytvářejí elektrony v atomech látky jednak pohybem kolem jádra atomu, jednak při rotaci kolem vlastní osy. Jsou-li pohyby elektronů v atomech alespoň částečně uspořádané, vzniká složením jejich magnetických polí makroskopické pole v látce i v okolí.

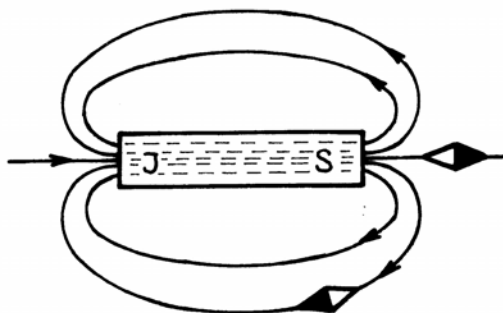
Uspořádaný pohyb volných elektricky nabitých částic probíhá v každém prostředí, ve kterém protéká elektrický proud. Elektrický proud tedy vytváří ve svém okolí magnetické pole, které je dáno superpozicí magnetických polí jednotlivých volných elektricky nabitých částic. Tak vzniká magnetické pole při vedení elektrického proudu v kovech, elektrolytech, polovodičích, ionizovaných plynech, v okolí elektronových nebo iontových svazků ve vakuu a podobně.

4.2 Experimentální studium magnetického pole

Magnetické pole můžeme sledovat v prostoru kolem pohybujících se nabitých částic, v okolí vodičů, kterými protéká elektrický proud a v okolí permanentních magnetů. Jako indikátoru magnetického pole můžeme využít např. každé těleso dostatečně malých rozměrů, které může vytvářet svoje vlastní magnetické pole. Při použití tohoto tělesa jako indikátoru dochází k interakci sledovaného magnetického pole s magnetickým polem indikátoru a z charakteru této interakce lze usuzovat na vlastnosti magnetického pole v místě indikátoru. Jako indikátor může sloužit:

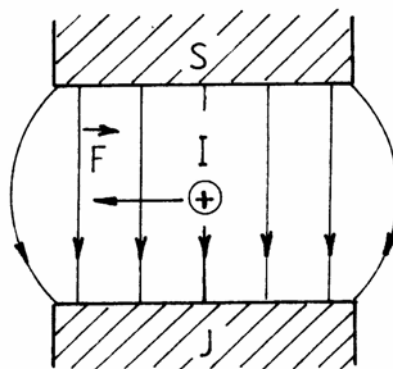
a) **Magnetická střelka** (magnetka), což je vlastně tyčový magnet. V magnetickém poli Země se orientuje severojižním směrem a podle toho se pól, který směřuje na sever, nazývá severní (tento konec bývá zakalen, a proto se obvykle vyznačuje na obrázcích černě). Magnetka patří mezi citlivé indikátory magnetického pole. V magnetickém poli se orientuje do směru vektoru síly, která na ni působí. Budeme-li volnou magnetkou pohybovat zvolna ve směru, který právě ukazuje, vyznačí nám její střed čáru, která se nazývá **magnetická indukční čára**. Podélná osa magnetky bude ležet vždy ve směru tečny k této čáře a ukazuje nám směr a smysl silového působení magnetického pole na magnetku. Magnetickými indukčními čarami znázorňujeme existenci a tvar magnetického pole. Na obr. 4.1 je uveden tvar magnetických indukčních čar tyčového permanentního magnetu.

b) **Úsek přímého vodiče** o délce Δl . Prochází-li vodičem elektrický proud, působí na vodivostní elektrony vnější magnetické pole magnetickou silou, která je největší, je-li vodič kolmý na směr indukčních čar. Magnetická síla je kolmá na směr indukčních čar i směr vodiče. Protože jsou vodivostní elektrony vázány na vodič, přenáší se magnetická síla působící na elektrony na vodič jako celek.



Obr. 4.1: Magnetické pole tyčového magnetu

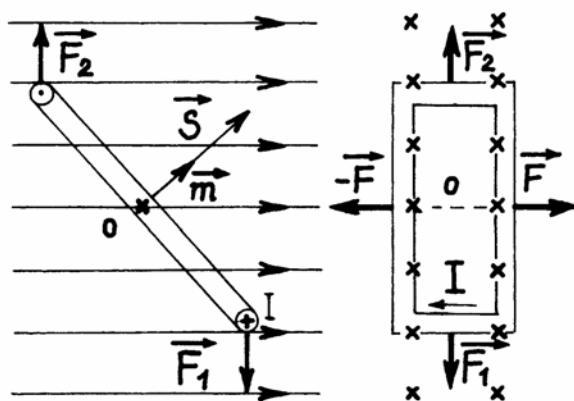
Pro přímý vodič kolmý k rovině nákresny je tato situace znázorněna na obr. 4.2.



Obr. 4.2: Magnetické silové působení na přímý vodič

c) **Vodič ve tvaru rovinné smyčky.** Magnetické síly působící na jednotlivé úseky natáčejí smyčku do polohy, kdy je rovina smyčky kolmá na směr indukčních čar (obr. 4.3).

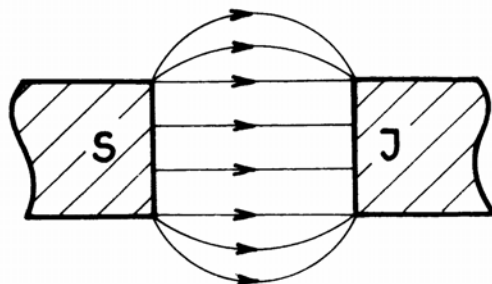
Definujeme vektor plochy \vec{S} jako vektor, jehož velikost se rovná ploše S uzavřené smyčkou a který leží v normále k této ploše a směřuje na tu stranu smyčky, z níž pozorujeme oběh proudu ve smyčce proti směru otáčení hodinových ručiček. Otočná smyčka se natáčí tak, aby vektor plochy \vec{S} měl stejný směr a smysl jako indukční čáry v daném místě magnetického pole. Příklad silového působení magnetického pole na obdélníkový vodič je uveden na obr. 4.3.



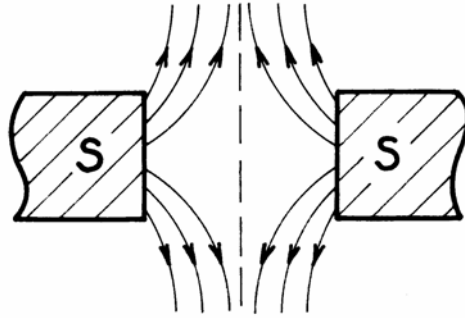
Obr. 4.3: Obdélníkový vodič v magnetickém poli

Magnetickým momentem proudové smyčky nazýváme veličinu $\vec{m} = I\vec{S}$, kde I je proud procházející danou smyčkou.

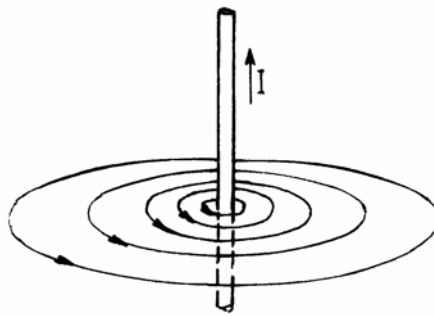
Příklady průběhu magnetických indukčních čar jsou uvedeny na obr. 4.4 až obr. 4.7.



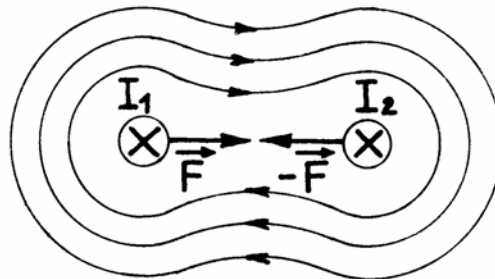
Obr. 4.4: Magnetické pole mezi nesouhlasnými póly magnetu



Obr. 4.5: Magnetické pole mezi souhlasnými póly magnetu



Obr. 4.6: Magnetické pole přímého vodiče



Obr. 4.7: Magnetické pole dvou přímých vodičů

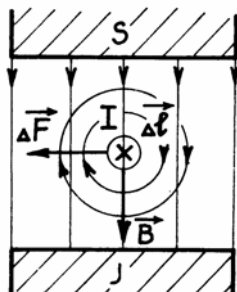
4.3 Síla působící v magnetickém poli na vodič

Základní pozorovanou skutečností je, že síla $\Delta \vec{F}$, působící na úsek vodiče o délce Δl s proudem I , působí kolmo na tuto část vodiče. Vložme vodič do homogenního magnetického pole kolmo k indukčním čarám (obr. 4.8a). Tím bude docházet k superpozici magnetického pole vodiče a vnějšího magnetického pole. Na jedné straně bude docházet k zesílení magnetického pole, na druhé straně k zeslabení a vodič bude vytlačován do míst zeslabeného magnetického pole.

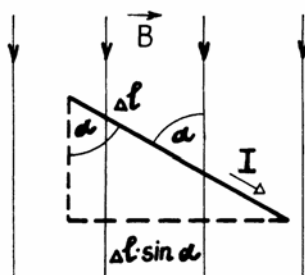
Velikost síly ΔF je přímo úměrná velikosti proudu I a délce vodiče Δl ,

$$\Delta F = BI \Delta l. \quad (4.1)$$

Svírá-li vodič s indukčními čarami úhel $\alpha \neq 90^\circ$, je třeba dosazovat do (4.1) aktivní délku vodiče $\Delta l \sin \alpha$ (obr. 4.8b).



Obr. 4.8: a) Silové působení magnetického pole na přímý vodič



b) Silové působení magnetického pole na přímý vodič

Součinitel úměrnosti B charakterizuje vnější magnetické pole v místě vložení vodiče a nazývá se **magnetickou indukcí**. Velikost B určíme pomocí síly působící na vodič z (4.1),

$$B = \frac{\Delta F}{I \Delta l}. \quad (4.2)$$

Jednotkou magnetické indukce je

$$[B] = \frac{[\Delta F]}{[I] \cdot [\Delta l]} = \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}} = \text{T (tesla)}.$$

Vektorem magnetické indukce \vec{B} nazýváme vektor, který leží v tečně k indukční čáře v daném bodě pole, jeho smysl je určen smyslem příslušné indukční čáry a jeho velikost je dána vztahem (4.2). Magnetické pole je popsáno, je-li v každém bodě pole zadán vektor $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z)$. Vektory \vec{B} vytvářejí v prostoru vektorové pole. Nezávisí-li vektor \vec{B} na čase, je pole stacionární. Je-li magnetické pole buzeno časově proměnným proudem, je $\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$.

Definujeme-li vektor délky vodiče $\Delta\vec{l}$ jako vektor, jehož směr a smysl je dán směrem proudu ve vodiči a jeho velikost je Δl , můžeme vyjádřit pomocí vektoru \vec{B} vektor síly $\Delta\vec{F}$ jako vektorový součin

$$\begin{aligned}\Delta\vec{F} &= I(\Delta\vec{l} \times \vec{B}), \\ \Delta F &= I \Delta l B \sin \alpha,\end{aligned}\tag{4.3}$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\Delta\vec{l}$ a \vec{B} .

Pomocí vztahu (4.3) můžeme určit integrací výslednou sílu \vec{F} působící v magnetickém poli se zadaným vektorovým polem \vec{B} na vodič libovolného tvaru. Na element vodiče $d\vec{l}$ působí podle (4.3) síla

$$d\vec{F} = I(d\vec{l} \times \vec{B}).\tag{4.4}$$

Integrací pro celý proudovodič získáme výslednou sílu.

4.4 Síla působící na pohybující se náboj v magnetickém poli

Síla $d\vec{F}$ působící na element vodiče $d\vec{l}$ podle (4.4) je vlastně silou, působící na náboj dQ , který je obsažen v elementu vodiče $d\vec{l}$, a který se pohybuje střední rychlostí uspořádaného pohybu nosičů náboje \vec{v} . Velikost tohoto náboje je

$$dQ = \rho dV = \rho S d\vec{l},\tag{4.5}$$

kde ρ je objemová hustota volného náboje, dV je objem elementu vodiče a S je plocha řezu kolmého k \vec{v} . Součin $I d\vec{l}$ v (4.4) můžeme vyjádřit pomocí proudové hustoty $J = \rho v$ podle (3.8)

$$I d\vec{l} = SJ d\vec{l} = S\rho v d\vec{l} = S\rho d\vec{l} \vec{v} = dQ \vec{v}.\tag{4.6}$$

Potom po dosazení do (4.4) dostaneme

$$d\vec{F} = dQ(\vec{v} \times \vec{B}).\tag{4.7}$$

Síla působící na bodový náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} v magnetickém poli o indukci \vec{B} je podle (4.7)

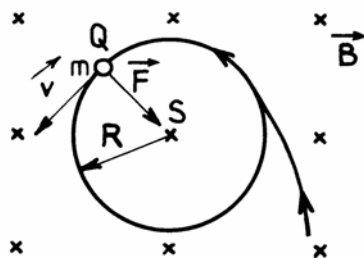
$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}).\tag{4.8}$$

Vztah (4.8) vyjadřuje **Lorentzovu sílu**, která působí na náboj Q , který se v magnetickém poli o indukci \vec{B} pohybuje rychlostí \vec{v} .

Příklad 4.1



Nabitá částice o hmotnosti $m = 2 \cdot 10^{-3}$ g se pohybuje v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0,8$ T v rovině kolmé na magnetické indukční čáry po kružnici o poloměru $R = 20$ cm rychlostí $v = 100$ m·s⁻¹. Určete náboj Q částice (obr. 4.9). Jaký potenciální rozdíl v elektrickém poli je třeba na urychlení této částice z klidu na danou rychlost?



Obr. 4.9: Pohyb nabité částice v homogenním magnetickém poli

Řešení:

Na částici s nábojem Q působí v homogenním magnetickém poli o magnetické indukci B Lorentzova síla, která je při pohybu po kružnici silou dostředivou. Platí



$$\frac{mv^2}{R} = QvB.$$

Odtud vyplývá

$$Q = \frac{mv}{RB} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,2 \text{ m} \cdot 0,8 \text{ T}} = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ C}.$$

Pro kinetickou energii částice platí při průchodu potenciálním rozdílem U v elektrickém poli $\frac{1}{2}mv^2 = QU$.

Odtud

$$U = \frac{mv^2}{2Q} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \text{ kg} \cdot (100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2}{2 \cdot 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ C}} = 8 \text{ V}.$$

Úkol 4.1

Deuteron obíhá po kruhové dráze o poloměru $r=3 \text{ cm}$ v magnetickém poli o indukci $B=1,2 \text{ T}$. Určete rychlost deuteronu, periodu oběhu a potenciální rozdíl v elektrickém poli pro získání této rychlosti. Hmotnost deuteronu je $m=3,34 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$, náboj $Q=1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.



$[1,72 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; 1,09 \cdot 10^{-7} \text{ s}; 3,08 \cdot 10^4 \text{ V}]$

4.5 Určení vektoru \vec{B} magnetického pole vodiče

Element proudovodiče $d\vec{l}$ vytváří ve vzdálenosti dané polohovým vektorem \vec{r} magnetickou indukci $d\vec{B}$, která se dá určit pomocí **Biot-Savartova zákona**



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} (d\vec{l} \times \vec{r}), \quad (4.9)$$

kde $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H}\cdot\text{m}^{-1}$ se nazývá **permeabilita vakua**.

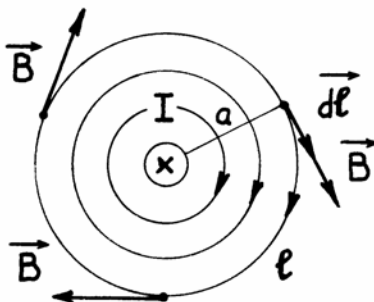
Na základě vztahu (4.9) můžeme vyjádřit magnetickou indukci magnetického pole přímého proudovodiče ve vzdálenosti a od vodiče,

$$B = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \sin \alpha \, d\alpha = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2), \quad (4.10)$$

kde α je úhel, který s vodičem svírá průvodič, vedený z libovolného bodu vodiče do bodu, v němž určujeme \vec{B} . Pro počátek vodiče je tento úhel roven α_1 a pro konec vodiče α_2 .

Pro nekonečně dlouhý vodič je $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}. \quad (4.11)$$



Obr. 4.10: Indukční čáry magnetického pole přímého vodiče

Vektor \vec{B} leží v rovině kolmé k přímému vodiči, jeho velikost je konstantní pro body na kružnici o poloměru a se středem v průsečíku vodiče s touto kolmou rovinou a leží v tečně ke kružnici (obr. 4.10). Indukční čáry jsou tedy kružnice o poloměru a . Jejich smysl určíme podle pravidla pravotočivého šroubu. Ze vztahu (4.11) vyplývá, že integrál po kružnici o poloměru a

$$\oint_l B \, dl = \oint_l \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} 2\pi a = \mu_0 I \quad (4.12)$$

nebo po úpravě, označíme-li $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$,

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (4.13)$$

Vztah (4.13) se nazývá **zákon celkového proudu**. Vektor \vec{H} se nazývá **intenzita magnetického pole**, $[H] = \text{A}\cdot\text{m}^{-1}$. Dá se dokázat, že vztah (4.13) platí pro vodiče libovolného tvaru a libovolnou uzavřenou křivku l obepínající vodič. Leží-li uzavřená křivka mimo vodič, je integrál (4.13) roven nule.

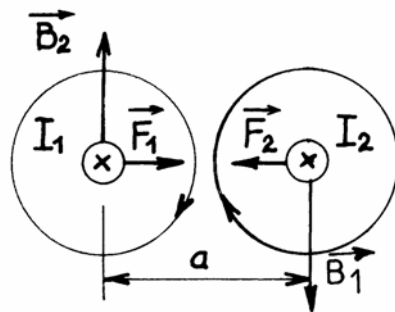
Celkovým proudem I ve vztahu (4.13) rozumíme součet proudu kondukčního, konvekčního a posuvného.

Mezi vektorem magnetické indukce \vec{B} a vektorem intenzity magnetického pole \vec{H} platí podle (4.13) ve vakuu vztah $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, kde μ_0 je permeabilita vakua. V libovolném izotropním prostředí platí mezi oběma veličinami vztah $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, kde μ_r je **relativní permeabilita** prostředí. Veličina $\mu = \mu_0 \mu_r$ se nazývá **permeabilita** prostředí.

4.6 Magnetické silové působení mezi vodiči

Protékají-li dvěma vodiči proudy I_1 a I_2 , působí na sebe vodiče navzájem magnetickou silou. Jejich vzájemné silové působení si můžeme představit tak, že jeden z vodičů vytváří v bodech druhého vodiče magnetické pole o indukci \vec{B} , které potom vyvozuje sílu na druhý vodič. Toto magnetické pole v bodech druhého vodiče můžeme určit pomocí vztahu (4.9) integrací po křivce, dané tvarem prvního vodiče a sílu působící na druhý vodič pomocí vztahu (4.4) integrací po křivce dané tvarem druhého vodiče.

Jako příklad určíme sílu, kterou na sebe působí dva rovnoběžné, přímé, dlouhé a tenké vodiče délky l , kterými protékají proudy I_1 a I_2 (obr. 4.11).



Obr. 4.11: Vzájemné silové působení dvou vodičů

První vodič vytváří v bodech druhého vodiče magnetické pole o indukci B_1 podle (4.11)

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi a}, \quad (4.14)$$

kde a je vzdálenost mezi středy vodičů. Podle (4.1) je síla působící na druhý vodič

$$F_2 = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (4.15)$$

Podobně druhý vodič vytváří v bodech prvního vodiče magnetické pole o indukci

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi a} \quad (4.16)$$

a síla působící na první vodič je

$$F_1 = B_2 I_1 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi a}. \quad (4.17)$$

Jestliže mají oba proudy stejný směr, vodiče se přitahují, v opačném případě se odpuzují. Dosadíme-li $I_1 = 1\text{ A}$, $I_2 = 1\text{ A}$, $a = 1\text{ m}$, $\frac{\mu_0}{2\pi} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$, dostáváme

$$F_1 = F_2 = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot l. \quad (4.18)$$

Na základě těchto silových účinků je definován ampér. 1 A je proud, který při průchodu dvěma rovnoběžnými, přímými, nekonečně dlouhými a nekonečně tenkými vodiči, vzdálenými od sebe 1 m, vyvolá mezi nimi ve vakuu sílu $2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$ na každý metr jejich délky.

Uvedené elektrodynamické síly vznikají mezi přívody k elektrickým zařízením, mezi vodiči elektrických silových vedení, mezi jednotlivými vodiči vinutí a jinde. Při jmenovitých proudech jsou většinou malé, ale při zkratech způsobují nebezpečná mechanická namáhání.

Úkol 4.2



Přípojnice na 4000 A v hliníkárně jsou od sebe vzdáleny 450 mm. Jaká elektrodynamická síla mezi nimi vznikne na 1 m délky při pětinasobném zkratovém proudu?

[178 N]

4.7 Elektromagnetická indukce



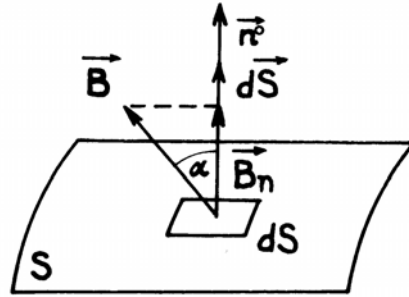
Jev elektromagnetická indukce spočívá v tom, že ve vodiči, který se pohybuje v magnetickém poli, nebo který se nachází v magnetickém poli časově proměnném, vzniká elektromotorické napětí. Tento jev objevil roku 1831 M. Faraday. Jeho příčinou je silové působení magnetického pole na volný elektrický náboj ve vodiči.

4.7.1 Magnetický indukční tok

Popis elektromagnetické indukce vyžaduje definovat fyzikální veličinu nazvanou **magnetický indukční tok**. Jestliže v magnetickém poli popsaném vektorem \vec{B} leží plocha S , potom elementární ploškou dS prochází elementární magnetický tok $d\Phi$ (obr. 4.12)

$$d\Phi = B_n dS = B \cos \alpha dS, \quad (4.19)$$

kde α je úhel, který svírá vektor \vec{B} s normálou k ploše v daném bodě.

Obr. 4.12: Magnetický indukční tok plochou S

Celkový indukční tok Φ procházející plochou S je

$$\Phi = \int_S B \cos \alpha \, dS = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (4.20)$$

Jednotkou magnetického toku je weber (Wb), $\text{Wb} = \text{T} \cdot \text{m}^2$.

Magnetické indukční čáry jsou vždy uzavřené křivky, a proto magnetický indukční tok vstupující do uzavřené plochy se rovná toku z plochy vystupujícímu. Platí tedy, že celkový magnetický indukční tok uzavřenou plochou je roven nule,

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (4.21)$$

4.7.2 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Z pokusů, které vykonal Faraday vyplývá, že indukované elektromotorické napětí vzniká nejen v případě pohybu vodiče v magnetickém poli, nýbrž i ve všech jiných případech, kdy se z jakékoliv příčiny mění magnetický indukční tok Φ procházející libovolnou plochou ohraničenou uzavřeným vodičem. Pro uzavřený vodič nacházející se v magnetickém poli platí pro indukované napětí U_e ve vodiči vztah

$$U_e = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (4.22)$$

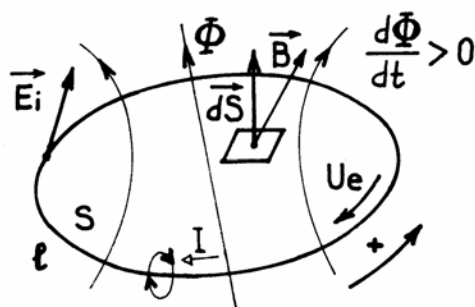
nebo, vyjádříme-li levou a pravou stranu rovnice, (obr. 4.13),

$$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (4.23)$$

kde \vec{E}_i je intenzita indukovaného elektrického pole ve vodiči.

Rovnice (4.22) je matematickým vyjádřením **Faradayova indukčního zákona** pro indukované elektromotorické napětí ve vodiči.

Směr indukovaného elektrického proudu ve vodiči je dán **Lencovým pravidlem**: indukovaný proud v uzavřeném vodiči má takový směr, aby magnetické pole buzené tímto proudem působilo svým magnetickým indukčním tokem proti změně vnějšího magnetického toku Φ .



Obr. 4.13: Elektromagnetická indukce v uzavřeném vodiči

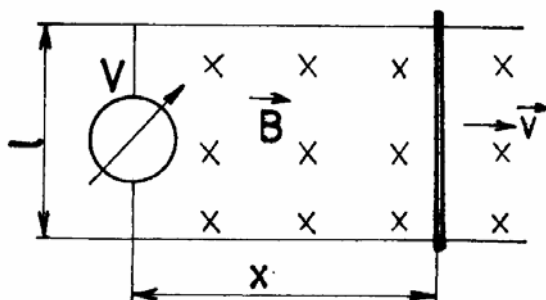
Kladný směr indukovaného proudu, a tedy i indukovaného elektromotorického napětí ve vodiči, je potom dán pravidlem pravotočivého šroubu: při otáčení v kladném směru postupuje šroub v kladném směru indukčních čar (obr. 4.13).

Z rovnice (4.22) vyplývá, že indukované napětí závisí pouze na časové změně magnetického indukčního toku plochou ohraničenou uzavřeným vodičem. Tato změna může nastat buďto časovou změnou vektoru \vec{B} , nebo pohybem vodiče (posuvným, otáčivým nebo obecným), deformací tvaru vodiče nebo kombinací těchto způsobů.

Příklad 4.2



Lokomotiva jede rychlostí $v = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. Předpokládejme, že kolejnice jsou navzájem izolované a jejich vzdálenost je $l = 1,435 \text{ m}$. Jaké elektrické napětí naměříme mezi kolejnicemi, je-li vertikální složka intenzity zemského magnetického pole $H = 11,9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$.



Obr. 4.14: K příkladu 4.2

Řešení:



Magnetický indukční tok, procházející plochou ohraničenou kolejnicemi, lokomotivou a měřicím přístrojem (obr. 4.14) je $\Phi = Blx = \mu_0 Hlx$, kde μ_0 je permeabilita vakua. Indukované elektromotorické napětí určíme pomocí Faradayova zákona. Mezi kolejnicemi naměříme napětí

$$U = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| = \mu_0 H l \frac{dx}{dt} = \mu_0 H l v .$$

Po dosazení dostaneme

$$U = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 11,9 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 1,435 \text{ m} \cdot 16,66 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 0,36 \text{ mV} .$$

Úkol 4.3

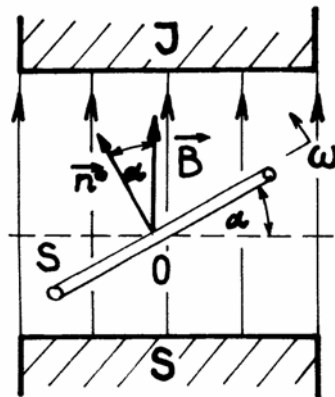
Na rotoru otáčejícím se v magnetickém poli o indukci $B=0,7 \text{ T}$ s frekvencí 1300 min^{-1} je v jednom žlábků na obvodě 20 vodičů délky 20 cm zapojených do série. Rotor má průměr 10 cm. Jaké maximální elektromotorické napětí se bude indukovat v celém vinutí?



[19,06 V]

4.7.3 Vznik harmonického elektromotorického napětí

Na základě Faradayova zákona určíme indukované elektromotorické napětí v rovinném závitě o ploše S , který rotuje rovnoměrně s frekvencí f kolem osy kolmé k indukčním čarám homogenního magnetického pole o magnetické indukci B (obr. 4.15).



Obr. 4.15: Vznik harmonického elektromotorického napětí

Je-li v čase $t=0$ rovina závitu kolmá k indukčním čarám, je v čase t úhel $\alpha = \omega t = 2\pi f t$.

Magnetický indukční tok procházející plochou závitu je

$$\Phi = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t . \quad (4.24)$$

Indukované elektromotorické napětí v závitě je podle (4.22)

$$U_e = - \frac{d\Phi}{dt} = \omega BS \sin \omega t = U_m \sin \omega t , \quad (4.25)$$

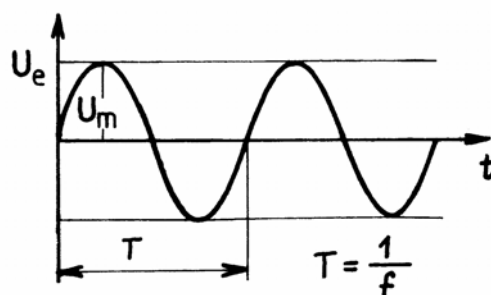
kde amplituda napětí $U_m = \omega BS$. Časový průběh indukovaného elektromotorického napětí je uveden na obr. 4.16.

Rotuje-li uvedeným způsobem v magnetickém poli cívka tvořená n závitů, je výsledné elektromotorické napětí dáno součtem elektromotorických napětí v jednotlivých závitěch.

Je-li magnetický indukční tok Φ ve všech závitěch stejný, je výsledné elektromotorické napětí v cívkě

$$U_e = -n \frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.26)$$

Na tomto principu pracují generátory elektrické energie s harmonickým časovým průběhem proudu a napětí, ve kterých dochází k transformaci mechanické nebo jiné energie v energii elektrického proudu.



Obr. 4.16: Časový průběh harmonického napětí

Úkol 4.4



Vypočítejte maximální, efektivní a okamžitou hodnotu indukovaného elektromotorického napětí v obdélníkové cívkě, která má 100 závitů, která se otáčí v homogenním magnetickém poli o indukci $B=0,8$ T. Průměr cívky je $d=30$ cm, délka aktivních vodičů $l=50$ cm. Cívka koná 3000 otáček za minutu. [3770 V; 2666 V; $3770 \text{ V} \sin 314 \text{ s}^{-1}t$]

4.7.4 Vlastní indukčnost vodiče



Prochází-li elektrický proud I vodičem (obr. 4.17), vytváří v okolním prostoru magnetické pole určené vektorem magnetické indukce \vec{B} .

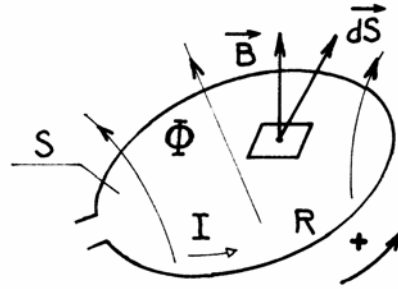
Tento proud vytváří vlastní magnetický indukční tok Φ procházející plochou S ohraničenou vodičem (ale jinak libovolnou)

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = LI. \quad (4.27)$$

Součinitel úměrnosti L definovaný vztahem

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (4.28)$$

nazýváme **indukčnost** vodiče. Jednotkou indukčnosti je $[L] = [\Phi]/[I] = \text{Wb/A} = \text{H}$ (henry).



Obr. 4.17: Vlastní indukčnost vodiče

Ze vztahu (4.27) vyplývá, že indukčnost vodiče je závislá na jeho rozměrech a tvaru. Chceme-li dosáhnout vyšší indukčnosti vodiče, použijeme vodič ve tvaru cívky s n závitů vinutými ve stejném smyslu. Např. pro štíhlou válcovou cívku (solenoid) se dá indukčnost vyjádřit vztahem

$$L = \mu_0 n^2 \frac{S}{l}, \quad (4.29)$$

kde n je počet závitů, S je plocha závitu, l je délka cívky. Indukčnost se dá dále zvýšit μ_r krát navinutím cívky na jádro z feromagnetického materiálu o relativní permeabilitě μ_r ($\mu_r = 10^2$ až 10^4).

Je-li proud I procházející vodičem podle obr. 4.17 proměnný v závislosti na čase, závisí na čase také magnetický indukční tok Φ a ve vodiči se indukuje elektromotorické napětí

$$U_e = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -L\frac{dI}{dt}. \quad (4.30)$$

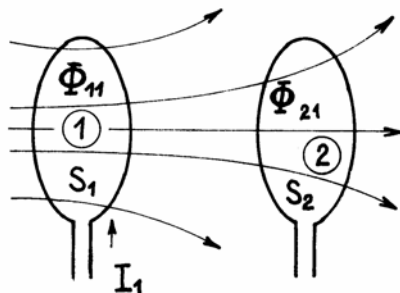
Ve vztahu (4.30) jsme předpokládali, že indukčnost vodiče L nezávisí na čase.

Roste-li proud I ve vodiči, je $\frac{dI}{dt} > 0$ a podle (4.30) je indukované elektromotorické napětí záporné. Zmenšuje tedy celkové elektromotorické napětí v obvodu, a tím působí proti změně, která jej vyvolává. Klesá-li proud ve vodiči, je $\frac{dI}{dt} < 0$ a indukované elektromotorické napětí je kladné. Působí tedy proti klesání proudu ve vodiči (Lencovo pravidlo).

4.7.5 Vzájemná indukčnost

Máme-li dva uzavřené vodiče (resp. cívky), které se mohou navzájem ovlivňovat prostřednictvím svých magnetických polí (obr. 4.18), potom proud I_1 v prvním vodiči vyvolá magnetický indukční tok Φ_{21} procházející plochou S_2 omezenou druhým vodičem. Tento tok je úměrný proudu I_1 a závisí na vzdálenosti, poloze a tvaru vodičů. Platí tedy

$$\Phi_{21} = M_{21}I_1. \quad (4.31)$$



Obr. 4.18: Vzájemná indukčnost vodičů

Součinitel úměrnosti M_{21} se nazývá **vzájemná indukčnost** dané soustavy vodičů. Podobně platí pro tok Φ_{12} buzený proudem I_2 ve druhém vodiči a procházející plochou S_1 , ohraničenou prvním vodičem,

$$\Phi_{12} = M_{12}I_2. \quad (4.32)$$

Dá se dokázat, že platí

$$M_{12} = M_{21} = M. \quad (4.33)$$

Jednotkou vzájemné indukčnosti je henry (H).

Prochází-li prvním vodičem časově proměnný proud I_1 , indukuje se ve druhém vodiči elektromotorické napětí

$$U_{e2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}. \quad (4.34)$$

Podobně napětí indukované v prvním vodiči časově proměnným proudem I_2 je

$$U_{e1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M \frac{dI_2}{dt}. \quad (4.35)$$

Na principu vzájemné elektromagnetické indukce je založena činnost transformátorů, uskutečňuje se přenos elektrické energie magnetickým polem (magnetická vazba mezi obvody) a podobně.

Úkol 4.5

Dvě cívky mají vzájemnou indukčnost $M=0,03 \text{ H}$. Určete velikost napětí indukovaného ve druhé cívkce, prochází-li první cívkou proud, který rovnoměrně klesá z hodnoty 10 A na hodnotu 4 A za $0,004 \text{ s}$.

[45 V]



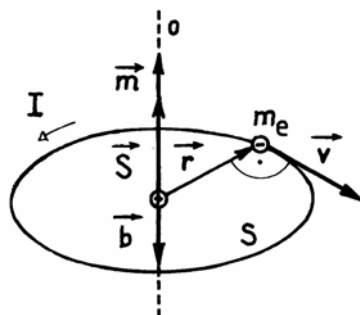
4.8 Magnetické vlastnosti látek



Každý atom se skládá z jádra, v němž je soustředěna prakticky celá hmotnost atomu a z elektronů. Je-li Z počet protonů v jádře, má jádro kladný náboj Ze , kde e je velikost elementárního náboje. Ve velké vzdálenosti od jádra (relativně

k jeho poloměru), se nachází periferní část atomu, která se skládá, je-li atom v elektricky neutrálním stavu, ze Z elektronů. Atom jako soustavu elektricky nabitých částic udržují v rovnováze síly elektrické, magnetické a výměnné.

Jádra atomů a elektrony mají jednak určitý mechanický moment hybnosti, jednak určitý magnetický moment. Tyto momenty mohou být jak dráhové (orbitální), potom charakterizují oběžný pohyb elektricky nabitě částice po uzavřené dráze, tak spinové. Spinový moment charakterizuje rotaci částice kolem vlastní osy.



Obr. 4.19: Magnetický moment elektronu

Vyšetříme dráhový magnetický moment elektronu, který obíhá kolem jádra po kruhové dráze (obr. 4.19).

Magnetické účinky elektronu, který obíhá po stálé uzavřené dráze s frekvencí f jsou ekvivalentní magnetickým účinkům elementárního proudu $I = e f$, který má opačný směr.

Oběžný elektron tedy vytváří proudovou smyčku (magnetický dipól), jejíž magnetický moment \vec{m} je definován

$$\vec{m} = I\vec{S}. \quad (4.36)$$

Potom pro velikost m platí

$$m = IS = efS = e \frac{v}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr. \quad (4.37)$$

Mechanický moment hybnosti elektronu k ose o je

$$\vec{b} = \vec{r} \times m_e \vec{v}, \quad (4.38)$$

jeho velikost je $b = r m_e v$, kde m_e je hmotnost elektronu.

Dráhový magnetický moment elektronu tedy můžeme vyjádřit pomocí mechanického momentu hybnosti (dráhového) \vec{b} jako

$$\vec{m} = -\frac{e}{2m_e} \vec{b}. \quad (4.39)$$

Elektron má kromě dráhového momentu mechanického a magnetického ještě spinový moment mechanický (spin) \vec{b}_s a spinový moment magnetický \vec{m}_s , které přísluší jeho rotaci kolem vlastní osy. Platí

$$\vec{m}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{b}_s. \quad (4.40)$$

Magnetický moment spinový může nabýt pouze dvou různých hodnot, odpovídajících dvěma smyslům otáčení elektronů kolem vlastní osy ($b_s = \pm \frac{h}{4\pi}$, kde h je Planckova konstanta).

Na proudovou smyčku s magnetickým momentem \vec{m} působí ve vnějším magnetickém poli dvojice sil, která se snaží natočit smyčku kolmo na směr indukčních čar, tedy tak, aby vektor \vec{m} měl stejný směr jako vektor \vec{B} , (obr. 4.3). Nachází-li se tedy látka ve vnějším magnetickém poli, snaží se toto pole natočit roviny oběžných drah elektronů tak, aby jejich normály (tedy magnetické momenty \vec{m}) byly souhlasně rovnoběžné se směrem pole. Stane-li se tak alespoň zčásti a magnetické momenty jednotlivých atomů v látce byly předtím chaoticky rozloženy, má látka jistý výsledný magnetický moment \vec{m} .

Každá proudová smyčka s nenulovým magnetickým momentem vyvolává ve svém okolí magnetické pole, jehož magnetická indukce je závislá na magnetickém momentu proudové smyčky \vec{m} .

Jsou-li výsledné magnetické momenty jednotlivých atomů (resp. molekul) nulové, nebudí tato látka makroskopické magnetické pole. Podobně se chovají látky, jejichž atomy (resp. molekuly) mají sice nenulové magnetické momenty, ale tyto jsou v látce rozloženy chaoticky, takže výsledný magnetický moment látky je nulový. Jestliže však výsledný magnetický moment látky je nenulový, vyvolává tato látka makroskopické magnetické pole.

Kontrolní otázky 4.1



1. Charakterizujte vzájemné silové působení pohybujících se elektricky nabitých částic.
2. Popište způsoby grafického znázornění magnetického pole indukčními čarami.
3. Vysvětlete, na čem závisí síla, kterou působí magnetické pole na částici s elektrickým nábojem a vyjádřete tuto závislost příslušnou vektorovou rovnicí.
4. Popište chování otočného závitu s proudem v homogenním a nehomogenním magnetickém poli.
5. Formulujte zákon elektromagnetické indukce matematicky i slovně a uveďte Lencovo pravidlo.
6. Vysvětlete, co je vzájemná indukčnost, jak je definována a jaké děje vznikají v proudových okruzích, vázaných magnetickým polem.

4.9 Autotest



1. Objasněte, jaké síly a na jaké objekty působí v magnetickém poli a uveďte rovnici, vyjadřující, na čem tyto síly závisí.

2. Uved'te rovnici určující sílu, již působí homogenní magnetické pole na přímý úsek vodiče s proudem. Jak závisí velikost této síly na poloze vodiče v magnetickém poli?
3. Určete zrychlení, kterého nabývá volná částice s elektrickým nábojem účinkem elektrického a magnetického pole.
4. Objasněte podstatu magnetického chování látek z jejich mikrostruktury.
5. Popište elektrické účinky magnetického pole v pohybujícím se vodiči a objasněte jejich podstatu.

4.10 Klíč k autotestu 4.9

1. Magnetické silové působení se projevuje na pohybující se náboje ($\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$) a proudovodiče ($d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$) nacházející se v magnetickém poli o indukci \vec{B} .
2. $F = BIl \sin \alpha$, α je úhel mezi směrem \vec{B} a směrem proudu.
3. $\vec{a} = \frac{1}{m} [Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B})]$, m je hmotnost částice v elektrickém poli o intenzitě \vec{E} a magnetickém poli o indukci \vec{B} .
4. Orbitální a spinový pohyb elektronů v atomech látky vyvolávají magnetické momenty. Je-li výsledný magnetický moment nenulový, vyvolá tato látka makroskopické magnetické pole.
5. Na elektrické náboje v pohybujícím se vodiči působí Lorenzova síla, která vyvolává ve vodiči intenzitu elektrického pole.



4.11 Korespondenční úkoly

1. Popište způsoby experimentálního studia magnetického pole.
2. Definiujte vektor magnetické indukce.
3. Vysvětlete, z čeho odvozujeme vzájemné silové působení proudovodičů. Aplikujte na případ dvou přímých, rovnoběžných proudovodičů.
4. Popište elektrické účinky časově proměnného magnetického indukčního toku ve vodivém okruhu, který je s ním spřažen.
5. Definiujte vlastní indukčnost vodiče a vysvětlete, jak ovlivňuje vedení proudu ve vodiči.
6. Deuteron obíhá po kruhové dráze o poloměru $r = 3$ cm v magnetickém poli o indukci $B = 1,2$ T. Určete rychlost deuteronu, periodu oběhu a potenciální rozdíl v elektrickém poli pro získání této rychlosti. Hmotnost deuteronu je $m = 3,34 \cdot 10^{-27}$ kg, náboj $Q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
7. Vypočtete maximální, efektivní a okamžitou hodnotu indukovaného elektromotorického napětí v obdélníkové cívce, která má 100 závitů, a která se otáčí v homogenním magnetickém poli o indukci $B = 0,8$ T. Průměr cívky



je $d = 30$ cm, délka aktivních vodičů $l = 50$ cm. Cívka koná 3000 otáček za minutu.

8. Dvě cívky mají vzájemnou indukčnost $M = 0,03$ H. Určete velikost napětí indukovaného ve druhé cívce, prochází-li první cívkou proud, který rovnoměrně klesá z hodnoty 10 A na hodnotu 4 A za 0,004 s.

4.12 Závěr



Magnetické silové působení se uskutečňuje prostřednictvím magnetického pole, které existuje v prostoru kolem každé pohybující se elektricky nabitě částice.

Magnetické pole můžeme sledovat v prostoru kolem pohybujících se nabitých částic, v okolí vodičů, kterými protéká elektrický proud a v okolí permanentních magnetů.

Magnetickým momentem proudové smyčky nazýváme veličinu $\vec{m} = I\vec{S}$, kde I je proud procházející danou smyčkou o ploše S .

Základní pozorovanou skutečností je, že síla $\Delta\vec{F}$, působící na úsek vodiče o délce Δl s proudem I , působí kolmo na tuto část vodiče.

Velikost síly ΔF je přímo úměrná velikosti proudu I a délce vodiče Δl ,

$$\Delta F = BI \Delta l.$$

Součinitel úměrnosti B charakterizuje vnější magnetické pole v místě vložení vodiče a nazývá se **magnetickou indukci**.

Vektorem magnetické indukce \vec{B} nazýváme vektor, který leží v tečně k indukční čáře v daném bodě pole, jeho smysl je určen smyslem příslušné indukční čáry.

Síla působící na bodový náboj Q pohybující se rychlostí \vec{v} v magnetickém poli o indukci \vec{B} je

$$\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Protékají-li dvěma vodiči proudy I_1 a I_2 , působí na sebe vodiče navzájem magnetickou silou.

Jev elektromagnetická indukce spočívá v tom, že ve vodiči, který se pohybuje v magnetickém poli, nebo který se nachází v magnetickém poli časově proměnném, vzniká elektromotorické napětí.

Pro indukované napětí U_e ve vodiči platí vztah $U_e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Uzavřený vodič, kterým protéká proud I vytváří vlastní tok $\Phi = LI$, kde L je vlastní indukčnost.

Máme-li dva uzavřené vodiče (resp. cívky), které se mohou navzájem ovlivňovat prostřednictvím svých magnetických polí, potom proud I_1 v prvním vodiči vyvolá magnetický indukční tok Φ_{21} procházející plochou S_2 omezenou druhým vodičem. Součinitel úměrnosti M_{21} ve vztahu $\Phi_{21} = M_{21}I_1$ se nazývá **vzájemná indukčnost** dané soustavy vodičů.

Jádra atomů a elektrony mají jednak určitý mechanický moment hybnosti, jednak určitý magnetický moment. Tyto momenty mohou být jak dráhové (orbitální), potom charakterizují oběžný pohyb elektricky nabitě částice po uzavřené dráze, tak spinové. Spinový moment charakterizuje rotaci částice kolem vlastní osy.

Na proudovou smyčku s magnetickým momentem \vec{m} působí ve vnějším magnetickém poli dvojice sil, která se snaží natočit smyčku kolmo na směr indukčních čar.

Jsou-li výsledné magnetické momenty jednotlivých atomů (resp. molekul) nulové, nebudí tato látka makroskopické magnetické pole. Podobně se chovají látky, jejichž atomy (resp. molekuly) mají sice nenulové magnetické momenty, ale tyto jsou v látce rozloženy chaoticky, takže výsledný magnetický moment látky je nulový. Jestliže však výsledný magnetický moment látky je nenulový, vyvolává tato látka makroskopické magnetické pole.

5 Obvody s časově proměnnými proudy

5.1 Elektrický obvod

Elektrické obvody se skládají z aktivních a pasivních součástí (prvků, elementů). **Aktivními prvky** obvodů jsou všechny zdroje elektrického proudu.



Základními **pasivními prvky** jsou odpor (rezistor), cívka a kondenzátor. Zatímco odpor se chová vždy jako spotřebič elektrické energie, chová se cívka a kondenzátor jednou jako zdroj a jindy jako spotřebič. Např. kondenzátor se při nabíjení chová jako spotřebič, při vybíjení jako zdroj energie.

Je-li elektrický obvod složen ze zdrojů elektrického proudu a ideálních odporů (odporů, které nemají vlastní indukčnost a kapacitu), musí mít zdroj proudu časově proměnné elektromotorické napětí, má-li obvodem protékat časově proměnný proud.

V případě, že se v obvodu nachází kondenzátor nebo cívka, vzniká v obvodu časově proměnný proud i v případě, že je do obvodu připojen zdroj proudu o konstantním elektromotorickém napětí (vzniká tzv. přechodový jev).

V dalším textu budeme značit veličiny, které mají konstantní hodnoty v závislosti na čase velkými písmeny (U, I, Q, P) a veličiny časově proměnné malými písmeny (u, i, q, p). Pro okamžité hodnoty proudů a okamžité hodnoty napětí na jednotlivých prvcích elektrických obvodů platí Kirchhoffovy zákony. Je však třeba určit velikosti napětí na odporu, cívce a kondenzátoru, protéká-li těmito prvky časově proměnný proud $i = i(t)$.

5.2 Odpor, cívka a kondenzátor jako prvky elektrického obvodu

5.2.1 Odpor

Odpor je prvek elektrických obvodů, který při průchodu elektrického proudu transformuje elektrickou energii na energii tepelnou. Při průchodu proudu i odporem R je **napětí na odporu**

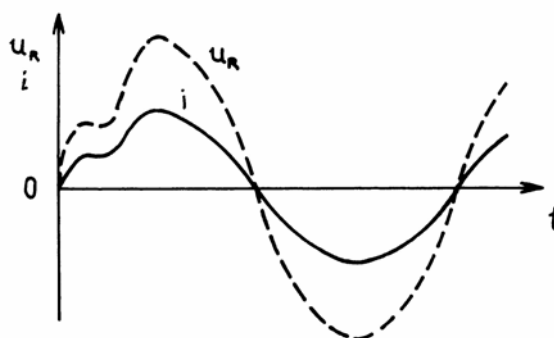
$$u_R = Ri. \quad (5.1)$$

Časový průběh napětí na odporu odpovídá časovému průběhu proudu (obr. 5.1). Okamžitý výkon elektrického proudu dodávaný do odporu je

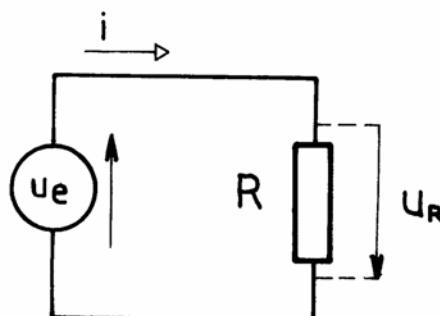
$$p = Ri^2. \quad (5.2)$$

Ve schématu obvodu složeného ze zdroje a odporu (obr. 5.2) vyznačíme šipkou kladný směr elektromotorického napětí zdroje (od záporné svorky zdroje ke kladné). Kladný směr svorkového napětí zdroje je potom opačný. Pro tuto orientaci vyznačíme šipkou kladný směr proudu a kladný směr napětí na odporu (směr od místa vyššího potenciálu k místu nižšího potenciálu). Je-li okamžitá polarita svorek zdroje obrácená, než naznačuje zvolený kladný směr, projeví se

to znaménkem minus u okamžitých hodnot elektromotorického napětí, proudu a napětí na odporu.



Obr. 5.1: Časový průběh napětí na odporu



Obr. 5.2: Schéma obvodu složeného ze zdroje a odporu

5.2.2 Cívka

Cívka je prvek elektrických obvodů, který je charakterizován vlastní indukčností L a ohmickým odporem vinutí R . Jestliže je zapojena do elektrického obvodu a protéká jí časově proměnný proud i , je okamžitá hodnota energie magnetického pole cívky

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2. \quad (5.3)$$

Proto při narůstání absolutní hodnoty proudu se na úkor zdroje elektrické energie zvětšuje energie magnetického pole cívky. V cívce se indukuje podle (4.30) elektromotorické napětí

$$u_{eL} = -L \frac{di}{dt}, \quad (5.4)$$

kteřé je orientováno proti směru proudu. Při klesání absolutní hodnoty proudu dochází ke snižování energie magnetického pole, v cívce se indukuje elektro-

motorické napětí, které je orientováno ve směru proudu a energie nahromaděná v magnetickém poli se vrací zpět do zdroje.

V elektrickém schématu můžeme cívku o indukčnosti L a odporu vinutí R nahradit sériovou kombinací odporu o velikosti R a ideální cívky o indukčnosti L s nulovým ohmickým odporem (obr. 5.3). Cívka je zapojena do obvodu zdroje o elektromotorickém napětí u_e .

Podle II. Kirchhoffova zákona můžeme pro okamžitou hodnotu napětí na odporu v náhradním schématu napsat

$$u_R = u_e + u_{eL}, \quad (5.5)$$

kde u_{eL} je indukované elektromotorické napětí v cívce podle (5.4). Rovnici (5.5) můžeme vyjádřit jako

$$u_R = u_e - L \frac{di}{dt}, \quad (5.6)$$

$$u_R + L \frac{di}{dt} = u_e \quad (5.7)$$

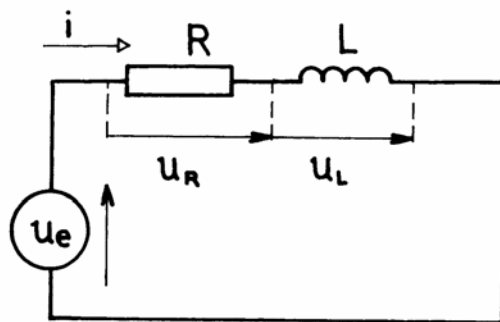
nebo

$$u_R + u_L = u_e, \quad (5.8)$$

kde u_L je napětí na **ideální cívce**,

$$u_L = L \frac{di}{dt}. \quad (5.9)$$

Jeho hodnota je kladná pro $\frac{di}{dt} > 0$. Kladný směr u_L na obr. 5.3 odpovídá této situaci.



Obr. 5.3: Náhradní obvod cívky

Rovnice (5.8) vyjadřuje druhý Kirchhoffův zákon: Součet okamžitých hodnot napětí na odporu a na ideální cívce v uzavřeném okruhu se rovná elektromotorickému napětí zdroje.

5.2.3 Kondenzátor

Kondenzátor je prvek elektrického obvodu, který má schopnost akumulovat na svých deskách kladný a záporný elektrický náboj a vytvářet tak elektrické pole s okamžitou hodnotou energie

$$E_e = \frac{1}{2} C u_C^2, \quad (5.10)$$

kde u_C je napětí mezi deskami kondenzátoru. Při nabíjení kondenzátoru roste úměrně s nábojem na deskách kondenzátoru také napětí mezi deskami.

Je-li nabíjecí proud kondenzátoru i , zvětší se za elementární přírůstek času dt náboj na kondenzátoru o

$$dq = i dt \quad (5.11)$$

a napětí o

$$du_C = \frac{1}{C} dq = \frac{1}{C} i dt. \quad (5.12)$$

Napětí na kondenzátoru bude potom

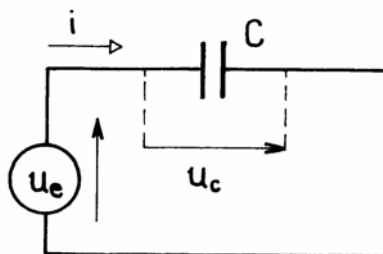
$$u_C = \frac{1}{C} \int i dt. \quad (5.13)$$

Je-li v čase $t = 0$ napětí kondenzátoru $u_C(0)$, můžeme pro napětí v čase t napsat

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i dt. \quad (5.14)$$

Kondenzátor nemůže být aktivním prvkem elektrického obvodu. Při vybíjení se získá jen ta energie, která byla při nabíjení dodána.

Kladný směr proudu v obvodu s kondenzátorem udává kladný směr napětí na kondenzátoru (od kladné desky k záporné), (obr. 5.4). Při tomto směru proudu se nabíjí levá deska kondenzátoru kladným nábojem a pravá deska záporným nábojem.



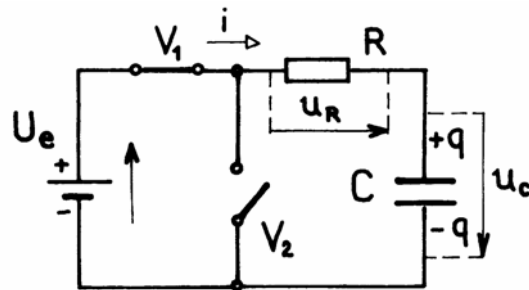
Obr. 5.4: Kondenzátor jako prvek elektrického obvodu

5.3 Přechodové jevy

Použití Kirchhoffových zákonů pro řešení obvodů s časově proměnnými proudy můžeme ukázat v případě analýzy přechodových jevů v elektrických obvodech. **Přechodovým jevem** nazýváme elektrický děj v elektrických obvodech po připojení nebo odpojení elektrických zdrojů. Po skončení přechodového jevu se nachází elektrický obvod v ustáleném stavu.

Nejjednodušším případem je řešení přechodového jevu v sériovém obvodu RC nebo RL při připojení zdroje konstantního elektromotorického napětí U_e . Provedeme řešení pro sériový obvod RC .

Připojíme-li (v čase $t = 0$) ke zdroji konstantního elektromotorického napětí U_e sériový obvod RC (obr. 5.5), začne se kondenzátor nabíjet elektrickým nábojem a obvodem protéká časově proměnný proud $i = i(t)$. Tento proud protéká tak dlouho, až se kondenzátor nabije na napětí zdroje U_e .



Obr. 5.5: Sériový RC obvod

Uvedený děj můžeme popsat pomocí druhého Kirchhoffova zákona. Platí

$$u_R + u_C = U_e. \quad (5.15)$$

Dosadíme-li za hodnoty napětí na odporu a kondenzátoru výrazy podle (5.1) a (5.13), dostáváme

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt = U_e. \quad (5.16)$$

Derivujeme-li rovnici (5.16) podle času, dostáváme

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (5.17)$$

Řešením diferenciální rovnice (5.17) separací proměnných dostáváme hledanou funkci $i = i(t)$. Platí

$$\frac{di}{i} = -\frac{1}{RC} dt, \quad (5.18)$$

$$\ln i = -\frac{t}{RC} + K', \quad (5.19)$$

$$i = e^{-\frac{t}{RC} + K'} = e^{K'} e^{-\frac{t}{RC}} = Ke^{-\frac{t}{RC}}, \quad (5.20)$$

kde K' nebo $K = e^{K'}$ je integrační konstanta. Integrační konstantu K určíme z těchto podmínek:

1. V čase $t = 0$ je $u_C(0) = 0$ (pro nenabitý kondenzátor).
2. V čase $t = \infty$ je $u_C(\infty) = U_e$ (kondenzátor je nabit na napětí zdroje).

Určíme-li podle (5.14) a (5.20) u_C ,

$$\begin{aligned} u_C &= u_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t K e^{-\frac{t}{RC}} dt = u_C(0) + \frac{K}{C} \left[-RC e^{-\frac{t}{RC}} \right]_0^t = \\ &= u_C(0) + KR \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right), \end{aligned} \quad (5.21)$$

dostáváme pro $t = \infty$ a $u_C(0) = 0$

$$u_C(\infty) = KR = U_e, \quad (5.22)$$

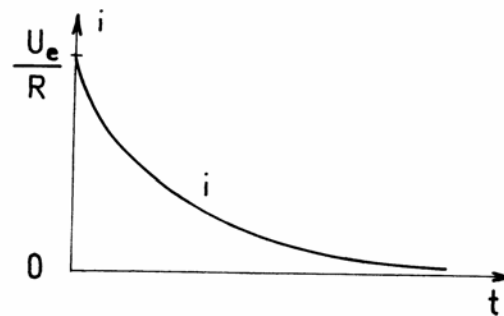
$$K = \frac{U_e}{R}. \quad (5.23)$$

Potom

$$i = \frac{U_e}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (5.24)$$

$$u_R = Ri = U_e e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (5.25)$$

$$u_C = U_e \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (5.26)$$



Obr. 5.6: Graf závislosti proudu na čase

Veličina RC v těchto vzorcích se nazývá časová konstanta sériového RC obvodu. Ze vztahu (5.24) pro proud vyplývá, že v okamžiku připojení zdroje při $t = 0$ je $i(0) = \frac{U_e}{R}$, čili nenabitý kondenzátor v obvodu se chová jako vodivé spojení.

Časová závislost proudu je graficky znázorněna na obr. 5.6.

Úkol 5.1

Kondenzátor o kapacitě $240 \mu\text{F}$ je přes odpor $3 \text{ M}\Omega$ připojen ke zdroji stejnosměrného napětí 48 V . Vypočítejte, za jakou dobu od připojení zdroje dosáhne napětí na kondenzátoru 24 V a jaký proud bude v tomto okamžiku odebírán ze zdroje.



[499,1 s; $8 \mu\text{A}$]

Úkol 5.2

Kondenzátor o kapacitě $1 \mu\text{F}$ byl připojen ke zdroji stejnosměrného proudu o svorkovém napětí 100 V a po nabití na plné napětí byl odpojen a připojen k odporu $1 \text{ M}\Omega$. a) Jaký náboj byl na deskách kondenzátoru v okamžiku odpojení od zdroje? b) Jaký proud protékal odporem v okamžiku připojení odporu? c) Za jak dlouho po připojení odporu kleslo napětí na kondenzátoru na desetinu původní hodnoty?



[a) 10^{-4} C ; b) $0,1 \text{ mA}$; c) $2,3 \text{ s}$]

Kontrolní otázky 5.1

1. Formulujte Kirchhoffovy zákony pro řešení elektrických obvodů s časově proměnnými proudy.
2. Odvoďte vztah pro napětí na cívce, prochází-li jí časově proměnný elektrický proud.
3. Odvoďte vztah pro napětí na kondenzátoru, prochází-li jím časově proměnný elektrický proud.
4. Jaká je časová závislost proudu a napětí na kondenzátoru v sériovém obvodu RC , který je připojen ke zdroji o konstantním elektromotorickém napětí?

**5.4 Autotest**

1. Formulujte Kirchhoffovy zákony pro řešení elektrických obvodů s časově proměnnými proudy.
2. Odvoďte vztah pro napětí na cívce, prochází-li jí časově proměnný elektrický proud.
3. Odvoďte vztah pro napětí na kondenzátoru, prochází-li jím časově proměnný elektrický proud.

**5.5 Klíč k autotestu 5.4**

1. Součet okamžitých hodnot proudů v uzlu se rovná nule. Součet okamžitých hodnot elektromotorických napětí v uzavřené smyčce se rovná součtu okamžitých hodnot napětí na jednotlivých prvcích obvodu.



2. Indukčnost vodiče L je definována jako poměr magnetického indukčního toku Φ a proudu i . Z Faradayova zákona vyplývá pro indukované elektromotorické napětí $u_{eL} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$, napětí na cívce je $u_L = -u_{eL}$.
3. Napětí na kondenzátoru je $u_C = \frac{q_C}{C}$, kde $q_C = \int i dt$.

5.6 Korespondenční úkoly



- Jaká je časová závislost proudu a napětí na kondenzátoru v sériovém obvodu RC , který je připojen ke zdroji o konstantním elektromotorickém napětí?
- Jaká podmínka musí být v sériovém RC obvodu splněna, aby byl protékající proud úměrný časové derivaci připojeného elektromotorického napětí?
- Jaká podmínka musí být splněna, aby napětí na kondenzátoru v sériovém obvodu RC bylo úměrné integrálu elektromotorického napětí připojeného do RC obvodu?
- Kondenzátor o kapacitě $1 \mu\text{F}$ byl připojen ke zdroji stejnosměrného proudu o svorkovém napětí 100 V a po nabití na plné napětí byl odpojen a připojen k odporu $1 \text{ M}\Omega$. a) Jaký náboj byl na deskách kondenzátoru v okamžiku odpojení od zdroje? b) Jaký proud protékal odporem v okamžiku připojení odporu? c) Za jak dlouho po připojení odporu kleslo napětí na kondenzátoru na desetinu původní hodnoty?

5.7 Závěr



Elektrické obvody se skládají z aktivních a pasivních součástí (prvků, elementů). **Aktivními prvky** obvodů jsou všechny zdroje elektromotorického napětí. Základními **pasivními prvky** jsou odpor (rezistor), cívka a kondenzátor.

Odpor je prvek elektrických obvodů, který při průchodu elektrického proudu transformuje elektrickou energii na energii tepelnou. Při průchodu proudu i odporem R je **napětí na odporu**

$$u_R = Ri.$$

Cívka je prvek elektrických obvodů, který je charakterizován vlastní indukčností L a ohmickým odporem vinutí R . Jestliže je zapojena do elektrického obvodu a protéká jí časově proměnný proud i , je okamžitá hodnota energie magnetického pole cívky

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2.$$

Kondenzátor je prvek elektrického obvodu, který má schopnost akumulovat na svých deskách kladný a záporný elektrický náboj a vytvářet tak elektrické pole s okamžitou hodnotou energie

$$E_e = \frac{1}{2} C u_C^2.$$

Přechodovým jevem nazýváme elektrický děj v elektrických obvodech po připojení nebo odpojení elektrických zdrojů.

Nejjednodušším případem je řešení přechodového jevu v sériovém obvodu RC nebo RL při připojení zdroje konstantního elektromotorického napětí U_e .

Pro proud v RC obvodu platí

$$i = \frac{U_e}{R} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

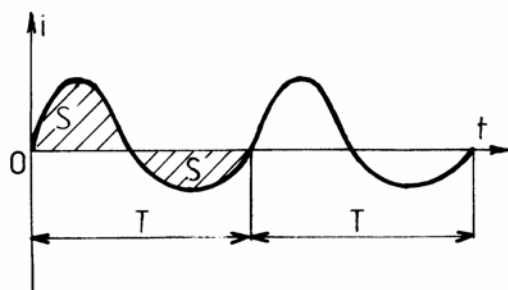
Závislosti mezi proudem a napětím na cívce a na kondenzátoru je možné využít pro realizaci derivačních a integračních obvodů pro elektrické signály.

6 Obvody se střídavými elektrickými proudy

6.1 Střídavé elektrické veličiny a jejich charakteristiky

6.1.1 Střídavý elektrický proud a napětí

Střídavou elektrickou veličinou (např. proudem nebo napětím) rozumíme veličinu, jejíž časová závislost je zadána střídavou funkcí. Střídavá funkce je definována jako periodická funkce času, pro kterou platí, že plochy, omezené grafem této funkce nad osou času a pod ní, mají stejný obsah (obr. 6.1). Tato podmínka pro střídavý elektrický proud znamená, že celkový náboj přenesený libovolným průřezem vodiče za každou periodu T je nulový.



Obr. 6.1: Střídavá funkce

Nejdůležitějším typem střídavé funkce je harmonická funkce. **Střídavý harmonický proud** i (zkráceně střídavý proud) definujeme vztahem

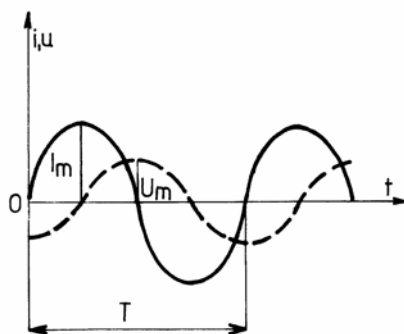
$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (6.1)$$

kde i je okamžitá hodnota proudu (obr. 6.2), I_m je amplituda proudu, ω je kruhová frekvence (úhlový kmitočet), $\omega = 2\pi f$, f je kmitočet proudu, $T = \frac{1}{f}$ je perioda, φ_1 je počáteční fáze, $\omega t + \varphi_1$ je fáze v čase t .

Podobně je definováno **střídavé harmonické napětí** u (střídavé napětí) vztahem

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_2). \quad (6.2)$$

Střídavý proud (6.1) je proti střídavému napětí (6.2) posunut o fázový úhel $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$.



Obr. 6.2: Střídavý harmonický proud

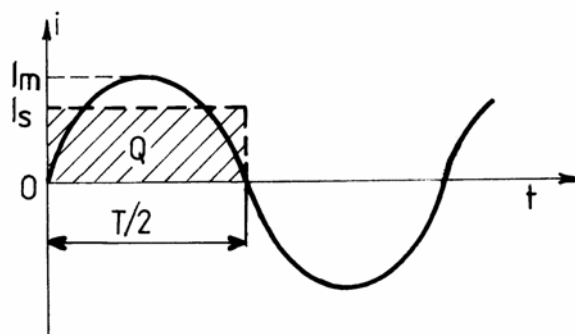
V dalším textu budeme harmonické střídavé proudy a napětí nazývat střídavé proudy a napětí.

6.1.2 Střední hodnota střídavého proudu

Střední hodnota I_s střídavého proudu je hodnota stejnosměrného ustáleného proudu, kterým se přeneše za polovinu periody stejný elektrický náboj Q jako daným střídavým proudem (obr. 6.3). Pro proud daný vztahem $i = I_m \sin \omega t$ platí

$$I_s \frac{T}{2} = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \, dt, \quad (6.3)$$

$$I_s = \frac{2}{\pi} I_m. \quad (6.4)$$



Obr. 6.3: Střední hodnota proudu

6.1.3 Efektivní hodnota střídavého proudu

Důležitým parametrem střídavého proudu je **efektivní hodnota proudu** I . Užívá se např. pro výpočet středního výkonu střídavého proudu. Je definována jako hodnota stejnosměrného ustáleného proudu, který dodá do odporu o hodnotě R za periodu T stejnou energii jako daný střídavý proud. Pro efektivní hodnotu I střídavého proudu $i = I_m \sin \omega t$ platí vztah

$$RI^2T = \int_0^T Ri^2 dt, \quad (6.5)$$

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \sin^2 \omega t dt = \frac{I_m^2}{2}, \quad (6.6)$$

$$I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}. \quad (6.7)$$

Podobně efektivní hodnota střídavého napětí $u = U_m \sin \omega t$ je

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}. \quad (6.8)$$

Efektivní hodnota střídavého napětí v naší elektrické rozvodné síti je $U = 220 \text{ V}$, amplituda $U_m = U\sqrt{2} = 311 \text{ V}$, kmitočet $f = 50 \text{ Hz}$ a kruhová frekvence $\omega = 2\pi f = 314 \text{ s}^{-1}$.

Příklad 6.1

Najděte střední a efektivní hodnotu harmonického proudu o periodě T a amplitudě proudu I_m po jednocestném usměrnění. (obr. 6.4).



Řešení:

Časový průběh proudu $i = I_m \sin \omega t$ po jednocestném usměrnění je v každé periodě T dán vztahy



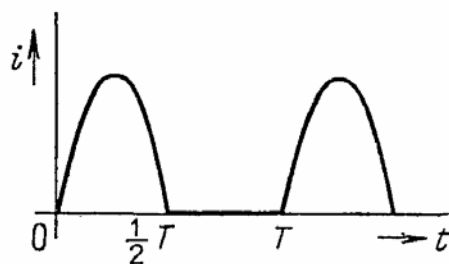
$$i(t) = I_m \sin \omega t \text{ pro } t \in \langle 0, T/2 \rangle,$$

$$i(t) = 0 \text{ pro } t \in \langle T/2, T \rangle,$$

kde $\omega = 2\pi/T$.

a) Střední hodnota proudu v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ je

$$I_s = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{T} I_m \frac{T}{2\pi} \left[-\cos \frac{2\pi}{T} t \right]_0^{T/2} = \frac{I_m}{\pi}$$



Obr. 6.4: Harmonický proud po jednocestném usměrnění

b) Efektivní hodnotu proudu I v časovém intervalu $\langle 0, T \rangle$ určíme ze vztahu

$$I^2 = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2 \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \int_0^{T/2} \left[1 - \cos \frac{4\pi}{T} t \right] dt = \frac{I_m^2}{4}, \quad I = \frac{I_m}{2}.$$

6.2 Odpor, cívka a kondenzátor v obvodu střídavého proudu



Budeme nejdříve vyšetřovat nejjednodušší případy, kdy je ke zdroji střídavého elektromotorického napětí připojen buďto ideální odpor (bez vlastní indukčnosti a kapacity) nebo ideální cívka (bez vlastního odporu a kapacity) nebo ideální kondenzátor (bez vlastní indukčnosti a odporu).

6.2.1 Odpor v obvodu střídavého proudu

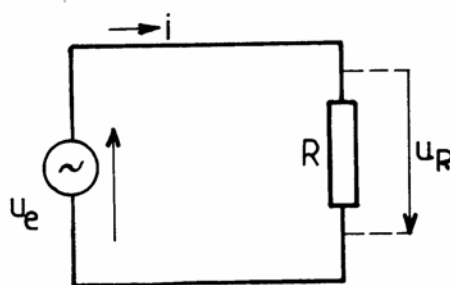
Je-li ke svorkám střídavého elektrického zdroje o elektromotorickém napětí $u_e = U_m \sin \omega t$ připojen odpor o hodnotě R (obr. 6.5), platí podle druhého Kirchhoffova zákona pro napětí u_R na odporu

$$u_R = u_e, \quad Ri = U_m \sin \omega t, \quad (6.9)$$

$$i = \frac{U_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t, \quad (6.10)$$

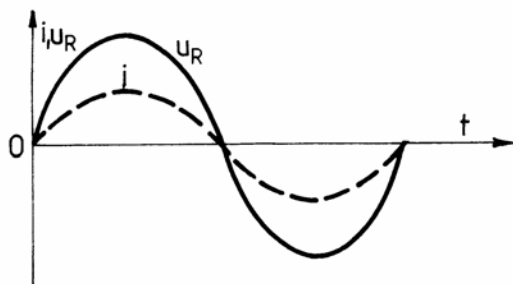
kde amplituda proudu

$$I_m = \frac{U_m}{R}. \quad (6.11)$$



Obr. 6.5: Odpor v obvodu střídavého proudu

Střídavý proud procházející odporem je ve fázi s napětím na odporu. Ohmův zákon platí pro okamžité, maximální a efektivní hodnoty proudů a napětí (obr. 6.6).



Obr. 6.6: Časový průběh střídavého proudu a napětí na odporu

6.2.2 Cívka v obvodu střídavého proudu

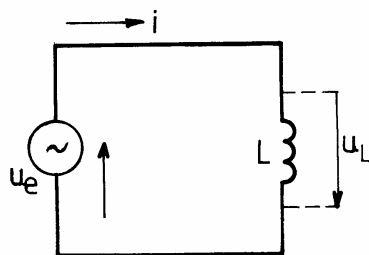
Je-li ke svorkám střídavého zdroje o elektromotorickém napětí $u_e = U_m \sin \omega t$ připojena cívka o indukčnosti L (obr. 6.7), platí podle druhého Kirchhoffova zákona pro napětí u_L na cívce

$$u_L = u_e, \quad L \frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t, \quad (6.12)$$

$$i = \frac{1}{L} \int U_m \sin \omega t \, dt = -\frac{U_m}{\omega L} \cos \omega t = I_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (6.13)$$

kde amplituda proudu

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L} = \frac{U_m}{X_L}. \quad (6.14)$$



Obr. 6.7: Cívka v obvodu střídavého proudu

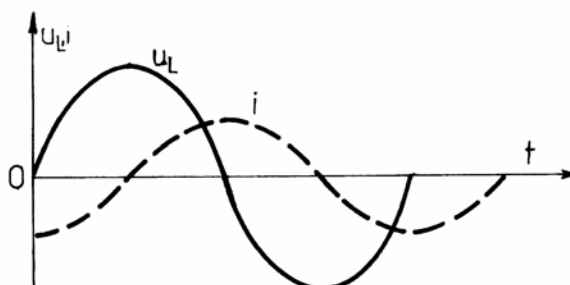
Veličina $X_L = \omega L$ se nazývá **induktivní reaktance**. Její jednotkou je ohm. Z (6.14) vyplývá, že amplituda napětí na cívce je dána pomocí amplitudy proudu a indukční reaktance vztahem

$$U_m = X_L I_m. \quad (6.15)$$

Pro efektivní hodnoty proudu a napětí platí

$$U = X_L I. \quad (6.16)$$

Ze vztahu (6.13) vyplývá, že proud v cívice je vzhledem k napětí na cívice zpožděn o fázový úhel $\frac{\pi}{2}$ (obr. 6.8).



Obr. 6.8: Časový průběh střídavého proudu a napětí na cívice

6.2.3 Kondenzátor v obvodu střídavého proudu

Je-li ke svorkám střídavého zdroje o elektromotorickém napětí $u_e = U_m \sin \omega t$ připojen kondenzátor o kapacitě C (obr. 6.9), platí podle druhého Kirchhoffova zákona pro napětí u_C na kondenzátoru

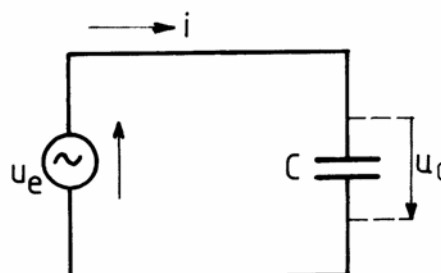
$$u_C = u_e, \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{C} \int i \, dt = U_m \sin \omega t, \quad (6.18)$$

$$i = \omega C U_m \cos \omega t = I_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (6.19)$$

kde amplituda proudu

$$I_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}} = \frac{U_m}{X_C}. \quad (6.20)$$



Obr. 6.9: Kondenzátor v obvodu střídavého proudu

Veličina $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se nazývá **kapacitní reaktance**. Její jednotkou je ohm.

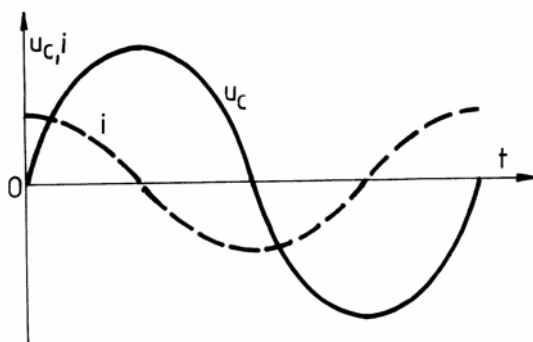
Z (6.20) vyplývá, že amplituda napětí na kondenzátoru je dána pomocí amplitudy proudu a kapacitní reaktance vztahem

$$U_m = X_C I_m. \quad (6.21)$$

Pro efektivní hodnoty proudu a napětí platí

$$U = X_C I. \quad (6.22)$$

Ze vztahu (6.19) vyplývá, že proud v kondenzátoru předbíhá napětí na kondenzátoru o fázový úhel $\frac{\pi}{2}$ (obr. 6.10).



Obr. 6.10: Časový průběh střídavého proudu a napětí na kondenzátoru

6.3 Sériový obvod RLC se střídavým proudem

Ke zdroji střídavého elektromotorického napětí $u_e = U_m \sin \omega t$ je připojen sériový RLC obvod (obr. 6.11). Určíme proud i protékající obvodem. Podle druhého Kirchhoffova zákona platí

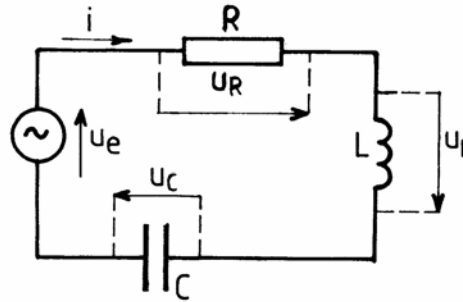
$$u_R + u_L + u_C = u_e. \quad (6.23)$$

Vyjádříme napětí u_R , u_L a u_C pomocí proudu i ,

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin \omega t. \quad (6.24)$$

Derivujeme-li rovnici (6.24) podle času, dostaneme

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \omega U_m \cos \omega t. \quad (6.25)$$



Obr. 6.11: Sériový RLC obvod se střídavým proudem

Rovnice (6.25) je lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty a s nenulovou pravou stranou (nehomogenní rovnice). Její obecné řešení se skládá z obecného řešení příslušné homogenní rovnice (s nulovou pravou stranou) a partikulárního řešení odpovídajícího pravé straně rovnice (6.25). Obecné řešení homogenní rovnice popisuje přechodový jev, který vzniká při připojení zdroje k obvodu. Tento děj je po určité době prakticky zatlučen a soustava přechází do ustáleného stavu, kdy je proud dán partikulárním řešením rovnice (6.25) ve tvaru

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.26)$$

K úplnému určení proudu je třeba pomocí (6.25) určit I_m a φ jako funkci U_m , ω , R , L a C . Proud i podle (6.26) musí splňovat rovnici (6.24) a (6.25) pro libovolný čas t . Jeho dosazením do (6.24) dostáváme

$$RI_m \sin(\omega t + \varphi) + \left(\omega LI_m - \frac{I_m}{\omega C} \right) \cos(\omega t + \varphi) = U_m \sin \omega t. \quad (6.27)$$

K určení I_m a φ potřebujeme dvě rovnice, které dostaneme z (6.27), dosadíme-li např. za $\omega t + \varphi = 0$ a $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$. Pro $\omega t + \varphi = 0$ dostáváme

$$\omega LI_m - \frac{I_m}{\omega C} = -U_m \sin \varphi. \quad (6.28)$$

Pro $\omega t + \varphi = \frac{\pi}{2}$ platí

$$RI_m = U_m \cos \varphi. \quad (6.29)$$

Umocníme-li obě rovnice na druhou, dostáváme

$$I_m^2 \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 = U_m^2 \sin^2 \varphi, \quad (6.30)$$

$$I_m^2 R^2 = U_m^2 \cos^2 \varphi. \quad (6.31)$$

Rovnice (6.30) a (6.31) sečteme a odtud dostáváme

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_m}{Z}. \quad (6.32)$$

Z rovnic (6.28) a (6.29) získáme

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \quad (6.33)$$

Veličina

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (6.34)$$

se nazývá **impedance** sériového RLC obvodu. Jednotkou impedance je ohm, $[Z] = \Omega$. Pomocí impedance Z můžeme vyjádřit amplitudu U_m střídavého napětí na svorkách RLC obvodu jako

$$U_m = Z I_m. \quad (6.35)$$

Efektivní hodnotu U napětí na svorkách RLC obvodu vyjádříme pomocí impedance Z a efektivní hodnoty proudu I

$$U = Z I. \quad (6.36)$$

Střídavý proud i v obvodu je posunut ve fázi o úhel φ proti napětí na svorkách obvodu.

Impedance Z obvodu podle (6.34) závisí při zadaných hodnotách R , L , C na kruhové frekvenci zdroje ω . Impedance nabývá minimální hodnoty $Z = R$, platí-li

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0. \quad (6.37)$$

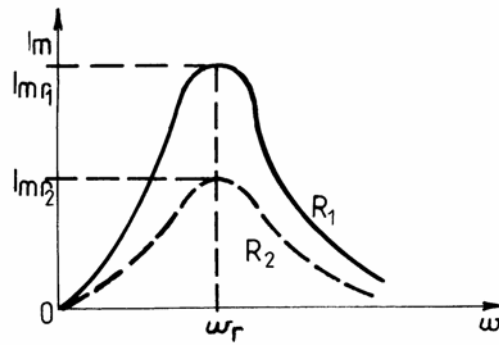
Tento stav nazýváme **rezonancí** sériového RLC obvodu. Rezonanční kruhová frekvence ω_r se určí z (6.37)

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.38)$$

Amplituda střídavého proudu v obvodu dosahuje při rezonanci maximální hodnoty

$$I_{mr} = \frac{U_m}{R} \quad (6.39)$$

Grafické znázornění závislosti amplitudy I_{mr} na kruhové frekvenci střídavého proudu je uvedena na obr. 6.12 pro dvě různé hodnoty odporů v obvodu R_1 a R_2 , $R_1 < R_2$.



Obr. 6.12: Rezonanční křivky sériového RLC obvodu

Příklad 6.2

Cívka s indukčností $L = 4 \text{ H}$ a odporem $R = 300 \Omega$ je zapojena v sérii s kondenzátorem $C = 2 \mu\text{F}$ a připojena na zdroj o napětí $U = 100 \text{ V}$ s kmitočtem $f = 50 \text{ Hz}$. Vypočítejte a) proud v obvodu, b) napětí na kondenzátoru, c) napětí na cívce, d) kmitočet zdroje pro maximální proud při konstantním napětí zdroje, e) napětí na kondenzátoru a na cívce pro předcházející případ.

Řešení:

a) Impedance sériového RLC obvodu je

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{(300 \Omega)^2 + \left(314 \text{ s}^{-1} \cdot 4 \text{ H} - \frac{1}{314 \text{ s}^{-1} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}\right)^2} = 450,7 \Omega.$$

Obvodem protéká proud o efektivní hodnotě

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{100 \text{ V}}{450,7 \Omega} = 0,222 \text{ A}.$$

b) Napětí na kondenzátoru je

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I = 1592,3 \Omega \cdot 0,222 \text{ A} = 353,5 \text{ V}.$$

c) Napětí na cívce je

$$U_{RL} = Z_{RL} I = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I =$$

$$= \sqrt{(300 \Omega)^2 + (314 \text{ s}^{-1} \cdot 4 \text{ H})^2} \cdot 0,222 \text{ A} = 286,7 \text{ V}.$$

d) Pro proudovou rezonanci musí nabývat Z minimální hodnoty rovné R .
Odtud vyplývá podmínka

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0, \quad f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{4 \text{ H} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 56,27 \text{ Hz}.$$

$$\text{Potom } I = \frac{U}{R} = 0,333 \text{ A}.$$

e) Při rezonanci je napětí na kondenzátoru

$$U_C = \frac{I}{\omega C} = \frac{0,333 \text{ A}}{2\pi \cdot 56,27 \text{ Hz} \cdot 2 \cdot 10^{-6} \text{ F}} = 470,9 \text{ V}.$$

Napětí na cívce je

$$U_{RL} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} I = \\ = \sqrt{(300 \Omega)^2 + (2\pi \cdot 56,27 \text{ s}^{-1} \cdot 4 \text{ H})^2} \cdot 0,333 \text{ A} = 481,4 \text{ V}.$$

Úkol 6.1

Rezonanční LC obvod v rozhlasovém přijímači je naladěn na frekvenci 468 kHz při kapacitě kondenzátoru 320 pF. Jak velký kondenzátor je třeba dát do série s tímto kondenzátorem, chceme-li obvod přeladit na frekvenci o 200 kHz vyšší?



[308,2 pF]

6.4 Symbolicko-komplexní metoda řešení obvodů se střídavými proudy

Při řešení sériového RLC obvodu bylo ukázáno, že druhý Kirchhoffův zákon pro uzavřenou smyčku je vyjádřen lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty (6.25), jejímž řešením je hledaný proud $i = i(t)$.

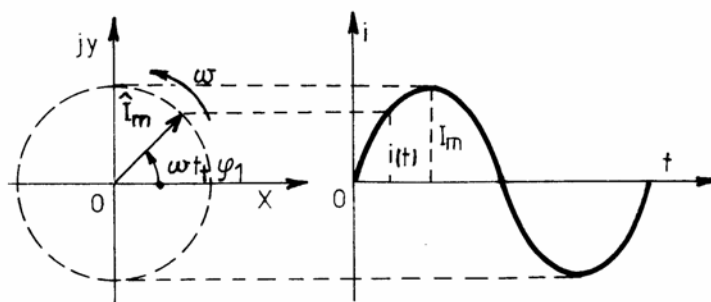


Skládá-li se obvod z více smyček, lze sestavit podle druhého Kirchhoffova zákona soustavu diferenciálních rovnic, jejímž řešením jsou hledané proudy. Jsou-li v obvodu zapojeny zdroje střídavého elektromotorického napětí s kruhovou frekvencí ω , jsou hledané proudy v ustáleném stavu soustavy harmonickými funkcemi času s kruhovou frekvencí ω typu $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Řešení uvedených diferenciálních rovnic lze zjednodušit při použití symbolicko-komplexní metody. Její princip vychází z vlastností lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

6.4.1 Fázor harmonického proudu a napětí

K určení okamžité hodnoty harmonického proudu $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ grafickou metodou můžeme využít metodu rotujícího vektoru, nazývaného v elektrotechnice fázorem (obr. 6.13).



Obr. 6.13: Fázor proudu

Aby se mohla jednoduše určit poloha fázoru v rovině a provádět operace s fázory (sečítání, odečítání, otáčení), zakreslují se fázory do roviny komplexních čísel. Jejich počátek je vázán na počátek souřadnic a koncový bod je určen příslušným komplexním číslem. Velikost fázoru je v daném měřítku dána velikostí amplitudy proudu I_m a jeho úhel s osou x je $\omega t + \varphi_1$. Fázor proudu označujeme komplexní veličinou \mathbf{I}_m . Komplexní veličiny budeme v textu značit tučným tiskem, na obrázcích budeme psát nad komplexní veličinou stříšku (^).

Rotuje-li fázor proudu úhlovou rychlostí ω , určuje jeho průmět do vodorovné osy okamžitou hodnotu proudu $i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1)$.

Podobně můžeme sestavit fázor napětí \mathbf{U}_m , který přísluší harmonickému napětí $u = U_m \sin(\omega t + \varphi_2)$ (obr. 6.14).

Při řešení elektrických obvodů hledáme amplitudy a počáteční fáze harmonických veličin, proto obvykle zakreslujeme fázory v čase $t = 0$ (obr. 6.14). Určení polohy fázorů komplexními čísly nám umožňuje vyjádřit fázor napětí, které ve fázi předbíhá proud o úhel $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, jako

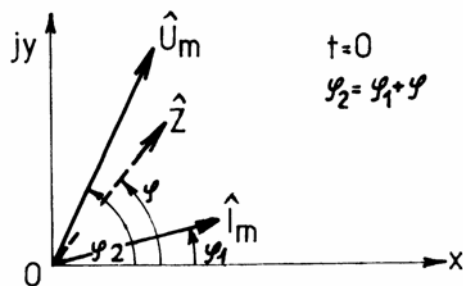
$$\mathbf{U}_m = \mathbf{Z} \mathbf{I}_m, \quad (6.40)$$

kde \mathbf{Z} je **komplexní impedance**

$$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}_m}{\mathbf{I}_m} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}. \quad (6.41)$$

Využívá se zde vlastnosti součinu dvou komplexních veličin. Jeho absolutní hodnota je rovna součinu absolutních hodnot obou komplexních veličin a jeho argument se rovná součtu argumentů obou komplexních veličin.

Vztah (6.40) je komplexním tvarem **Ohmova zákona** pro komplexní proudy, napětí a impedance.

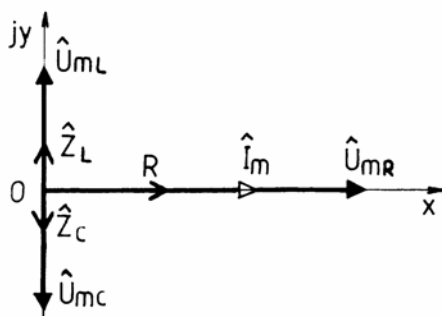


Obr. 6.14: Fázor proudu a napětí

6.4.2 Určení impedance odporu, cívky a kondenzátoru

Prochází-li střídavý proud o amplitudě I_m odporem o velikosti R , je napětí na odporu ve fázi s proudem a podle (6.11) platí (obr. 6.15)

$$U_{mR} = RI_m. \quad (6.42)$$



Obr. 6.15: Komplexní impedance

Komplexní impedance odporu je tedy rovna R ,

$$Z_R = R. \quad (6.43)$$

Prochází-li proud cívku o indukčnosti L , předbíhá napětí na cívce proud o fázový úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Otočení fázoru o úhel $\frac{\pi}{2}$ dosáhneme jeho násobením komplexním číslem $j = \sqrt{-1}$. Podle (6.14) potom platí

$$U_{mL} = j\omega LI_m. \quad (6.44)$$

Komplexní impedance cívky je tedy (obr. 6.15)

$$Z_L = j\omega L. \quad (6.45)$$

Prochází-li proud kondenzátorem o kapacitě C , zpožďuje se napětí na kondenzátoru proti proudu o fázový úhel $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Otočení fázoru o úhel $-\frac{\pi}{2}$ dosáhneme jeho dělením komplexním číslem j . Platí tedy podle (6.20)

$$U_{mc} = \frac{1}{j\omega C} I_m. \quad (6.46)$$

Komplexní impedance kondenzátoru je tedy (obr. 6.15)

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C}. \quad (6.47)$$

Obyčejně se počítá s efektivními hodnotami harmonických veličin. Potom jsou velikosti fázorů dány efektivními hodnotami U a I , kde $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ a fázory se označují \mathbf{U} , \mathbf{I} . Nazývají se komplexní napětí a proud. Do elektrického schématu se potom obyčejně vyznačují místo skutečných proudů, napětí a impedancí komplexní proudy \mathbf{I} , komplexní napětí \mathbf{U} a komplexní impedance \mathbf{Z} .

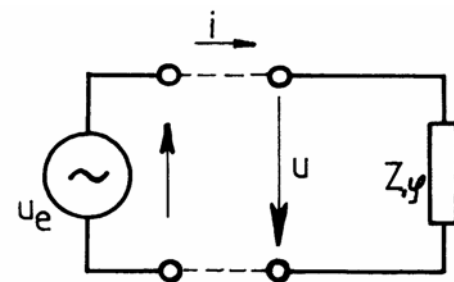
Jsou-li v obecném obvodu řazeny odpory, cívky nebo kondenzátory sériově, je výsledná komplexní impedance obvodu rovna součtu komplexních impedancí dílčích prvků. V případě paralelně řazených prvků je převrácená hodnota komplexní impedance (**admittance**) dána součtem admittancí jednotlivých prvků.

6.5 Výkon střídavého proudu

Střídavý proud mění v elektrickém obvodu v pravidelných časových intervalech svůj směr i velikost. Proto se v čase mění i výkon dodávaný zdrojem do elektrického obvodu. Jeho okamžitá hodnota se nazývá **okamžitý výkon** p a je definována vztahem

$$p = ui, \quad (6.48)$$

kde $u = u(t)$ je okamžitá hodnota elektrického napětí na svorkách obvodu a $i = i(t)$ je okamžitá hodnota proudu procházejícího obvodem (obr. 6.16).



Obr. 6.16: Výkon dodávaný do obvodu

Mají-li proud i a napětí stejné znaménko, je okamžitý výkon kladný. Do obvodu je zdrojem dodávána elektrická energie.

Mají-li proud a napětí opačná znaménka, je okamžitý výkon záporný a elektrická energie se vrací z obvodu do zdroje. V tomto případě se zmenšuje energie magnetického pole nebo energie elektrického pole prvků daného obvodu.

Je-li fázový posuv mezi napětím na svorkách obvodu a proudem v obvodu φ , můžeme napsat $i = I_m \sin \omega t$, $u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$. Potom je okamžitý výkon

$$\begin{aligned} p &= ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{1}{2} U_m I_m [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi)] = UI \cos \varphi - UI \cos(2\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (6.49)$$

kde U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu. Okamžitý výkon má konstantní složku $UI \cos \varphi$, kolem které kmitá střídavá složka s amplitudou UI a dvojnásobným kmitočtem.

Práce konaná střídavým proudem za periodu T je

$$W = \int_0^T p \, dt = \int_0^T ui \, dt = UIT \cos \varphi. \quad (6.50)$$

Tato práce je v odporových prvcích přeměněna v tepelnou energii nebo v obecném spotřebiči v jiný druh energie (mechanickou, světelnou, elektromagnetickou v prostoru kolem vysílací antény aj.).

Středním výkonem dodávaným do obvodu, který lze nahradit pasivním dvojpólem, rozumíme výkon

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = UI \cos \varphi, \quad (6.51)$$

kde W je práce elektrického proudu daná vztahem (6.50), T je perioda, U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, $\cos \varphi$ se nazývá **účinník**.

Střední výkon P podle (6.51) se nazývá též **činným výkonem**. Veličina $P_s = UI$ se nazývá **zdánlivým výkonem**, $[P_s] = \text{V.A.}$ Zdánlivý výkon je důležitou veličinou při dimenzování strojů a rozvodných sítí pro střídavý proud. Veličinu $P_q = UI \sin \varphi$ nazýváme **jalovým výkonem**, $[P_q] = \text{V.Ar.}$

Příklad 6.3

Na síť 220 V jsou připojeny paralelně tři spotřebiče, které mají tyto činné příkony a účinníky: $P_1 = 2200 \text{ W}$, $\cos \varphi_1 = 0,85$; $P_2 = 1200 \text{ W}$, $\cos \varphi_2 = 0,70$; $P_3 = 350 \text{ W}$, $\cos \varphi_3 = 0,65$. Všechny tři spotřebiče mají charakter indukční zátěže. Vypočtete celkový činný, jalový a zdánlivý výkon, celkový účinník a celkový proud odebíraný ze sítě.



Řešení:

Pro činný výkon platí $P = UI \cos \varphi$, pro zdánlivý výkon platí $P_s = UI$ a pro jalový výkon $P_q = UI \sin \varphi$.



Dále platí $P_s = \frac{P}{\cos \varphi}$, $P_q = \frac{P}{\cos \varphi} \sin \varphi = P \operatorname{tg} \varphi$, $P_s^2 = P^2 + P_q^2$.

Celkový činný příkon je $P = P_1 + P_2 + P_3 = 2200 \text{ W} + 1200 \text{ W} + 350 \text{ W} = 3750 \text{ W}$.

Pro fázové posuvy platí:

$$\varphi_1 = \arccos 0,85 = 0,555 \text{ rad}; \sin \varphi_1 = 0,527,$$

$$\varphi_2 = \arccos 0,70 = 0,795 \text{ rad}; \sin \varphi_2 = 0,714,$$

$$\varphi_3 = \arccos 0,65 = 0,863 \text{ rad}; \sin \varphi_3 = 0,760.$$

Pro jalové výkony platí:

$$P_{q1} = P_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = 1363 \text{ V}\cdot\text{Ar},$$

$$P_{q2} = P_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 1223 \text{ V}\cdot\text{Ar},$$

$$P_{q3} = P_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = 409 \text{ V}\cdot\text{Ar}.$$

Celkový jalový výkon je $P_q = P_{q1} + P_{q2} + P_{q3} = 2995 \text{ V}\cdot\text{Ar}$.

Celkový zdánlivý výkon

$$P_s = \sqrt{P^2 + P_q^2} = \sqrt{(3750 \text{ W})^2 + (2995 \text{ V}\cdot\text{Ar})^2} = 4799 \text{ V}\cdot\text{A}$$

Efektivní hodnota proudu tekoucího do všech spotřebičů je

$$I = \frac{P_s}{U} = \frac{4799 \text{ V}\cdot\text{A}}{220 \text{ V}} = 21,81 \text{ A}.$$

Účinnost celého zařízení

$$\cos \varphi = \frac{P}{P_s} = \frac{3750 \text{ W}}{4799 \text{ V}\cdot\text{A}} = 0,781.$$

Úkol 6.2



Ke zdroji střídavého napětí 380 V, 50 Hz jsou připojeny do série odpor 50 Ω, cívka o indukčnosti 0,287 H a kondenzátor o kapacitě 53 μF. Určete:

- Induktivní a kapacitní reaktanci.*
- Impedanci obvodu a proud v obvodu.*
- Fázový posuv mezi napětím a proudem a účinnost.*
- Napětí na odporu, cívce a kondenzátoru.*
- Výkon střídavého proudu dodávaný do obvodu.*

[a) 90,2 Ω; 60 Ω b) 58,4 Ω; 6,51 A c) 31,1°; 0,856; d) 325,5 V; 586,9 V; 390,6 V, e) 2117,5 W; 2473,8 V\cdot A]

Úkol 6.3



Střídavý proud a napětí spotřebiče mají okamžité hodnoty $i = 6 \text{ A} \sin(314 \text{ s}^{-1} t + \pi/6)$ a $u = 170 \text{ V} \sin 314 \text{ s}^{-1} t$. Udejte průběh okamžitých hodnot výkonu, střední a maximální hodnotu okamžitého výkonu a časy, kdy toto maximum nastává.

[442 W - 510 W $\cos(628 \text{ s}^{-1} t + \pi/6)$; 442 W; 952 W; $t_m = ((12k-7)/1200) \text{ s}$, $k = 1, 2, \dots$]

Úkol 6.4

Na síť 220 V, 50 Hz jsou připojeny dva elektromotory. Činný příkon prvního elektromotoru je 2 kW a účinnost je 0,8, činný příkon druhého elektromotoru je 1,2 kW a účinnost je 0,78.



- Určete jalový a zdánlivý výkon každého elektromotoru.
- Určete celkový výkon činný, jalový a zdánlivý.
- Určete celkový proud odebíraný ze sítě.
- Určete výsledný účinnost při zapojení obou elektromotorů na síť.

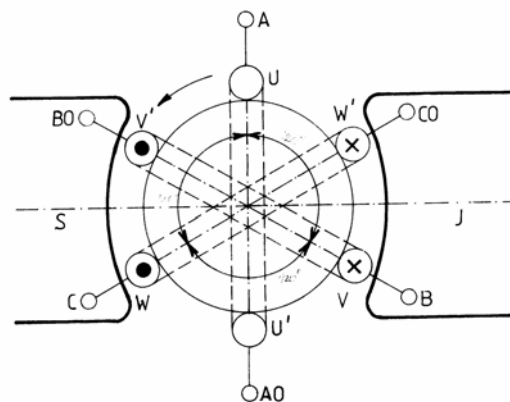
[a) 1500 V.Ar; 962 V.Ar; 2500 V.A; 1538 V.A b) 3,2 kW; 2462 V.Ar; 4038 V.A; c) 18,35 A d) 0,792]

6.6 Trojfázová proudová soustava

Přenos elektrické energie a využití elektrických strojů na střídavý proud jsou hospodárnější, použije-li se sdružené soustavy několika střídavých proudů. Zdroje (fáze) takové proudové soustavy dávají současně několik stejně velkých napětí, která mají stejný kmitočet a liší se jen vzájemným fázovým posuvem. Nejčastěji se používá trojfázová soustava, která je tvořena třemi střídavými zdroji stejné frekvence, jejichž elektromotorická napětí mají stejné amplitudy a vzájemný fázový posuv je $\frac{2}{3}\pi$.

**6.6.1 Vznik trojfázového elektromotorického napětí**

Trojfázové elektromotorické napětí vzniká v trojfázových generátorech. Vznik trojfázového elektromotorického napětí můžeme vysvětlit pomocí obr. 6.17. Rotor generátoru se otáčí v magnetickém poli. Na rotoru jsou cívky tří fází (fáze je jedna větev vícefázové soustavy), které jsou označeny U, V, W . Začátky fází jsou označeny A, B, C , konce AO, BO, CO . Cívky všech tří fází jsou navzájem natočeny o 120° .



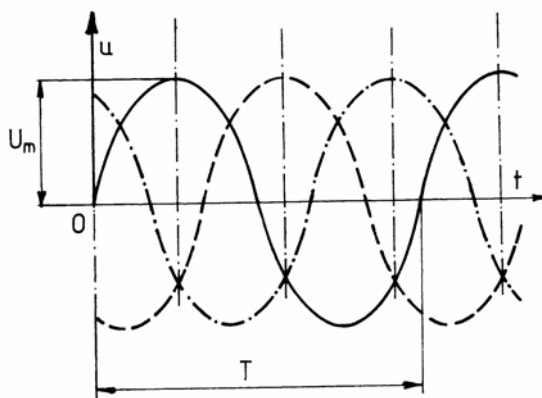
Obr. 6.17: Vznik trojfázového elektromotorického napětí

Otáčí-li se rotor, indukují se v jednotlivých cívkách (fázích) napětí a mezi svorkami jednotlivých fází (mezi jejich začátkem a koncem) jsou tři svorková napětí u_U, u_V, u_W (obr. 6.18), pro která platí

$$u_U = U_m \sin \omega t, \quad (6.52)$$

$$u_V = U_m \sin\left(\omega t - \frac{2}{3}\pi\right), \quad (6.53)$$

$$u_W = U_m \sin\left(\omega t + \frac{2}{3}\pi\right). \quad (6.54)$$



Obr. 6.18: Časový průběh trojfázového napětí

Součet okamžitých hodnot napětí všech tří fází se rovná v libovolném čase nule,

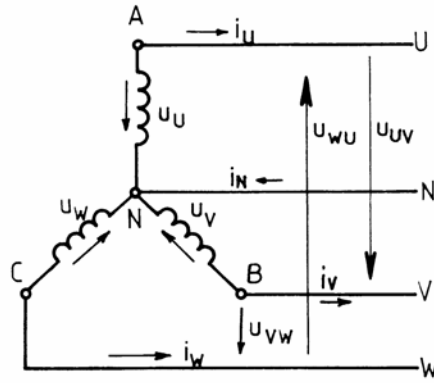
$$u_U + u_V + u_W = 0. \quad (6.55)$$

Skutečný generátor trojfázového proudu má vinutí tří fází uloženo v drážkách statoru. V dutině statoru se otáčí dvupólový nebo vícepólový magnet, buzený stejnosměrným proudem.

Jsou-li oba konce každé fáze generátoru vyvedeny samostatnými vodiči (celkem šest vodičů), dostáváme nesdruženou trojfázovou soustavu. Praktické výhody však mají sdružené trojfázové soustavy, zapojené do hvězdy nebo trojúhelníku. Také fáze trojfázových spotřebičů a transformátorů zapojujeme do hvězdy nebo do trojúhelníku, v podstatě nezávisle na druhu zapojení fází generátoru. Sdružení všech tří fází umožňuje rozvod elektrické energie buď třemi nebo čtyřmi vodiči. Přináší to jednak úsporu materiálu vedení a zmenšení ztrát při přenosu energie, jednak to umožňuje používat trojfázové motory.

6.6.2 Zapojení do hvězdy

Zapojení fází trojfázového generátoru do hvězdy je uvedeno na obr. 6.19. Konce fází $AO, BO,$ a CO jsou spojeny do uzlu N (nulového bodu), který je vyveden středním vodičem N (nulovací vodič).



Obr. 6.19: Zapojení fází generátoru do hvězdy

Začátky fází A , B , C jsou vyvedeny třemi vodiči U , V , W , které se nazývají fázové vodiče. Každá fáze generátoru má své svorkové napětí (fázové napětí) u_U , u_V , u_W podle (6.52) až (6.54), které naměříme mezi jejím začátkem a nulovým bodem. Kromě toho zde existují ještě sdružená napětí u_{UV} , u_{VW} , u_{WU} , která naměříme mezi začátky jednotlivých fází. Platí pro ně (obr. 6.19)

$$\begin{aligned} u_{UV} &= u_U - u_V = U_m \sin \omega t - U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) = \\ &= \sqrt{3} U_m \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right), \end{aligned} \quad (6.56)$$

$$\begin{aligned} u_{VW} &= u_V - u_W = U_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) - U_m \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) = \\ &= \sqrt{3} U_m \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (6.57)$$

$$\begin{aligned} u_{WU} &= u_W - u_U = U_m \sin \left(\omega t + \frac{2}{3} \pi \right) - U_m \sin \omega t = \\ &= \sqrt{3} U_m \sin \left(\omega t + \frac{5}{6} \pi \right). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Sdružená napětí jsou vzájemně posunuta o $\frac{2}{3} \pi$ a jejich amplituda je $\sqrt{3}$ krát větší než amplituda fázového napětí.

Označíme-li efektivní hodnotu fázového napětí

$$U_f = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \quad (6.59)$$

bude efektivní hodnota sdruženého napětí U_s podle (6.56) až (6.58)

$$U_s = \frac{\sqrt{3} U_m}{\sqrt{2}} = \sqrt{3} U_f. \quad (6.60)$$

V naší rozvodné síti nízkého napětí je normalizováno efektivní napětí 380V/220V ($U_s = 380 \text{ V}$, $U_f = 220\text{V}$). Drobné spotřebiče a svítidla se připojují na fázové napětí, trojfázové motory a ostatní trojfázové spotřebiče se připojují na sdružená napětí.

Také fáze trojfázového spotřebiče můžeme zapojit do hvězdy. Na každé fázi je potom fázové napětí U_f . Při souměrném zatížení trojfázové soustavy má proud ve všech fázích stejnou amplitudu a proudy jsou navzájem posunuty o $\frac{2}{3}\pi$.

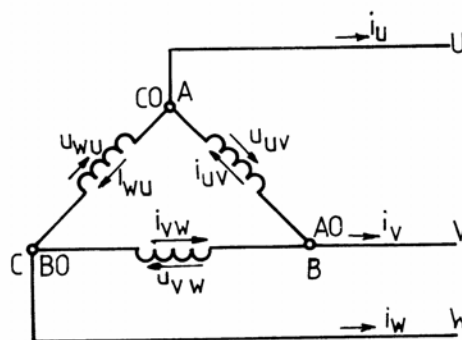
Jejich součet tedy dává nulu a nulovacím vodičem neteče proud, je tedy zbytečný,

$$i_N = i_U + i_V + i_W = 0. \quad (6.61)$$

Při nesouměrném zatížení zdroje několika různými jednofázovými spotřebiči není proud v nulovacím vodiči nulový a nesmí se proto tento vodič v sítích nízkého napětí přerušit.

6.6.3 Zapojení do trojúhelníku

Zapojení fází trojfázového generátoru do trojúhelníku je uvedeno na obr. 6.20.



Obr. 6.20: Zapojení fází generátoru do trojúhelníku

Konec každé fáze je vždy zapojen se začátkem následující fáze. Zapojení tvoří do sebe uzavřený obvod, rozvodná soustava je trojvodičová. Protože součet napětí všech tří fází je v libovolném okamžiku roven nule, neprochází vinutím generátoru, pokud není zatížen, žádný proud. Mezi vyvedenými fázovými vodiči je napětí příslušné fáze generátoru, sdružené napětí se rovná fázovému napětí, $U_s = U_f$. Fázemi generátoru prochází při zatížení fázový proud, proud procházející přívodními vodiči je sdružený proud. Pro sdružené proudy i_U , i_V , i_W platí

$$i_U = i_{UV} - i_{WU}, \quad (6.62)$$

$$i_V = i_{VW} - i_{UV}, \quad (6.63)$$

$$i_W = i_{WU} - i_{VW}. \quad (6.64)$$

Při souměrném zatížení fází budou mít fázové proudy i_{UV} , i_{WU} , i_{VW} stejné amplitudy I_m , budou navzájem fázově posunuty o $\frac{2}{3}\pi$ a jejich rozdíly budou tedy mít, podobně jako (6.56) až (6.58), amplitudy $\sqrt{3}I_m$. Označíme-li efektivní hodnoty fázového proudu I_f , bude efektivní hodnota sdruženého proudu

$$I_s = \sqrt{3} I_f. \quad (6.65)$$

Při zapojení fází spotřebiče do trojúhelníku jsou obdobné poměry. Jsou-li fáze stejné, vznikne souměrné zatížení.

6.6.4 Výkon trojfázové soustavy

Výkon trojfázové soustavy je dán součtem výkonů jednotlivých fází, pro činný výkon platí

$$P = U_f I_{f1} \cos \varphi_1 + U_f I_{f2} \cos \varphi_2 + U_f I_{f3} \cos \varphi_3, \quad (6.66)$$

kde I_{f1} , I_{f2} a I_{f3} jsou efektivní hodnoty fázových proudů procházejících jednotlivými fázemi, φ_1 , φ_2 a φ_3 jsou fázové posuvy mezi fázovým napětím a příslušným fázovým proudem.

Při souměrném zatížení trojfázové soustavy je celkový činný výkon

$$P = 3U_f I_f \cos \varphi. \quad (6.67)$$

Často se však výkon této soustavy vyjadřuje pomocí sdružených hodnot U_s , I_s .

Při zapojení do hvězdy je $U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}}$, $I_f = I_s$, a proto dosazením do (6.67) dostáváme

$$P = \sqrt{3} U_s I_s \cos \varphi. \quad (6.68)$$

Při zapojení do trojúhelníku je $U_f = U_s$, $I_f = \frac{I_s}{\sqrt{3}}$, a proto

$$P = \sqrt{3} U_s I_s \cos \varphi. \quad (6.69)$$

U trojfázového generátoru je těmito vztahy dán jeho činný výkon, u trojfázového spotřebiče jeho činný výkon.

Příklad 6.4

Trojfázová elektrická pec má tři topná tělesa, každé s odporem $R = 12,5 \Omega$. Vypočítejte proudy a příkony jednotlivých těles i celé pece při souměrné soustavě napětí se sdruženým napětím $U_s = 380 \text{ V}$ pro tyto případy: a) topná tělesa jsou zapojena do hvězdy, b) topná tělesa jsou zapojena do trojúhelníku.



Řešení:

a) Při zapojení topných těles do hvězdy jsou na tělesech podle (6.60) fázová napětí



$$U_f = \frac{U_s}{\sqrt{3}} = \frac{380 \text{ V}}{\sqrt{3}} \cong 220 \text{ V}.$$

Protože jak soustava napětí, tak i zátěž jsou souměrné, prochází topnými tělesy stejný proud o efektivní hodnotě

$$I_f = \frac{U_f}{R} = \frac{220 \text{ V}}{12,5 \Omega} = 17,6 \text{ A}.$$

Proudy v jednotlivých tělesech jsou navzájem posunuté ve fázi o 120° a jejich součet je nulový. Nulovacím vodičem při souměrné zátěži neprochází tedy proud. Protože jde o odporovou zátěž, je činný výkon jednoho tělesa

$$P_1 = RI_f^2 = 3872 \text{ W},$$

celkový výkon pece je $P = 3P_1 = 11,6 \text{ kW}$.

b) Při zapojení topných těles do trojúhelníku je na každém topném tělese efektivní hodnota napětí $U_s = 380 \text{ V}$. Každým tělesem prochází proud

$$I_f = \frac{U_s}{R} = \frac{380 \text{ V}}{12,5 \Omega} = 30,4 \text{ A}.$$

Výkon každého tělesa je $P = RI_f^2 = 11,6 \text{ kW}$.

Celkový výkon pece při zapojení do trojúhelníka je $34,8 \text{ kW}$, což je trojnásobek výkonu při zapojení do hvězdy.

Úkol 6.5



Trojfázový elektromotor, připojený na síť $380\text{V}/220\text{V}$ a zapojený do hvězdy, má mechanický výkon odevzdávaný na hřídeli $P_m = 1,5 \text{ kW}$ při účinnosti $\eta = 0,8$. Určete efektivní hodnotu proudu odebíraného ze sítě a fázový posuv mezi proudem a napětím, má-li motor účinnost $0,75$.

[3,79 A; $41,4^\circ$]

Kontrolní otázky 6.1



1. Jak vzniká střídavé harmonické elektromotorické napětí? Jakou funkci je zadán harmonický střídavý proud a napětí? Nakreslete grafy.
2. Které jsou prvky střídavých elektrických obvodů?
3. Co rozumíme rezonancí proudu v sériovém RLC obvodu? Jaký vztah platí pro rezonanční frekvenci?
4. Definujte činný, zdánlivý a jalový výkon dodávaný do spotřebiče.
5. Jak vznikají trojfázové proudy?
6. Jak určíme výkon trojfázového proudu?
7. Jak se znázorňuje časový průběh harmonických veličin? Jaký má praktický význam použití fázorů?

8. *Zakreslete v rovině komplexních čísel fázory proudu a napětí pro odpor.*
9. *Zakreslete v rovině komplexních čísel fázory proudu a napětí pro ideální cívku.*
10. *Zakreslete v rovině komplexních čísel fázory napětí a proudu pro kondenzátor.*

6.7 Autotest

1. Jak je definována střední a efektivní hodnota harmonického proudu a napětí?
2. Čím se liší skutečná cívka od ideální cívky?
3. Definujte reálnou a komplexní impedanci obvodu se střídavými proudy.
4. Které veličiny musíme znát pro určení výkonu střídavého proudu ve spotřebiči?
5. Proč se musí elektrické instalace a elektrické stroje dimenzovat podle zdánlivého výkonu?
6. Jak spojujeme trojfázové zdroje a spotřebiče a kdy se která zapojení používají? Proč se užívá trojfázová soustava v praxi?



6.8 Klíč k autotestu 6.7

1. Střední hodnota harmonického proudu je dána hodnotou stejnosměrného ustáleného proudu, kterým se přenese za polovinu periody stejný náboj jako harmonickým proudem. Efektivní hodnota je dána hodnotou stejnosměrného ustáleného proudu, kterým se dodá do libovolného odporu za periodu stejná energie jako harmonickým proudem. Podobné vztahy se užívají pro určení efektivní hodnoty napětí.
2. Skutečná cívka má kromě indukčnosti také elektrický odpor.
3. $Z = \frac{U}{I}$, $\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{U}}{\mathbf{I}}$, U a I , \mathbf{U} a \mathbf{I} jsou efektivní hodnoty napětí a proudu.
4. Efektivní hodnotu proudu, napětí a kosinus fázového posuvu φ mezi proudem a napětím.
5. Musí se uvažovat i případ, že $\cos \varphi = 1$.
6. Trojfázové zdroje a spotřebiče se zapojují do hvězdy nebo trojúhelníku. Sdružení tří fází umožňuje přenos energie třemi, resp. čtyřmi vodiči.



6.9 Korespondenční úkoly

1. Jaký je matematický vztah mezi napětím a proudem u odporu?
2. Jaký je matematický vztah mezi střídavým napětím a proudem u ideální cívky? Jaký je fázový posuv mezi proudem a napětím?



3. Jaké je matematické vyjádření vztahu mezi střídavým napětím a proudem v kondenzátoru?
4. Napište vztah pro impedanci sériového RLC obvodu.
5. Jakými veličinami je ovlivňován účinník?
6. Nakreslete časový průběh všech tří napětí trojfázové soustavy a dokažte početně a graficky, že je jejich součet roven nule.
7. Ke zdroji střídavého napětí 380 V, 50 Hz jsou připojeny do série odpor 50 Ω , cívka o indukčnosti 0,287 H a kondenzátor o kapacitě 53 μF . Určete:
 - a) Induktivní a kapacitní reaktanci.
 - b) Impedanci obvodu a proud v obvodu.
 - c) Fázový posuv mezi napětím a proudem a účinník.
 - d) Napětí na odporu, cívce a kondenzátoru.
 - e) Výkon střídavého proudu dodávaný do obvodu.
8. Na síť 220 V, 50 Hz jsou připojeny dva elektromotory. Činný příkon prvního elektromotoru je 2 kW a účinník je 0,8, činný příkon druhého elektromotoru je 1,2 kW a účinník je 0,78.
 - a) Určete jalový a zdánlivý výkon každého elektromotoru.
 - b) Určete celkový výkon činný, jalový a zdánlivý.
 - c) Určete celkový proud odebíraný ze sítě.
 - d) Určete výsledný účinník při zapojení obou elektromotorů na síť.

6.10 Závěr



Střídavou elektrickou veličinou (např. proudem nebo napětím) rozumíme veličinu, jejíž časová závislost je zadána střídavou funkcí.

Nejdůležitějším typem střídavé funkce je harmonická funkce. **Střídavý harmonický proud** i (zkráceně střídavý proud) definujeme vztahem

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi_1).$$

Střídavé harmonické napětí u (střídavé napětí) je dáno vztahem

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi_2).$$

Střední hodnota I_s střídavého proudu je hodnota stejnosměrného ustáleného proudu, kterým se přenese za polovinu periody stejný elektrický náboj Q jako daným střídavým proudem.

Efektivní hodnota proudu I je definována jako hodnota stejnosměrného ustáleného proudu, který dodá do odporu o hodnotě R za periodu T stejnou energii jako daný střídavý proud.

Pro napětí u_R na odporu platí

$$u_R = u_e, \quad Ri = U_m \sin \omega t,$$

Pro napětí u_L na cívce platí

$$u_L = u_e, \quad L \frac{di}{dt} = U_m \sin \omega t .$$

Veličina $X_L = \omega L$ se nazývá **induktivní reaktance**.

Pro napětí u_C na kondenzátoru platí

$$u_C = u_e, \quad \frac{1}{C} \int i \, dt = U_m \sin \omega t .$$

Veličina $X_C = \frac{1}{\omega C}$ se nazývá **kapacitní reaktance**.

Impedance sériového RLC obvodu je

$$Z = \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}$$

Pro rezonanci sériového RLC obvodu platí

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 .$$

Okamžitý výkon p je definována vztahem

$$p = ui ,$$

Práce konaná střídavým proudem za periodu T je

$$W = \int_0^T p \, dt = \int_0^T ui \, dt = UIT \cos \varphi .$$

Středním výkonem dodávaným do obvodu, který lze nahradit pasivním dvojpólem, rozumíme výkon

$$P = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt = UI \cos \varphi ,$$

kde W je práce elektrického proudu, T je perioda, U a I jsou efektivní hodnoty napětí a proudu, $\cos \varphi$ se nazývá **účinník**.

Přenos elektrické energie a využití elektrických strojů na střídavý proud jsou hospodárnější, použije-li se sdružené soustavy několika střídavých proudů.

Trojfázové elektromotorické napětí vzniká v trojfázových generátorech.

Zapojení fází trojfázového generátoru lze provést do hvězdy nebo do trojúhelníku.

7 Měření neelektrických veličin elektrickými metodami

Rozvoj stavebnictví, stejně jako rozvoj ostatních oborů techniky, klade zvýšené nároky na kvalitu měřicí techniky, která má podávat informaci o stavu fyzikálních veličin popisujících zkoumané objekty nebo procesy.



Rychlý rozvoj techniky klade zvýšené požadavky na automatizaci měření fyzikálních veličin. K automatizaci jsou vhodná zejména měření elektrických veličin, která mají následující výhody: lze dosáhnout velké přesnosti, citlivosti, rychlosti měření, je možnost dálkového přenosu veličin, možnost tvarování, dalšího zpracování a analýzy měřených elektrických signálů, je možnost záznamu, možnost využití počítače pro řízení měření a zpracování dat, možnost paralelního nebo sériového měření na větším počtu míst a podobně.

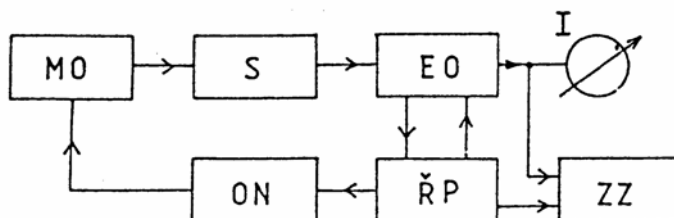
Z těchto důvodů se snažíme převádět neelektrické fyzikální veličiny na veličiny elektrické pomocí vhodných snímačů. Proto si všimneme základních fyzikálních principů používaných k převodu neelektrických veličin na veličiny elektrické a požadavků na snímač jako důležitý člen automatického měřicího systému.

Dále budou popsány základní metody měření vybraných neelektrických veličin elektrickými metodami.

7.1 Měřicí soustava

Měření neelektrických veličin elektrickými metodami lze obecně realizovat pomocí měřicí soustavy.

Měřicí soustava může být jednobanální, vícebanální a vícebanální s přepínačem. Soustava se skládá z měřicího kanálu, záznamového kanálu a v případě automatizovaného měření z části, která obsahuje procesor nebo elektronický počítač pro řízení procesu měření a zpracování naměřených dat. Tento počítač musí být uzpůsoben pro spřažený režim a musí být propojen s dalšími částmi měřicí soustavy (obr. 7.1).



Obr. 7.1: Blokové schéma automatizované měřicí soustavy

V obr. 7.1 značí: MO - měřený objekt, S - snímač, EO - elektronické obvody, ŘP - řídicí počítač, ON - obvody pro nastavení podmínek měření, I - indikátor, ZZ - záznamové zařízení

Měřicí kanál je tvořen snímačem, elektronickými obvody pro zpracování elektrického signálu na výstupu snímače a indikátorem. **Záznamový kanál** je tvořen zapisovačem, tiskárnou, číslicovou pamětí nebo jiným zařízením pro uchování informací.

Jednou z nejdůležitějších částí měřicí soustavy je **snímač**, který převádí vstupní neelektrickou veličinu na veličinu elektrickou. Konstrukce snímačů vychází z různých fyzikálních principů. Obvykle lze pro měření téže veličiny využít více typů snímačů. Výběr snímačů provádíme podle následujících požadavků:

- musí existovat jednoznačná závislost výstupní veličiny na veličině vstupní,
- snímač musí mít dostatečnou citlivost a přesnost pro dané měření,
- snímač musí mít vyhovující tvar přenosové charakteristiky, tj. závislosti $Y = f(X)$, kde Y je výstupní veličina snímače, X je veličina vstupní,
- snímač musí co nejméně zatěžovat měřený objekt,
- okolní parazitní vlivy musí co nejméně ovlivňovat funkci snímače (např. kolísání okolní teploty, vlhkost a vnější rušivé elektromagnetické pole),
- snímač má mít jednoduchou konstrukci, jednoduchou údržbu a maximální spolehlivost.

7.2 Rozdělení snímačů neelektrických veličin

S ohledem na fyzikální princip využívaný pro převod neelektrické veličiny na elektrickou, můžeme snímače rozdělit na odporové, kapacitní, indukčnostní, magnetické, indukční, piezoelektrické, termoelektrické, fotoelektrické, pyroelektrické, ionizační, Hallovy, polarografické, elektrokinetické, potenciometrické a ostatní.

Z hlediska vnějšího elektrického chování můžeme snímače rozdělit na:

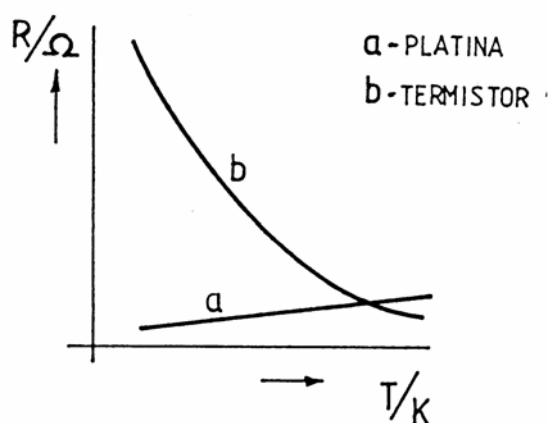
- Aktivní** - jsou zdrojem elektrické energie vznikající působením neelektrické veličiny na snímač (např. termoelektrický článek).
- Pasivní** - působením neelektrické veličiny se mění některý parametr snímače (např. elektrický odpor, indukčnost nebo kapacita).

Podle složitosti převodu neelektrické veličiny na elektrickou je můžeme rozdělit na snímače s jednoduchým převodem (převod teploty na elektrický odpor u odporového teploměru) a s několikanásobným převodem (např. dopadající energie záření způsobuje změnu teploty kovového vodiče a tato vyvolá změnu odporu). Také získaná elektrická veličina se může před vyhodnocením měnit na další elektrickou veličinu nebo parametr pomocného elektrického signálu (např. změna měřené neelektrické veličiny vyvolá změnu kapacity kondenzátoru, která ovlivňuje rezonanční frekvenci laděného obvodu oscilátoru; mírou změny vstupní neelektrické veličiny je potom změna frekvence oscilátoru). Tuto funkci plní převodníky (analogové a analogově-číslicové).

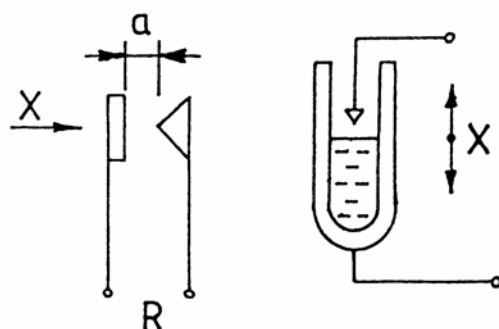
7.3 Odporové snímače

Odporový snímač je rezistor, jehož elektrický odpor R je závislý na měřené veličině X . Jeho přenosová charakteristika má obecně tvar $R = f(X)$. Jako příklad může sloužit závislost odporu na teplotě pro platinu (a) a termistor (b), (obr. 7.2).

Odporové snímače patří mezi pasivní snímače. Vstupní veličinou X může být síla, mechanické napětí, deformace, teplota, zářivý tok, vlhkost, mechanický posuv a další veličiny. Z tohoto hlediska provádíme dělení odporových snímačů do následujících skupin.



Obr. 7.2: Závislost odporu na teplotě



Obr. 7.3: Odporový snímač kontaktní

7.3.1 Odporové snímače kontaktní

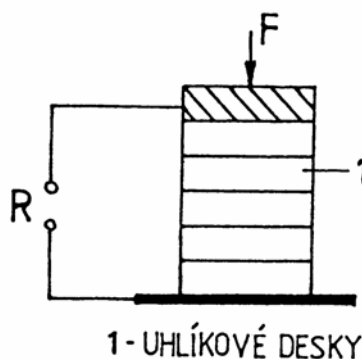
Neelektrická vstupní veličina způsobí skokovou změnu odporu přepínáním kontaktu (obr. 7.3). Kontakty mohou být pevné nebo kapalinové a mohou být

ovládány přímo nebo nepřímo (změnou teploty, změnou magnetického pole a podobně).

Kontaktní snímače se používají zejména pro indikaci geometrických rozměrů, zrychlení, vibrací, tlaku, otáček, hladiny kapaliny a teploty.

7.3.2 Odporové snímače využívající stykového odporu

Při konstrukci těchto snímačů se využívá závislosti odporu stykového místa dvou vodivých nebo polovodivých materiálů (např. uhlíku) na síle, kterou jsou oba materiály přitlačovány (obr. 7.4).



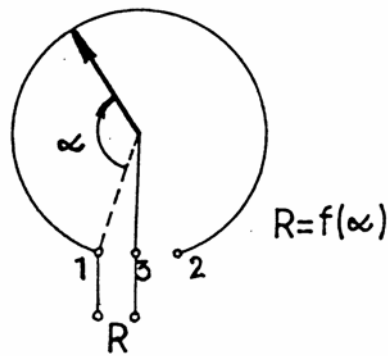
Obr. 7.4: Odporový snímač uhlíkový

U uhlíkových snímačů lze dosáhnout velké citlivosti při jednoduché konstrukci, nedostatkem je však větší závislost odporu na teplotě, menší přesnost a nelinearita charakteristiky. Pro správnou činnost snímače je třeba, aby byly desky stlačeny určitým počátečním tlakem, jinak by byl odpor desek neurčitý. Užívají se zejména jako snímače tlaku, tlakových sil, zrychlení a deformací.

7.3.3 Odporové snímače polohy (měřící potenciometry)

Působením měřené neelektrické veličiny se mění poloha kontaktu, který se posouvá po odporové dráze a tím se mění elektrický odpor mezi začátkem odporové dráhy a kontaktem (obr. 7.5). Připojíme-li snímač kontakty 1 a 2 ke zdroji napětí, převedeme změnu odporu na změnu napětí mezi kontakty 1 a 3.

Volbou odporové dráhy lze dosáhnout různého funkčního průběhu $R = f(\alpha)$, např. lineárního nebo logaritmického. Snímače lze konstruovat jako kruhové, deskové, šroubovicové, rtuťové a další. Používají se pro měření úhlové a lineární polohy a všech veličin, které se dají převést na změnu polohy sběrného kontaktu snímače (výška hladiny, tlak, zrychlení, vibrace).



Obr. 7.5: Odporový snímač polohy

7.3.4 Odporové snímače deformace (tenzometry)

Odporové snímače deformace využívají závislosti odporu vodiče nebo polovodiče na jeho deformaci. Pro odpor válcového vodiče o délce l , průřezu S a měřném odporu ρ platí

$$R = \rho \frac{l}{S} = f(\rho, l, S). \quad (7.1)$$

Pro diferenciál dR platí

$$dR = \frac{\partial f}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial f}{\partial l} dl + \frac{\partial f}{\partial S} dS, \quad (7.2)$$

$$dR = \frac{l}{S} d\rho + \frac{\rho}{S} dl - \frac{\rho l}{S^2} dS. \quad (7.3)$$

Pro malé změny ΔR potom platí

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta \rho}{\rho} + \frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta d}{d}, \quad (7.4)$$

kde d je průměr vodiče.

Mezi relativním prodloužením $\frac{\Delta l}{l}$ a příčným zkrácením $\frac{\Delta d}{d}$ při osovém namáháním vodiče na tah platí

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu_p \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.5)$$

kde μ_p je Poissonovo číslo.

Jestliže platí

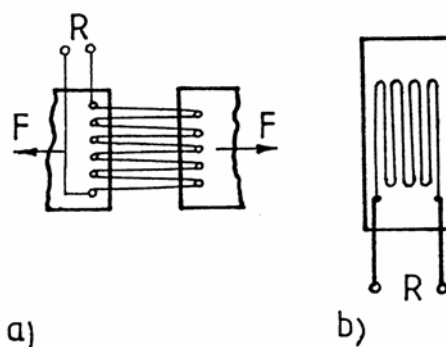
$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \beta_p \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.6)$$

kde β_p je součinitel úměrnosti, je

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta l}{l} (1 + \beta_p + 2\mu_p) = K \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.7)$$

kde K je součinitel deformační citlivosti. Jeho velikost je závislá na materiálu a pro kovové vodiče je řádově rovna 10^0 , pro polovodiče 10^2 (pro konstantan je $K \doteq 2$, pro monokrystalický křemík je $K = 130$).

Odporové články tenzometrů jsou buďto volné, uchycené mezi soustavou držáků (obr. 7.6a) nebo lepené na podložce (obr. 7.6b). Jejich odpor bývá nejčastěji 120Ω , 300Ω nebo 600Ω .

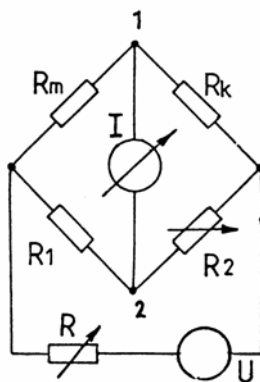


Obr. 7.6: Odporové tenzometry

Snímače s volným odporovým článkem se používají jako příložné odporové tenzometry pro měření deformací, tlaků, tlakových sil, zrychlení a některých dalších veličin. Mají malou hysterezi a je možné je používat při vyšších teplotách (až 300°C). Nevýhodou je náročnost na mechanické provedení a nízký rezonanční kmitočet snímače.

U lepených tenzometrů je odporový článek přilepený na podložce, která se musí přilepit na měřenou část. U těchto tenzometrů tedy vzniká problém s přenosem deformace na celý povrch odporového článku. Je proto třeba dodržet postup lepení a používat lepidla, která doporučuje výrobce tenzometrů (fenolové pryskyřice, dvousložková lepidla, keramické tmely).

Funkci snímače může nepříznivě ovlivňovat řada faktorů, což se projeví zhoršením přesnosti měření. Je to například příčná citlivost, která je způsobena deformací ve směru kolmém na podélnou osu snímače. Přesnost měření je podstatně ovlivněna také teplotou snímače, která ovlivňuje mechanické a elektrické parametry tenzometru jako odpor, součinitel deformační citlivosti K , vlastnosti podložky a lepidla a další. Změna teploty tenzometru může způsobit změnu odporu srovnatelnou se změnou způsobenou měřenou veličinou. Vliv teploty vyloučíme například kompenzací dalším snímačem, který má stejné vlastnosti jako měřicí tenzometr, ale je jen volně umístěn v místech lepeného měřicího tenzometru, a tak je vystaven stejným teplotním změnám. Zapojuje se do sousední větve **Wheatstoneova můstku** (obr. 7.7).



Obr. 7.7: Měřicí můstek (R_m - odpor měřicího tenzometru, R_k - odpor kompenzačního tenzometru)

Pro vyvážený most je napětí mezi body 1 a 2 nulové. V tomto stavu platí

$$\frac{R_m}{R_k} = \frac{R_1}{R_2} \quad (7.8)$$

Jestliže byl most vyvážen při teplotě ϑ_0 tenzometru měřicího i kompenzačního, potom při teplotě ϑ platí $R_m = R_{m0} + \Delta R_m$, $R_k = R_{k0} + \Delta R_k$, kde ΔR_m a ΔR_k jsou změny odporu vlivem změny teploty. Jsou-li oba tenzometry stejné, platí $R_{m0} = R_{k0}$, $\Delta R_m = \Delta R_k$. Potom změna teploty neovlivní rovnováhu mostu.

Jako příklad kovových tenzometrů můžeme uvést konstantanové tenzometry na papírové podložce s hodnotami odporu 120 Ω , 350 Ω a 600 Ω , rozměr mřížky je 4 x 3 mm až 60 x 8 mm, průměr aktivního vodiče je 25 μm .

Polovodičové tenzometry mají některé výhody vzhledem ke kovovým tenzometrům (například velký součinitel deformační citlivosti), mají však také řadu nepříznivých vlastností. Je to například fotocitlivost, nelinearita a větší teplotní závislost tenzometrů.

7.3.5 Odporové snímače teploty

Tyto snímače využívají závislosti elektrického odporu kovů nebo polovodičů na teplotě. Základním požadavkem na odporový materiál je co největší a stálý teplotní součinitel odporu, co největší měrný odpor a dobré mechanické a technologické vlastnosti.

U **kovových odporových teploměrů** se používají pro zhotovení vlastního odporového členu především čisté kovy jako platina, nikl a měď. Odporový materiál má být stálý, nesmí reagovat s okolním prostředím a nesmí se měnit jeho teplotní součinitel odporu s časem.

Jako nejvhodnější se ukazuje platina s teplotní závislostí odporu danou rovnicí (v intervalu teplot 0 ° - 630 °C)

$$R = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2), \quad (7.9)$$

kde ϑ je teplota ve $^{\circ}\text{C}$, $A = 3,9075 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$, $B = -0,575 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-2}$, R_0 je odpor při $\vartheta = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$, např. 100Ω . Pro tento případ dostáváme poměr odporů

$$\frac{R_{100}}{R_0} = 1,385.$$

V rozmezí teplot $0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ až $-190 \text{ }^{\circ}\text{C}$ je závislost odporu na teplotě dána rovnicí

$$R = R_0[1 + A\vartheta + B\vartheta^2 + C(\{\vartheta\} - 100)\vartheta^3], \quad (7.10)$$

kde $C = -4 \cdot 10^{-12} \text{ K}^{-3}$.

Kovové odporové teploměry se vyznačují velmi dobrou dlouhodobou stabilitou. Přesnost měření může být lepší než $0,1\%$.

Polovodičové odporové teploměry můžeme podle použitého odporového materiálu rozdělit na polykrystalické (termistory a pozistory) a monokrystalické (bez přechodů PN a s přechodem PN).

Termistory jsou nelineární polovodičové součástky s velkou závislostí elektrického odporu na teplotě (5 - 50x větší než u kovů) a záporným teplotním součinitelem odporu. Jsou vyráběny spékáním oxidů Fe_2O_3 , TiO_2 , CuO apod. Závislost odporu na teplotě je dána vztahem

$$R = R_0 \exp\left[-B\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T}\right)\right], \quad (7.11)$$

kde R_0 je odpor termistoru při teplotě T_0 , B je materiálová konstanta.

Termistory jsou vyráběny v širokém rozsahu odporových hodnot ($0,1 \Omega$ až $10 \text{ M}\Omega$). Umožňují konstruovat snímače malých rozměrů a velké citlivosti, mají však v porovnání s kovovými teploměry horší časovou stabilitu. Prakticky se používají pro měření teplot do 200°C .

Pozistory jsou polykrystalické polovodičové součástky s kladným teplotním součinitelem odporu.

Jako **monokrystalický materiál** se pro teploměry používá např. germanium (zvláště pro měření nízkých teplot) a křemík. Jejich výhodou je vysoká přesnost měření a malé rozměry. K měření teploty lze také použít teplotní závislosti voltampérové charakteristiky přechodu PN (např. u polovodičových diod na bázi GaAs, Ge nebo Si). Například při konstantním proudu křemíkovou diodou se změní napětí na diodě asi o 2 mV při změně teploty o 1°C .

Při měření odporovými snímači teploty je třeba vyhodnotit změnu odporu snímače vyvolanou změnou jeho teploty. K vyhodnocení se používá často můstkové zapojení se snímačem v jedné větvi.

Odpor vedení, kterým připojíme snímač k můstku, se připočítává k odporu snímače. Změny odporu vedení (např. změnou teploty) mají vliv na přesnost měření. Používá se proto kompenzace vlivu přívodů.

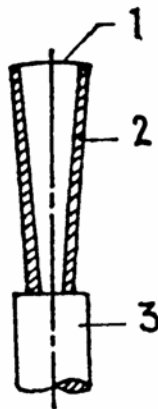
Odporové snímače teploty se kromě měření teploty využívají také pro měření dalších veličin, např. tepelného toku, tepla a k realizaci tepelné analýzy.

7.3.6 Odporové snímače rychlosti prostředí (anemometry)

Základem těchto snímačů je odporový článek z kovu nebo polovodiče, který je umístěn v proudícím médiu. Je-li odporový článek vyhříván elektrickým proudem na teplotu vyšší než je teplota média, dochází k přestupu tepla z odporového článku do okolního prostředí. V rovnovážném stavu platí

$$P = RI^2 = \alpha S(\vartheta_s - \vartheta), \quad (7.12)$$

kde P je dodávaný příkon, R je odpor článku, I je vyhřívací proud, α je měrná tepelná přestupnost, S je plocha povrchu odporového článku, ϑ_s je teplota článku, ϑ je teplota okolí (proudícího média).



Obr. 7.8: Odporový anemometr (1 - odporový článek, 2 - držák, 3 - nosná část)

Pro měření rychlosti média je důležitá veličina α , která je závislá kromě dalších veličin také na rychlosti proudícího média. Mírou rychlosti média může být buďto dodávaný příkon (resp. proud) nutný pro určitý odpor (teplotu) snímače nebo teplota (odpor) snímače při konstantním dodávaném vyhřívacím příkonu nebo proudu.

Konstrukce anemometru vychází z odporového článku (vodič ve tvaru drátku z wolframu, platiny, termistor, germaniový rezistor a pod.) připevněného na vhodném držáku (obr. 7.8). Např. snímač typu 55A22 firmy Disa má odporový článek z wolframového drátku délky 1,2 mm o průměru 5 μm a odporu za studena 3,5 Ω .

7.3.7 Odporové snímače světelného záření

Jako odporové snímače světelného záření se používají polovodičové materiály, u nichž při dopadu elektromagnetického záření dochází ke změně jejich elektrické vodivosti.

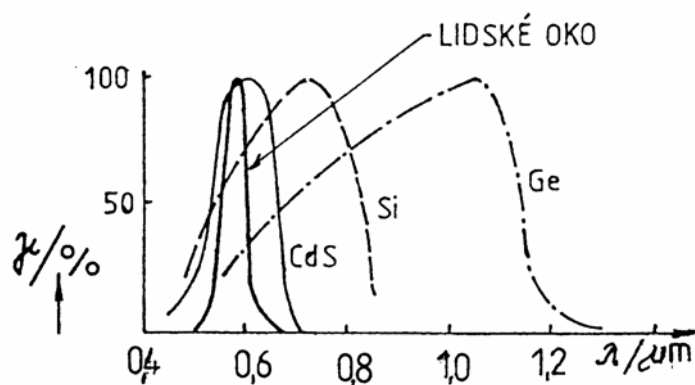
Je-li energie fotonu dopadajícího záření větší než energie potřebná k přechodu elektronů z valenčního pásu do vodivostního pásu u krystalických polovodičů, zvětšuje se počet vodivostních elektronů a mění se odpor polovodiče. Mezi odporové snímače záření patří fotoodpory, fotodiody, fototranzistory a fototyristory.

Fotoodpory využívají polovodivých materiálů jako je antimonid india, sirič kademnatý, sirič olovnatý, selenid kademnatý, legované germanium, křemík a další. Fotoodporové vrstvy jsou naneseny na izolační podložce a opatřeny vývody. Povrch musí být chráněn sklem nebo jiným krytem před nepříznivým vlivem vnějšího prostředí.

Charakteristikou fotoodpory je odpor za tmy a měrná citlivost K_f , která je definována pomocí dopadajícího světelného toku Φ a napětí na fotoodpory U

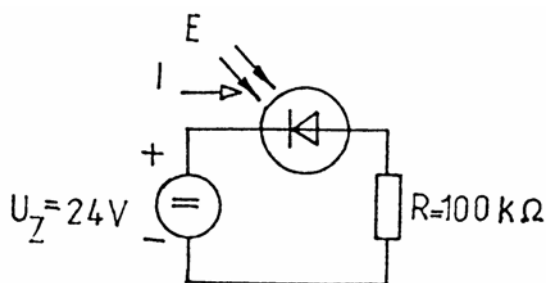
$$K_f = \frac{\Delta I}{\Phi U} = \frac{\Delta I}{ESU}, \quad (7.13)$$

kde ΔI je rozdíl proudu ve tmě a při osvětlení, E je osvětlenost na povrchu fotoodpory o ploše S . Dalšími charakteristikami fotoodporů jsou luxampérová, voltampérová a spektrální charakteristika (obr. 7.9).



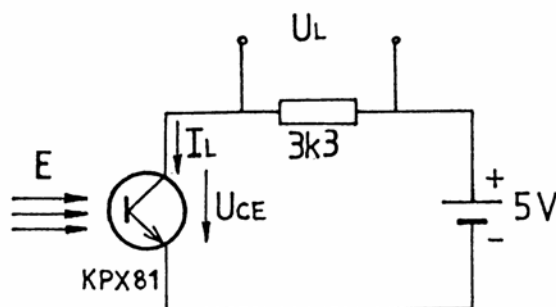
Obr. 7.9: Spektrální charakteristiky fotoodporů

Fotodiody je polovodičová dioda, na jejíž přechod PN může dopadat elektromagnetické záření. Toto záření může způsobit změnu vodivosti diody. Fotodiody se využívá buďto v odporovém režimu (obr. 7.10) nebo v hradlovém režimu. V odporovém režimu plní fotodiody funkci fotoodpory, jehož odpor je závislý na osvětlení. V hradlovém režimu je fotodiody zdrojem elektromotorického napětí U_L .



Obr. 7.10: Fotodiody jako snímač elektromagnetického záření

Fototranzistor je zesilovací polovodičový prvek, který má emitorový přechod přístupný elektromagnetickému záření. Zapojuje se se společným emitorem, kolektor je polarizován v závěrném stavu. Fototranzistor nemá obvykle vyvedenou bázi. V důsledku zesilovacího účinku mají fototranzistory větší dosažitelnou citlivost než fotodiody. Příklad zapojení fototranzistoru je uveden na obr. 7.11.



Obr. 7.11: Zapojení fototranzistoru

Mezi odporové snímače záření patří také **bolometry**. Jejich funkce spočívá v tom, že absorpcí zářivého toku se mění teplota odporového článku a tím i jeho odpor. Snímače pracují obvykle ve spektrální oblasti 0,8 až 50 μm a jsou schopny indikovat zářivý tok až 10^{-10} W. Mají velmi malou časovou konstantu. Odporový článek je buďto z kovu (platina, nikl apod.), délka pásku bývá jednotky milimetru, šířka desetiny milimetru, tloušťka 0,1 - 3 μm , nebo z polovodiče (např. CuO_2).

7.3.8 Odporové snímače magnetických veličin

U těchto snímačů se využívá magnetooporového jevu, který se projevuje změnou elektrického odporu látky (kovu, polovodiče) při vložení do magnetického pole. Dále lze využít magnetodiodového jevu, který spočívá v ovlivňování voltampérové charakteristiky magnetodiody vnějším magnetickým polem. Konečně lze změnu magnetického pole snímat magnetotranzistorem, jehož kolektorový proud závisí na směru a velikosti magnetické indukce B vnějšního magnetického pole.

7.3.9 Odporové snímače vlhkosti

Pro určení vlhkosti pevných a sypkých látek se používá přímé měření elektrické vodivosti daných látek mezi dvěma elektrodami. Pro přímé měření vlhkosti vzduchu nebo plynů se využívá závislosti odporu některých solí nebo kyselin na vlhkosti okolního plynu. Při nepřímém měření vlhkosti se obvykle převádí měření na měření rozdílu teploty apod.

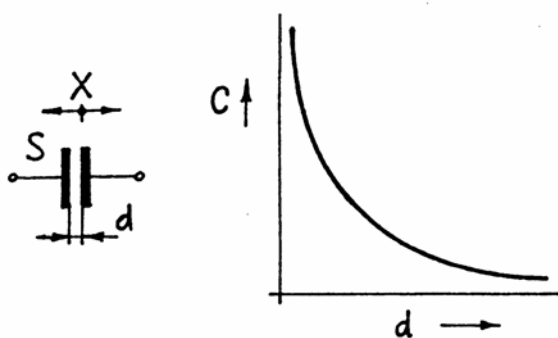
Psychrometrická metoda pracuje na principu měření rozdílu teplot suchého odporového teploměru a vlhkého odporového teploměru, kolem něhož proudí vzduch, jehož vlhkost se má měřit.

Hygrometrická metoda je založena na schopnosti některých látek udržovat svoji vlhkost v rovnováze s vlhkostí okolního vzduchu. Při změně vlhkosti vzduchu se z látek vlhkost buď vylučuje, nebo je jimi pohlcována. Mezi tyto metody patří např. elektrolytický vlhkoměr, který pracuje na principu změny vodivosti elektrolytu spolu s vlhkostí vzduchu.

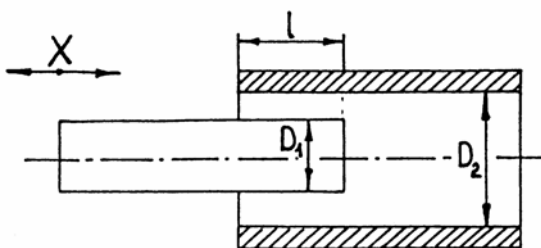
7.4 Kapacitní snímače

Základem kapacitního snímače je kondenzátor (dvou nebo víceelektrodový), jehož parametry jsou ovlivňovány měřenou neelektrickou veličinou. Kapacita kondenzátoru závisí obecně na tvaru elektrod, jejich vzdálenosti, velikosti a na vlastnostech prostředí mezi deskami.

Mezi nejdůležitější typy patří **kondenzátor deskový** (obr. 7.12), tvořený dvěma rovnoběžnými vodivými deskami, vzájemně izolovanými, nebo kondenzátor válcový (obr. 7.13), tvořený dvěma souosými vodivými válci různých průměrů.



Obr. 7.12: Princip mezerového kapacitního snímače



Obr. 7.13: Princip překrývacího kapacitního snímače

Pro kapacitu C jednoduchého deskového kondenzátoru platí

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}, \quad (7.14)$$

kde ε_0 je permitivita vakua, ε_r - relativní permitivita dielektrika mezi deskami, S - plocha elektrod, d - vzdálenost elektrod.

Pro kapacitu válcového kondenzátoru platí

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r 2\pi l}{\ln \frac{R}{r}}, \quad (7.15)$$

kde r je poloměr vnitřní válcové elektrody, R - poloměr vnější válcové elektrody, l - délka elektrod.

Změny kapacity může být dosaženo zejména změnou společné plochy elektrod S , vzdáleností elektrod d , změnou tloušťky dielektrika, změnou plochy dielektrika a změnou relativní permitivity. Uvedeme základní typy kapacitních snímačů.

7.4.1 Mezerový kapacitní snímač

Působením měřené veličiny X se změní vzdálenost desek, obr. 7.12.

Pro rovinné uspořádání platí

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d}. \quad (7.16)$$

Závislost kapacity na vzdálenosti desek je obecně nelineární. Je-li $d = d_0 + X$,

$$C_0 = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{S}{d_0}, \quad \Delta C = C - C_0, \quad \frac{X}{d} \ll 1, \text{ je}$$

$$\Delta C = -\frac{C_0}{d_0} X. \quad (7.17)$$

V tomto případě dostáváme lineární závislost změny kapacity na posunutí desky X .

7.4.2 Překrývací kapacitní snímač

Působením veličiny X se mění společná plocha desek S . Je-li $S = S_0 + aX$, je

$$\Delta C = C_0 \frac{a}{S_0} X. \quad (7.18)$$

Pro praktické využití je vhodnější válcový kondenzátor podle obr. 7.13. Závislost změny kapacity na posunutí X je lineární.

7.4.3 Kapacitní snímač s proměnným dielektrikem

Vlivem neelektrické veličiny se může změnit:

- a) plocha dielektrika mezi deskami kondenzátoru (zasouvání dielektrika mezi desky),
- b) tloušťka dielektrika (deformací vnější silou),
- c) permitivita.

Typ a), c) se používá zejména pro kapacitní hladinoměry, typ b) pro měření tlakové síly.

Změna permitivity nastává u některých látek změnou vlhkosti látky mezi elektrodami (např. u sypkých materiálů, papíru aj.). Využívá se zde skutečnosti, že voda má podstatně větší permitivitu než měřená látka ($\epsilon_r = 81$).

7.4.4 Použití kapacitních snímačů

Předností těchto snímačů je jednoduchost konstrukce a malá hmotnost. Vhodnou konstrukcí snímače je však třeba vyloučit vliv teploty a vlhkosti na jeho přesnost. Rušivá magnetická pole však nemají na jeho funkci vliv. Protože kapacita snímače je řádově ($10^0 - 10^2$) pF, je třeba při připojení snímače kabelem k měřicímu zařízení pro vyhodnocení kapacity uvažovat zejména kapacitu kabelu, která může být větší než kapacita snímače.

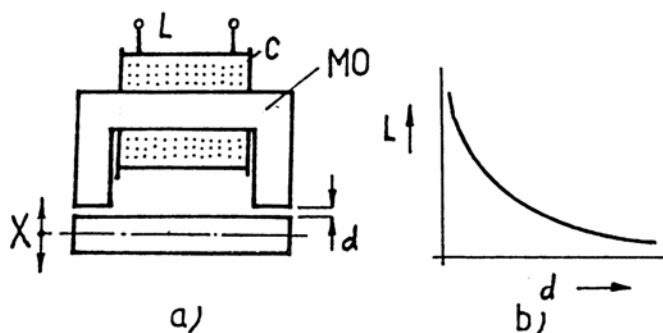
Kapacitní snímače se používají zejména pro měření délky (až 10^{-8} m), vibrací, tlakové síly, tlaku, kroutícího momentu, hladiny a vlhkosti látek.

7.5 Indukčnostní snímače

Indukčnostní snímače jsou založeny na změně indukčnosti cívky nebo vzájemné indukčnosti soustavy cívek vyvolané měřenou neelektrickou veličinou X .

Indukčnost cívky L závisí na počtu závitů cívky, na rozměrech cívky, na elektrických a magnetických vlastnostech magnetického obvodu a na geometrii magnetického obvodu.

Vzájemná indukčnost M dvou cívek závisí navíc na jejich vzájemné vzdálenosti a orientaci. Uvedeme základní typy snímačů.



Obr. 7.14: Princip indukčnostního snímače se vzduchovou mezerou (MO - magnetický obvod)

7.5.1 Indukčnostní snímač s malou vzduchovou mezerou

Tento typ snímače (obr. 7.14a) se vyznačuje velkou nelinearitou základní charakteristiky (obr. 7.14b). Magnetický obvod tvořený feromagnetickým materiálem obsahuje vzduchovou mezeru o délce $2d$.

7.5.2 Indukčnostní snímač s otevřeným magnetickým obvodem

Snímač se skládá z cívky, do které se zasouvá feromagnetické jádro. Posuvem jádra se mění indukčnost L cívky. Snímač je vhodný pro měření větších délkových intervalů (až $\pm 0,3$ m).

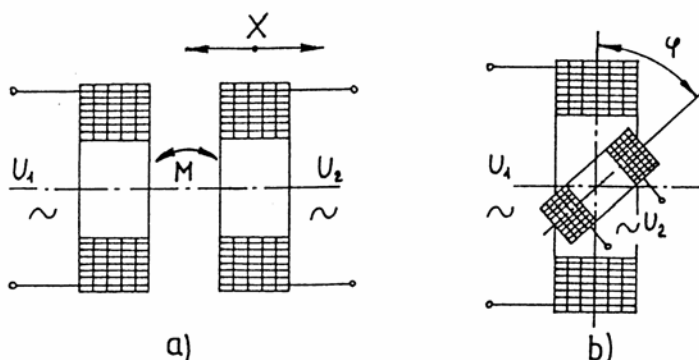
7.5.3 Indukčnostní snímač s potlačeným polem

Mění-li se v důsledku změny měřené veličiny vzdálenost cívky od povrchu elektricky vodivého tělesa, mění se impedance Z cívky zapojené do obvodu střídavého proudu. Změna impedance Z je mírou změny veličiny X .

7.5.4 Indukčnostní snímač transformátorový

Skládá se ze dvou (nebo více) cívek bez jádra, jejichž vzájemná indukčnost M závisí na vzájemné poloze obou cívek (obr. 7.15).

Je-li jedna z cívek napájena střídavým proudem, indukuje se ve druhé cívce střídavé napětí závislé na vzájemné indukčnosti M . Toto napětí závisí na velikosti neelektrické veličiny X (obr. 7.15a) nebo úhlu φ (obr. 7.15b).



Obr. 7.15: Transformátorový indukčnostní snímač

7.5.5 Použití indukčnostních snímačů

Tyto snímače lze použít pro měření většiny neelektrických veličin. Nejrozšířenější jsou snímače pro měření rozměrů, deformací, zrychlení, tlakových a tahových sil, kroutícího momentu, tlaku, průtoku a další.

Např. odchylkové snímače pracují s rozsahem $\pm 0,25$ μm až ± 1 mm. Pro měření polohy bývají snímače s rozsahy až ± 100 mm. Pro měření tlakových a taho-

vých sil se používají snímače s malou vzduchovou mezerou nebo s otevřeným magnetickým obvodem. Rozsah měřené veličiny je řádově 10^2 N až 10^6 N pro různé konstrukce snímačů.

Při připojení snímače k měřicímu přístroji pro vyhodnocení indukčnosti nebo impedance je třeba vyhodnotit vliv indukčnosti, odporu a kapacity spojovacího vedení na přesnost měření. Snímače bývají zapojeny do obvodů s pomocným střídavým napětím, nejčastěji můstkových nebo rezonančních.

7.6 Magnetické snímače

Magnetické snímače využívají změny permeability feromagnetika při změně některých neelektrických veličin jako je deformace feromagnetika nebo teplota. Používají se nejčastěji pro měření mechanického napětí a tlakových a tahových sil.

Závislosti magnetických vlastností feromagnetika na jeho deformaci využívají magnetoelastické snímače. Pro snímače se používá nejčastěji permaloyová slitina, měkká ocel a ocel.

7.7 Indukční snímače

U indukčních snímačů se využívá závislosti indukovaného elektromotorického napětí u_e v cívce na počtu závitů cívky N a na časové změně magnetického indukčního toku Φ , který prochází cívkou. Platí

$$u_e = -N \frac{d\Phi}{dt}. \quad (7.19)$$

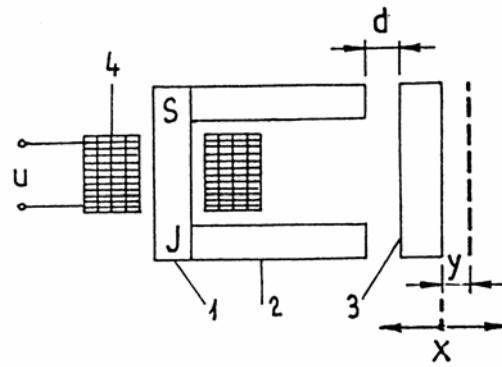
Snímače můžeme rozdělit na snímače elektromagnetické a snímače elektrodynamicke.

7.7.1 Snímače elektromagnetické

U těchto snímačů se mění magnetický indukční tok změnou magnetického odporu magnetického obvodu. Na obr. 7.16 je znázorněn princip konstrukce snímače. Výstupní napětí u je úměrné rychlosti pohybu feromagnetické části 3.

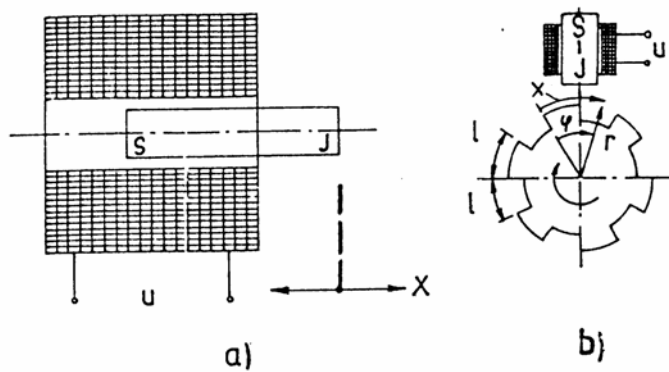
Jiné typy snímačů jsou uvedeny na obr. 7.17.

Princip snímače pro měření úhlové rychlosti je uveden na obr. 7.17b. Indukované elektromotorické napětí u_e je úměrné úhlové rychlosti feromagnetického kotouče.



Obr. 7.16: Princip elektromagnetického snímače (1 - trvalý magnet, 2 - pólové nástavce, 3 - feromagnetická část, 4 - cívka)

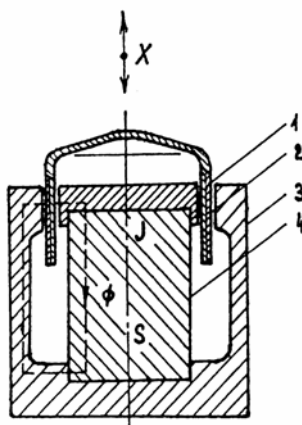
Jiným typem elektromagnetického snímače je **vibrační snímač**. Mechanický vibrační systém (struna, nosník apod.) je elektromagneticky rozkmitán do rezonance. Působením neelektrické veličiny se mění rezonanční kmitočet vibračního systému. Například rezonanční kmitočet struny je úměrný odmocnině působící síly v ose struny. Kmity struny jsou snímány pomocí elektromagnetu a je vyhodnocována změna frekvence. Tento typ snímače je vhodný pro měření tahových a tlakových sil, tlaku, deformací, teploty, kroutícího momentu a podobně.



Obr. 7.17: Typy indukčních snímačů

7.7.2 Elektrodynamické snímače

Pohybuje-li se v magnetickém poli vodič rychlostí v , indukuje se ve vodiči elektromotorické napětí úměrné rychlosti. Jako příklad lze uvést elektrodynamický snímač vibrací (obr. 7.18).



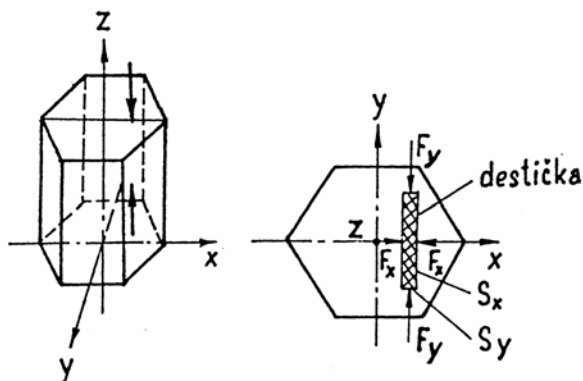
Obr. 7.18: Elektrodynamický snímač vibrací (1 - cívka, 2, 3 - pólové nástavce, 4 - stálý magnet)

Ve válcové vzduchové mezeře v magnetickém obvodu s permanentním magnetem je umístěna kruhová cívka, která kmitá v magnetickém poli, a v důsledku toho se v cívce indukují napětí úměrné rychlosti kmitajícího tělesa, se kterým je cívka pevně spojena. Analýza tohoto napětí nám dává charakteristiky sledovaného kmitavého pohybu. Kmitočtový rozsah elektrodynamických snímačů bývá 10 - 1000 Hz, vlastní rezonanční kmitočet 12 až 18 Hz, měřitelná výchylka 1 μm až 4 mm, přesnost měření $\pm 1\%$.

7.8 Piezoelektrické snímače

Tyto snímače využívají piezoelektrický jev, který spočívá ve vzniku elektrické polarizace krystalického dielektrika vlivem mechanického napětí. Na povrchu dielektrika vznikají vázané náboje, které mohou v přiložených kovových elektrodách vázat nebo uvolňovat elektrické náboje. Jakmile mechanické napětí přestane působit, přechází dielektrikum do původního stavu. Tyto vlastnosti vykazuje např. křemen (SiO_2), titaničitan barnatý (BaTiO_3), titaničitan olovnatý a zirkoničitan olovnatý ($\text{PbTiO}_3 + \text{PbZrO}_3$), metaniobát olova (PbNb_2O_6), vinan draselinosodný (Seignettova sůl), fosforečnan amonný (ADP) a další materiály.

Křemen má velmi dobré piezoelektrické vlastnosti. Křemen krystalizuje v šesteréčné soustavě, přičemž elementárním strukturním prvkem je šestiboký hranol. Podélná osa z se nazývá optická, osa x elektrická, osa y mechanická (obr. 7.19).



Obr. 7.19: Piezoelektrický jev u krystalu křemene

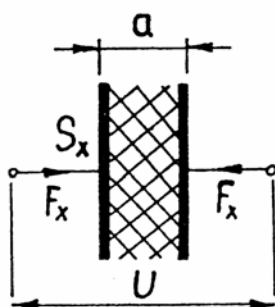
Vyřízneme-li z krystalu křemene destičku tak, aby její hrany byly rovnoběžné s jednotlivými osami, potom vlivem sil působících kolmo na optickou osu dochází k elektrické polarizaci křemene a na plochách kolmých k ose x se objeví vázané náboje. Při působení síly F_x je velikost tohoto náboje $Q = k_p F_x$ a tato nezávisí na velikosti plochy S_x (podélný piezoelektrický jev). Při působení síly F_y vzniká náboj, opět na plochách kolmých k ose x a jeho velikost je

$Q = k_p \frac{S_x}{S_y} F_y$ (příčný piezoelektrický jev). Vložíme-li destičku mezi desky

kondenzátoru o plochách S_x (obr. 7.20), vzniká mezi deskami napětí

$$U = \frac{Q}{C} = \frac{k_p}{C} F_x = k_u F_x, \quad (7.20)$$

kde k_u je napěťová citlivost snímače. Například pro křemen je $k_u = 5 \text{ V}\cdot\text{N}^{-1}$, pro titaničitan barnatý je $k_u = 1 \text{ V}\cdot\text{N}^{-1}$.



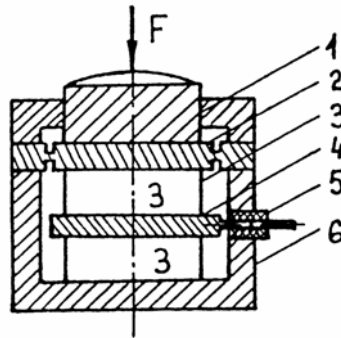
Obr. 7.20: Kondenzátor s piezoelektrickým dielektrikem

Piezoelektrické snímače se používají zejména pro měření tlakové síly, tlaku, zrychlení, výchylky a mechanického napětí. Jsou vhodné především pro dynamická měření, jejich předností jsou malé rozměry, konstrukční jednoduchost a lineární charakteristika. Nevýhodou je u většiny piezoelektrických materiálů nízká hodnota dovolené teploty okolí. Nejvyšší je u křemene (550°C).

7.8.1 Snímače tlakové síly

Snímač obsahuje dvě piezoelektrické destičky 3 orientované tak, aby se náboje sečítaly (obr. 7.21). Výstup snímače je z elektrody 4.

Snímače se vyrábějí pro tlakové i tahové síly až do 10^6 N.

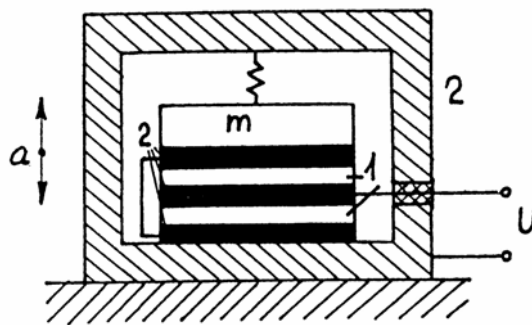


Obr. 7.21: Snímač tlakové síly (1 - přítlačný článek, 2 - membrána, 3 - piezoelektrické destičky, 4 - elektroda, 5 - průchodka, 6 - pouzdro)

7.8.2 Snímače zrychlení

Snímače zrychlení se používají především pro dynamická měření, zejména pro měření mechanického kmitání. Výhodou je malá hmotnost a velký kmitočtový rozsah. Jako piezoelektrický materiál se používá nejčastěji titaničitan barnatý.

Princip snímače zrychlení je uveden na obr. 7.22. Využívá se deformace piezoelektrického materiálu působením setrvačné síly přídavného tělesa o hmotnosti m , které je přitlačováno pružinou na piezoelektrický materiál.



Obr. 7.22: Princip snímače zrychlení (1 - piezoelektrický materiál, 2 - vodivý materiál, m - hmotnost přídavného tělesa)

Snímače se mohou kombinovat pro měření ve třech navzájem kolmých směrech. Napěťová citlivost snímačů bývá řádově jednotky $\text{mV/m}\cdot\text{s}^{-2}$. K měření výstupního napětí piezoelektrického snímače je potřeba použít přístroj, který pracuje v bezproudovém režimu (má dostatečně vysoký vstupní odpor).

Z tohoto důvodu jsou také přísné požadavky nejen na izolaci snímače, ale i konektoru a spojovacího kabelu.

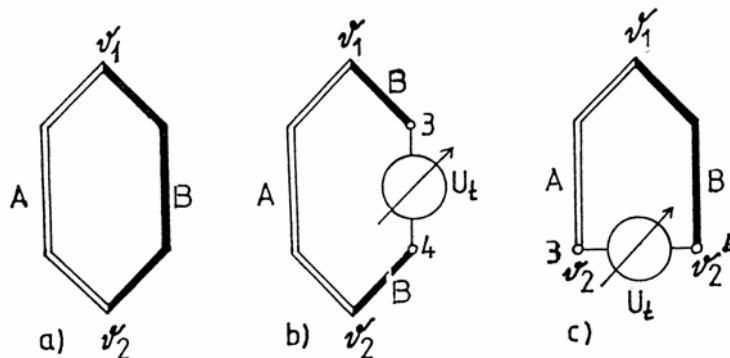
7.9 Termoelektrické snímače

Funkce termoelektrických snímačů je založena na termoelektrickém jevu. Na styku dvou různých kovů vzniká kontaktní elektrické napětí, jehož velikost je závislá na teplotě spoje. V uzavřeném obvodu tvořeném těmito kovy (obr. 7.23a) je součet kontaktních napětí nulový pouze v případě, že teploty obou spojů jsou stejné. Jsou-li teploty spojů různé, vzniká v obvodu termoelektrické napětí a uzavřeným obvodem prochází elektrický proud.

Termoelektrické napětí U_t závisí na rozdílu teplot obou spojů $\Delta \vartheta$ podle vztahu

$$U_t = a + b\Delta\vartheta + c(\Delta\vartheta)^2, \quad (7.21)$$

kde a , b , c jsou konstanty závislé na druhu materiálů snímače. Termoelektrické napětí U_t je tedy mírou měřeného rozdílu teplot.

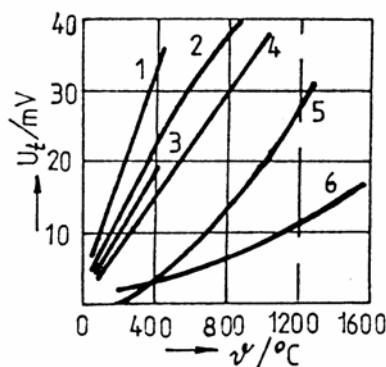


Obr. 7.23: Termoelektrický snímač

Termoelektrické snímače našly široké uplatnění pro svoje výhodné vlastnosti jako je jednoduchost, odolnost proti mechanickému a tepelnému namáhání, možnost použití v širokém rozsahu teplot, malá hmotnost a malá tepelná setrvačnost.

Materiály pro termoelektrický snímač mají mít co nejlepší linearitu termoelektrického napětí v závislosti na rozdílu teplot spojů, výstupní napětí má být co největší, časová stálost snímače má být co nejlepší, materiál má být odolný proti chemickým, mechanickým a korozním vlivům. Materiál se volí z hlediska požadovaného rozsahu teplot, požadované přesnosti měření a časové stálosti snímače. Nejčastěji se používají platina, platinarhodium PtRh, měď, měďnikl CuNi (55% Cu, 45% Ni - kopel; 58% Cu, 42% Ni -konstantan), železo, niklchrom NiCr (89% Ni, 9,8% Cr, 1% Fe, 0,2% Mn - chromel), niklhlínik NiAl (94% Ni, 2% Al, 1% Si, 2,5% Mn - alumel).

Závislost termoelektrického napětí na teplotě je uvedena pro některé termoelektrické snímače na obr. 7.24.



Obr. 7.24: Závislost termoelektrického napětí na teplotě (1 - chromel - kopel, 2 - železo - konstantan, 3 - měď - konstantan, 4 - chromel - alumel, 5 - NiFe-Ni, 6 - PtRh-Pt)

Konstrukce termoelektrických snímačů teploty vychází z materiálu ve tvaru drátu nebo fólie v požadovaném chemickém složení. Měřicí spoj snímače bývá vytvořen nejčastěji spojením dvou drátů svařením nebo pájením. Vzájemný styk musí být dokonalý a musí být odstraněny přechodové odpory. Oba vývodní dráty termoelektrického článku musí být vzájemně elektricky izolovány. Před vnějšími vlivy chrání článek ochranný kryt nebo jímka.

Kromě měření teploty se využívají termočlánky pro měření množství předaného tepla teplonosným médiem, k měření hustoty tepelného toku a jako snímače tepelného záření.

7.10 Autotest



1. Vysvětlete princip činnosti odporových snímačů. Které typy těchto snímačů znáte?
2. Na jakém principu pracují odporové snímače deformace? Vysvětlete způsob kompenzace teplotních změn odporu snímače při použití Wheatstoneova mostu.
3. Porovnejte vlastnosti kovových a polovodičových odporových snímačů.
4. Pojednejte o výhodách a nevýhodách kapacitních snímačů. Které neelektrické veličiny se dají snadno měřit pomocí kapacitních snímačů?
5. Jaký je zásadní rozdíl mezi indukčnostními a indukčními snímači?
6. Pojednejte o způsobu využití piezoelektrického jevu pro měření tlakové síly a mechanického zrychlení.

7.11 Klíč k autotestu 7.10

1. Neelektrická veličina ovlivňuje elektrický odpor snímače. Patří sem zejména odporové snímače polohy, teploty, deformace a světelného záření.
2. Deformace snímače (změna délky a průřezu odporového drátku) ovlivňuje jeho odpor. Kompenzace se provádí zařazením dalšího stejného snímače do druhé větve Wheatstoneova mostu bez jeho připevnění na konstrukci.
3. Kovové odporové snímače mají proti polovodičovým větší stálost parametrů, ale menší citlivost.
4. Výhodou jsou jednoduché konstrukce, malé náklady na konstrukci, nevýhodou je nelineární převod měřené veličiny na změny kapacity. Jsou výhodné např. pro měření vibrací nebo vlhkosti.
5. U indukčnostních snímačů ovlivňuje neelektrická veličina indukčnost cívky. U indukčních snímačů je vlivem neelektrické veličiny indukováno v cívce elektromotorické napětí.
6. Snímač tlakové síly musí umožňovat transformaci působící síly na hodnotu vhodnou pro zatěžování aktivního prvku. Při měření mechanického zrychlení je třeba realizovat zatížení aktivního prvku přídavnou hmotností, která při pohybu vyvozuje působení setrvačné síly, úměrné zrychlení na prvek.



7.12 Korespondenční úkoly

1. Navrhněte uspořádání rtuťového kontaktového snímače pro indikaci dané teploty.
2. Popište způsob měření teploty pomocí platinového odporového teploměru.
3. Vysvětlete princip činnosti polovodičových snímačů světelného záření
4. Uveďte příklady použití indukčnostních snímačů a vysvětlete princip jejich činnosti.
5. Na základě Faradayova zákona elektromagnetické indukce vysvětlete princip činnosti indukčních snímačů.
6. Na jakém principu pracují termoelektrické snímače? Navrhněte způsob zhotovení termoelektrického snímače pro měření teplot v rozsahu -100°C až 100°C .



7.13 Závěr

Měření neelektrických veličin elektrickými metodami lze obecně realizovat pomocí měřicí soustavy.



Měřicí soustava může být jednokanálová, vícekanálová a vícekanálová s přepínačem.

Měřicí kanál je tvořen snímačem, elektronickými obvody pro zpracování elektrického signálu na výstupu snímače a indikátorem. **Záznamový kanál** je tvo-

řen zapisovačem, tiskárnou, číslicovou pamětí nebo jiným zařízením pro uchování informací.

Jednou z nejdůležitějších částí měřicí soustavy je **snímač**, který převádí vstupní neelektrickou veličinu na veličinu elektrickou.

S ohledem na fyzikální princip využívaný pro převod neelektrické veličiny na elektrickou, můžeme snímače rozdělit na odporové, kapacitní, indukčnostní, magnetické, indukční, piezoelektrické, termoelektrické, fotoelektrické, pyroelektrické, ionizační, Hallovy, polarografické, elektrokinetické, potenciometrické a ostatní.

Z hlediska vnějšího elektrického chování můžeme snímače rozdělit na:

1. **Aktivní** - jsou zdrojem elektrické energie vznikající působením neelektrické veličiny na snímač (např. termoelektrický článek).
2. **Pasivní** - působením neelektrické veličiny se mění některý parametr snímače (např. elektrický odpor, indukčnost nebo kapacita).

Odporový snímač je rezistor, jehož elektrický odpor R je závislý na měřené veličině X .

Odporové snímače se dělí na snímače kontaktové, snímače využívající stykového odporu, měřicí potenciometry, snímače deformace, snímače teploty, snímače rychlosti prostředí, snímače světelného záření, snímače magnetických veličin a snímače vlhkosti.

Základem kapacitního snímače je kondenzátor (dvou nebo víceelektrodový), jehož parametry jsou ovlivňovány měřenou neelektrickou veličinou. Kapacita kondenzátoru závisí obecně na tvaru elektrod, jejich vzdálenosti, velikosti a na vlastnostech prostředí mezi deskami.

Indukčnostní snímače jsou založeny na změně indukčnosti cívky nebo vzájemné indukčnosti soustavy cívek vyvolané měřenou neelektrickou veličinou X . Indukčnost cívky L závisí na počtu závitů cívky, na rozměrech cívky, na elektrických a magnetických vlastnostech magnetického obvodu a na geometrii magnetického obvodu.

U indukčních snímačů se využívá závislosti indukovaného elektromotorického napětí u_e v cívce na počtu závitů cívky N a na časové změně magnetického indukčního toku Φ , který prochází cívkou.

Piezoelektrické snímače využívají piezoelektrický jev, který spočívá ve vzniku elektrické polarizace krystalického dielektrika vlivem mechanického napětí. Na povrchu dielektrika vznikají vázané náboje, které mohou v přiložených kovových elektrodách vázat nebo uvolňovat elektrické náboje. Jakmile mechanické napětí přestane působit, přechází dielektrikum do původního stavu.

Funkce termoelektrických snímačů je založena na termoelektrickém jevu. Na styku dvou různých kovů vzniká kontaktní elektrické napětí, jehož velikost je závislá na teplotě spoje.

8 Elektromagnetické vlnění

V prostoru, ve kterém se nacházejí elektrické náboje, existuje elektromagnetické pole. Jeho vlastnosti jsou závislé na rozložení těchto nábojů v prostoru a v čase. Elektromagnetické pole je obecně plně popsáno, je-li v každém bodě prostoru a v každém okamžiku zadán vektor intenzity elektrického pole \vec{E} , elektrické indukce \vec{D} , intenzity magnetického pole \vec{H} a magnetické indukce \vec{B} . Pohybují-li se elektrické náboje vzhledem k pozorovací soustavě, pak je elektromagnetické pole časově proměnné. Vektory pole \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} jsou potom funkcemi souřadnic a času. Jejich změny se šíří prostorem jako elektromagnetické vlny. Pro popis vlastností elektromagnetického pole (resp. elektromagnetického vlnění) slouží Maxwellovy rovnice, které tvoří základ "klasické" teorie elektromagnetického pole.



8.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice vyjadřují vztahy mezi vektory \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} a zdroji elektromagnetického pole.

Úplnou soustavu Maxwellových rovnic tvoří čtyři rovnice hlavní a čtyři rovnice vedlejší.

Hlavní rovnice jsou buď parciální diferenciální rovnice, nebo rovnice v integrálním tvaru, jejichž řešením pro zadané zdroje, počáteční a okrajové podmínky najdeme prostorové závislosti a časové průběhy vektorů \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} příslušného elektromagnetického pole.

8.1.1 První Maxwellova rovnice

První Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru vychází ze zákona celkového proudu (4.13), který je jejím integrálním tvarem,

$$\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I, \quad (8.1)$$

kde \vec{H} je intenzita magnetického pole v bodech na uzavřené křivce l a I je celkový proud (součet vodivostního, konvekčního a posuvného proudu), který prochází plochou S ohraničenou danou křivkou l .

Vyjádříme-li křivkový integrál na levé straně (8.1) pomocí Stokesovy věty plošným integrálem s vektorovou funkcí $\text{rot } \vec{H}$ po ploše S a proud procházející plochou S pomocí proudové hustoty \vec{J} podle (3.5), dostáváme

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (8.2)$$

zde $d\vec{S}$ je vektor diferenciálu plochy, jehož velikost je rovna velikosti elementu plochy dS , směr a orientace jsou dány vnější normálou k ploše S v bodě elementu dS .

Protože rovnice (8.2) platí pro libovolnou plochu S , bude po jednoduché úpravě platit

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J}, \quad (8.3)$$

kde $\operatorname{rot} \vec{H}$ (čti: rotace vektorové funkce \vec{H}) je v pravoúhlých souřadnicích definována symbolickým determinantem

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix}. \quad (8.4)$$

Proudovou hustotu \vec{J} na pravé straně (8.3) tvoří součet složek odpovídající vodivostnímu proudu \vec{J}_c , konvekčnímu proudu \vec{J}_k a posuvnému proudu \vec{J}_p .

Proudovou hustotu \vec{J}_c můžeme vyjádřit na základě Ohmova zákona v diferenciálním tvaru (3.12) $\vec{J}_c = \gamma \vec{E}$, kde γ je měrná elektrická vodivost v daném místě prostředí a \vec{E} je intenzita elektrického pole v tomto bodě.

Posuvný proud vzniká tehdy, dochází-li v elektrickém poli k časové změně vektoru elektrické indukce \vec{D} . Posuvný proud např. charakterizuje pohyb vázaných elektrických nábojů během polarizování dielektrika. Tento proud však existuje i ve vakuu. Dá se dokázat, že hustota posuvného proudu je dána vztahem

$$\vec{J}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (8.5)$$

Vyjádříme-li pravou stranu (8.3) pomocí (3.12) a (8.5) a předpokládáme-li hustotu konvekčního proudu $\vec{J}_k = 0$, dostaneme 1.M.R v diferenciálním tvaru

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \gamma \vec{E} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (8.6)$$

8.1.2 Druhá Maxwellova rovnice

Druhá Maxwellova rovnice v integrálním tvaru vyjadřuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce (4.22)

$$U_e = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (8.7)$$

Vyjádříme-li indukované napětí U_e pomocí intenzity elektrického pole \vec{E} podle (2.35) ve tvaru $U_e = \oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l}$ a magnetický indukční tok podle (4.20)

$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, kde l je uzavřená křivka v magnetickém poli ohraničující plochu

S , dostaneme (8.7) ve tvaru

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (8.8)$$

Křivkový integrál na levé straně převedeme pomocí Stokesovy věty na integrál plošný po ploše S ohraničené křivkou l ,

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (8.9)$$

takže rovnici (8.8) můžeme napsat ve tvaru

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (8.10)$$

Tato rovnice musí platit pro libovolnou plochu S ohraničenou křivkou l , takže bude platit

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.11)$$

což je druhá Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru.

8.1.3 Třetí Maxwellova rovnice

Tato rovnice v integrálním tvaru vychází z Gaussovy věty elektrostatiky (2.53)

$$\Psi = Q, \quad (8.12)$$

kde Ψ značí elektrický indukční tok procházející uzavřenou plochou S ohraničující objem V , Q je celkový elektrický náboj v objemu V .

Vyjádříme-li tok Ψ pomocí vektoru elektrické indukce \vec{D} v bodech plochy S

$$\Psi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} \quad (8.13)$$

a náboj Q pomocí objemové hustoty náboje ρ

$$Q = \int_V \rho dV, \quad (8.14)$$

pak dostaneme

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV. \quad (8.15)$$

Integrál na levé straně (8.15) převedeme pomocí Gaussovy věty z vektorové analýzy na integrál objemový, $\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{D} dV$. Potom

$$\int_V \text{div } \vec{D} dV = \int_V \rho dV. \quad (8.16)$$

Zde $\text{div } \vec{D}$ (čti: divergence vektoru \vec{D}) v pravoúhlých souřadnicích znamená

$$\frac{\partial}{\partial x} D_x + \frac{\partial}{\partial y} D_y + \frac{\partial}{\partial z} D_z.$$

Protože rovnice (8.16) platí pro libovolný objem V ohraničený uzavřenou plochou S , plyne z ní

$$\text{div } \vec{D} = \rho, \quad (8.17)$$

což je třetí Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru.

8.1.4 Čtvrtá Maxwellova rovnice

Tato rovnice v integrálním tvaru vyjadřuje princip kontinuity magnetického indukčního toku (4.21) nebo také skutečnost, že magnetické pole je "bezzdrojové"

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (8.18)$$

kde S je libovolná uzavřená plocha.

Zde opět pomocí Gaussovy věty vektorové analýzy převedeme plošný integrál na integrál objemový,

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{B} dV, \quad (8.19)$$

kde V je objem ohraničený plochou S . Potom z (8.18) vyplývá

$$\int_V \operatorname{div} \vec{B} dV = 0. \quad (8.20)$$

Tato rovnice platí pro libovolný objem V ohraničený plochou S , proto

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (8.21)$$

což je čtvrtá Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru.

8.1.5 Vedlejší Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice se doplňují vedlejšími rovnicemi, tak zvanými „materiálovými vztahy“, vyjadřujícími závislost vektorů \vec{D} na \vec{E} a \vec{B} na \vec{H}

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad (8.22)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{H}). \quad (8.23)$$

Pro izotropní lineární prostředí platí

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E} = \varepsilon \vec{E}, \quad (8.24)$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}. \quad (8.25)$$

Zde součin relativní permitivity prostředí ε_r a permitivity vakua ε_0 je permitivita prostředí ε a permeabilita prostředí μ je dána součinem permeability prostředí μ_r a permeability vakua μ_0 .

Dalším vedlejším vztahem je Ohmův zákon v diferenciálním tvaru

$$\vec{J} = \vec{J}(\vec{E}). \quad (8.26)$$

Pro lineární izotropní prostředí má tvar

$$\vec{J} = \gamma \vec{E}, \quad (8.27)$$

kde γ je měrná elektrická vodivost tohoto prostředí.

Posledním vedlejším vztahem je rovnice pro sílu působící na bodový náboj Q pohybující se v elektromagnetickém poli popsaném vektory \vec{E} a \vec{B} rychlostí \vec{v} danou (2.7) a (4.8)

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q(\vec{v} \times \vec{B}). \quad (8.28)$$

Kontrolní otázky 8.1

1. Kterými veličinami popisujeme elektromagnetické pole?
2. Vysvětlete jev šíření elektromagnetického vlnění.
3. V čem vidíte rozdíl mezi integrálním a diferenciálním tvarem Maxwellových rovnic?
4. Jaký význam pro praxi mají Maxwellovy rovnice?
5. Vysvětlete význam okrajových a počátečních podmínek při řešení diferenciálních rovnic.
6. Jaký význam má první Maxwellova rovnice?
7. Vysvětlete rozdíl mezi indukčním a konvekčním proudem.
8. Jaký vztah má druhá Maxwellova rovnice k Faradayovu zákonu elektromagnetické indukce?
9. V čem vidíte podobu mezi třetí a čtvrtou Maxwellovou rovnicí a kde je naopak rozdíl?



8.2 Vlnová rovnice pro intenzitu elektrického a magnetického pole

V optice a radiotechnice má velký význam studium vlastností elektromagnetického pole v homogenním, izotropním, nevodivém a nemagnetickém prostředí, ve kterém nejsou volné elektrické náboje. Pro toto prostředí platí $\mu_r \approx 1$, $\gamma = 0$, $\rho = 0$. Za těchto předpokladů mají Maxwellovy rovnice tvar

$$\text{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8.29)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (8.30)$$

$$\varepsilon \text{div} \vec{E} = 0, \quad (8.31)$$

$$\mu \text{div} \vec{H} = 0. \quad (8.32)$$

Z rovnic (8.29) a (8.30) vyloučíme vektor \vec{H} následujícím postupem. Aplikujeme-li na rovnici (8.30) operaci rotace, dostáváme

$$\text{rot rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{H}. \quad (8.33)$$

Podle pravidel vektorového počtu pro rotaci rotace vektoru platí



$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}, \quad (8.34)$$

kde

$$\Delta \vec{E} = \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2}. \quad (8.35)$$

Dosadíme-li do (8.33) vztah (8.34) a vezmeme v úvahu (8.29) a (8.31), dostáváme pro vektor \vec{E} vztah

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}. \quad (8.36)$$

Podobně, aplikujeme-li operaci rot na rovnici (8.29), dostaneme pro vektor \vec{H}

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (8.37)$$

Rovnice (8.36) a (8.37) jsou parciální diferenciální rovnice, které mají nekonečně mnoho řešení. Hledané řešení je určeno okrajovými a počátečními, případně i jinými podmínkami.

Rovnice (8.36) a (8.37) jsou obdobou vlnové rovnice pro vektor výchylky částice prostředí z rovnovážné polohy při prostorovém mechanickém vlnění. Z této analogie usuzujeme, že se vektor intenzity elektrického pole \vec{E} a intenzity magnetického pole \vec{H} chová podobně jako vektor výchylky částic prostředí při prostorovém mechanickém vlnění. Elektrická a magnetická složka elektromagnetického pole se šíří ve formě prostorového vlnění, nazvaného elektromagnetickým vlněním, fázovou rychlostí v , pro niž platí podle (8.36) a (8.37)

$$\varepsilon \mu = \frac{1}{v^2}. \quad (8.38)$$

Potom

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon \mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_r \mu_0}}. \quad (8.39)$$

Pro vakuum je $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$, $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}$,

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}}} \cong 2,998 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}. \quad (8.40)$$

V nevodivém prostředí je $\varepsilon_r \geq 1$, takže

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}. \quad (8.41)$$

Fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vakuu má největší hodnotu c . V každém jiném prostředí se šíří rychlostí menší než c .

Vznikne-li v prostoru elektromagnetický rozruch, šíří se z místa rozruchu do okolí elektromagnetické vlnění, které má složku elektrickou a složku magnetickou, šířící se stejnou rychlostí. Toto vlnění je jedním z jevů, který byl nejprve odvozen teoreticky (J. C. Maxwell, 1865) a teprve později prokázán experimentálně (H. Hertz, 1887). Podle Maxwellových výsledků se elektromagne-

tické vlnění ve vakuu šíří rychlostí světla podle (8.40). Na základě této skutečnosti Maxwell vyslovil předpoklad, že podstatou světla je elektromagnetické vlnění vysílané zdrojem světla.

Kontrolní otázky 8.2

1. *Vysvětlete pojem homogenní, izotropní, nevodivé a nemagnetické prostředí.*
2. *Jaký vztah mají permitivita a permeabilita prostředí k rychlosti šíření světla?*
3. *Jaká je souvislost mezi světlem a elektromagnetickým vlněním?*



8.3 Základní vlastnosti elektromagnetického vlnění

Časová závislost vektorů \vec{E} a \vec{H} elektromagnetického pole je určena charakteristikami zdroje a prostředí, ve kterém se elektromagnetické vlnění šíří. Z časových průběhů má praktický význam harmonická závislost vektorů \vec{E} a \vec{H} . Základními údaji jsou kmitočet f a vlnová délka $\lambda = v/f$, kde v je fázová rychlost elektromagnetického vlnění v uvažovaném prostředí.

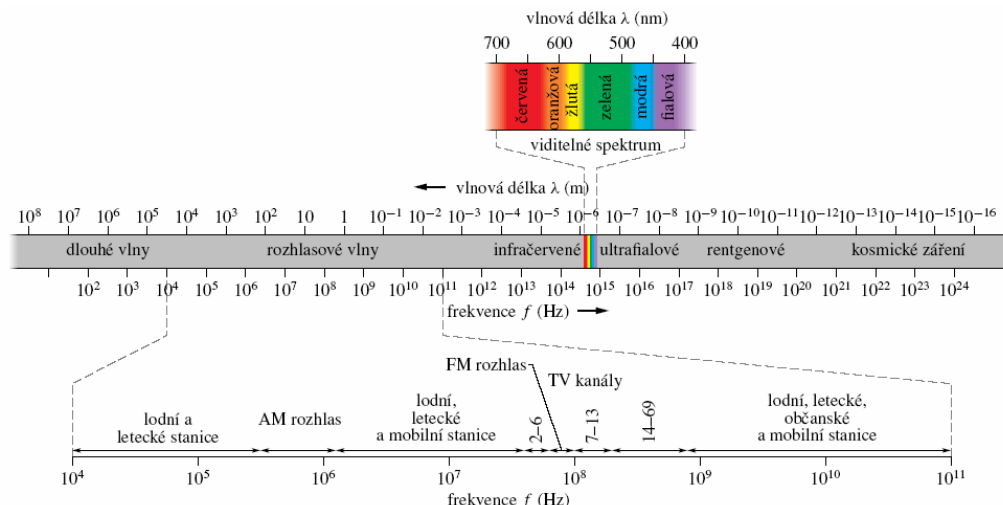


Kmitočtové spektrum elektromagnetického vlnění se dělí na řadu rozsahů, z nichž každý má svoje charakteristické vlastnosti (obr. 8.1). Elektromagnetické vlny v jednotlivých rozsazích mají specifické metody generace a vlastnosti šíření v prostředí. Kmitočtové spektrum není v oblasti nízkých ani vysokých kmitočtů přesně omezeno. Nejmenší kmitočet elektromagnetického vlnění byl zjištěn u stojatých elektromagnetických vln mezi ionosférou a zemským povrchem (asi 8 Hz). V horní oblasti spektra se vyskytuje elektromagnetické vlnění kosmického záření ($f > 10^{21}$ Hz).

Podle vlnové délky λ dělíme obvykle spektrum elektromagnetického vlnění na:

1. **γ záření** ($\lambda < 0,0012$ nm), jehož umělým zdrojem je např. betatron,
2. **rentgenové záření** ($\lambda = 0,0012$ nm až 12 nm), zdrojem je Röntgenova lampka,
3. **ultrafialové záření** ($\lambda = 12$ nm až 380 nm), zdrojem je např. elektrický výboj nebo elektrický oblouk v plynu,
4. **viditelné světlo** ($\lambda = 380$ nm až 760 nm),
5. **infračervené záření** ($\lambda = 760$ nm až 1 mm), zdrojem je např. rozžhavené vlákno,
6. **radiové vlny** ($\lambda > 1$ mm), zdrojem jsou např. magnetrony, klystrony a elektronické generátory. Radiové vlny se dělí dále na milimetrové (30 až 300 GHz), centimetrové (3 až 30 GHz), decimetrové (300 až 3000 MHz), metrové (30 až 300 MHz), dekametrové (3 až 30 MHz), hektometrové (300 až 3000 kHz), kilometrové (30 až 300 kHz), myriametrové (3 až 30 kHz) a dekamyriametrové (300 Hz až 3 kHz). Pro přenos amplitudově modulovaného rozhlasového signálu se používají dlouhé vlny (150 až 285 kHz), střední vlny (525 až 1605 kHz) a krátké vlny (3 až 30 MHz). Pro přenos

rozhlasového signálu kmitočtově modulovaného a televize se používají tzv. velmi krátké vlny (metrové a decimetrové vlny).



Obr. 8.1: Spektrum elektromagnetických vln (podle HRW)

Kontrolní otázky 8.3



1. Podle jakých kritérií rozdělujeme elektromagnetické vlnění?

8.4 Rovinné postupné elektromagnetické vlnění

8.4.1 Vlnové rovnice pro rovinné vlnění



Vlnové rovnice (8.36) a (8.37) popisují všechny druhy elektromagnetických vln v izotropním homogenním nevodivém prostředí bez elektrických nábojů. Jednoduchým a důležitým případem jsou rovinné vlny, kterých se užívá jak v optice (z důvodu malých vlnových délek), tak i v radiotechnice (v dostatečné vzdálenosti od antény).

Zvolíme-li směr osy x kolmo na vlnoplochy a tedy rovnoběžně se směrem šíření vlnění, budou vektory \vec{E} a \vec{H} funkcí pouze souřadnice x a času. Z tohoto důvodu vymizí v Maxwellových rovnicích všechny derivace vektorů \vec{E} , \vec{H} podle y a z . Vlnové rovnice (8.36) a (8.37) přecházejí potom do tvaru

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (8.42)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (8.43)$$

Rovnicím (8.42) a (8.43) vyhovuje obecný tvar řešení

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{x}{v} \right), \quad (8.44)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_1\left(t - \frac{x}{v}\right) + \vec{H}_2\left(t + \frac{x}{v}\right) \quad (8.45)$$

$$\text{kde } v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}.$$

První člen pravé strany představuje rovinnou vlnu šířící se ve směru osy x zleva doprava, druhý pak vlnu, která se šíří zprava doleva.

8.4.2 Maxwellovy rovnice pro rovinné vlny

První Maxwellova rovnice (8.6) má pro rovinnou vlnu tvar

$$\text{rot } \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (8.46)$$

kde $\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}$, $\vec{H} = H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}$. Odtud vyplývá, porovnáme-li složky u jednotlivých jednotkových vektorů na levé a pravé straně,

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = 0, \quad (8.47)$$

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (8.48)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t}. \quad (8.49)$$

Podobně druhá Maxwellova rovnice (8.11) se dá vyjádřit ve složkovém tvaru

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = 0, \quad (8.50)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_y}{\partial t}, \quad (8.51)$$

$$-\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu \frac{\partial H_z}{\partial t}. \quad (8.52)$$

Třetí Maxwellova rovnice (8.17) má tvar

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \quad (8.53)$$

Čtvrtá Maxwellova rovnice (8.21) se dá vyjádřit ve tvaru

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0. \quad (8.54)$$

8.4.3 Závěry vyplývající z Maxwellových rovnic

(1) Z rovnic (8.47) a (8.53) vyplývá, že složka E_x intenzity elektrického pole má konstantní hodnotu, protože nezávisí ani na souřadnicích, ani na čase. Ta-

kové pole by bylo statické. Totéž vyplývá z rovnic (8.50) a (8.54) pro složku H_x magnetického pole. Protože podle předpokladu nejsou v magnetickém poli ani elektrické náboje, ani permanentní magnety, které by vytvářely statická pole, platí

$$E_x = 0, H_x = 0. \quad (8.55)$$

Vlnění se účastní jen složky E_y, E_z, H_y, H_z , které jsou kolmé na osu x a tedy na směr šíření vlnění. Rovinné elektromagnetické vlny jsou tedy vlněním příčným.

(2) Pro postupné vlny, které se šíří jedním směrem (např. v kladném smyslu osy x), jsou řešení vlnových rovnic (8.42) a (8.43) podle (8.44) a (8.45) ve tvaru

$$E_y = E_y\left(t - \frac{x}{v}\right), E_z = E_z\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (8.56)$$

$$H_y = H_y\left(t - \frac{x}{v}\right), H_z = H_z\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (8.57)$$

Vlnovým rovnicím vyhovují libovolné funkce argumentu $\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Funkce

(8.56) a (8.57) však musí vyhovovat Maxwellovým rovnicím (8.48), (8.49), (8.51) a (8.52). Můžeme proto libovolně volit jen dvě z těchto funkcí, např. E_y a E_z (jsou dány podmínkami vybuzení elektromagnetické vlny). Funkci H_z určíme potom např. z rovnice (8.48)

$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left[E_y\left(t - \frac{x}{v}\right) \right] = \varepsilon E'_y\left(t - \frac{x}{v}\right), \quad (8.58)$$

kde apostrof značí derivaci E_y podle argumentu $\left(t - \frac{x}{v}\right)$. Integrujeme-li rovnici (8.58) podle x , dostaneme

$$H_z = -\int \varepsilon E'_y\left(t - \frac{x}{v}\right) dx. \quad (8.59)$$

Zavedeme-li substituci $t - \frac{x}{v} = q$, $dx = -v dq$, potom

$$H_z = \int \varepsilon E'_y(q) v dq = \varepsilon v E_y(q) + K. \quad (8.60)$$

Integrační konstantu K položíme rovnu nule, čímž se zbavíme, jako nezajímavé, statické složky. Dosadíme-li do (8.60) za $q = t - \frac{x}{v}$, $v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$, dostaneme

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y\left(t - \frac{x}{v}\right). \quad (8.61)$$

Složka H_z magnetického pole má stejný časový průběh jako složka E_y a liší se od ní pouze součinitelem $\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}$.

Podobně složku H_y můžeme vyjádřit pomocí (8.49)

$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.62)$$

Výsledné intenzity elektrického a magnetického pole jsou

$$\vec{E} = E_y \vec{j} + E_z \vec{k}, \quad (8.63)$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (-E_z \vec{j} + E_y \vec{k}) \quad (8.64)$$

a jejich velikosti jsou

$$E = \sqrt{E_y^2 + E_z^2}, \quad (8.65)$$

$$H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \sqrt{E_y^2 + E_z^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E. \quad (8.66)$$

Poměr velikosti obou intenzit označíme Z a platí pro něj

$$Z = \frac{E}{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H} \cdot \text{m}^{-1}}{8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}, \quad (8.67)$$

$$Z = 377 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} \Omega. \quad (8.68)$$

Veličina Z se nazývá vlnová impedance prostředí. Pro vakuum je $Z = Z_0 \cong 377 \Omega$.

(3) Zjistíme vzájemnou polohu vektorů \vec{E} a \vec{H} . Svírají-li vektory \vec{E} a \vec{H} úhel α , platí pro jejich skalární součin

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = E H \cos \alpha = E_y H_y + E_z H_z. \quad (8.69)$$

Z (8.63) a (8.64) vyplývá

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (-E_y E_z + E_y E_z) = 0. \quad (8.70)$$

Ze vztahů (8.69) a (8.70) plyne, že $\cos \alpha = 0$, čili $\alpha = 90^\circ$ nebo 270° . Vektory \vec{E} a \vec{H} jsou pro rovinnou elektromagnetickou vlnu v lineárním izotropním prostředí na sebe kolmé.

Kontrolní otázky 8.4

1. Uveďte základní charakteristiky rovinné elektromagnetické vlny?
2. Lze považovat vektory \vec{E} a \vec{H} za nezávislé?



8.5 Rovinné postupné elektromagnetické vlnění s harmonickým časovým průběhem



Výsledky, které jsme dosud odvodili, platí pro rovinné elektromagnetické vlnění s libovolným časovým průběhem. Velmi důležitý je případ harmonického vlnění.

Uvažujme, že se prostorem šíří rovinná harmonická elektromagnetická vlna s úhlovou frekvencí ω , která má složky vektoru \vec{E} dané vztahy

$$E_x = 0, \quad (8.71)$$

$$E_y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (8.72)$$

$$E_z = B \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right], \quad (8.73)$$

kde A, B jsou amplitudy složek a φ je fázový posuv obou složek.

Složky vektoru \vec{H} jsou potom dány podle (8.62) a (8.61) vztahy

$$H_x = 0, \quad (8.74)$$

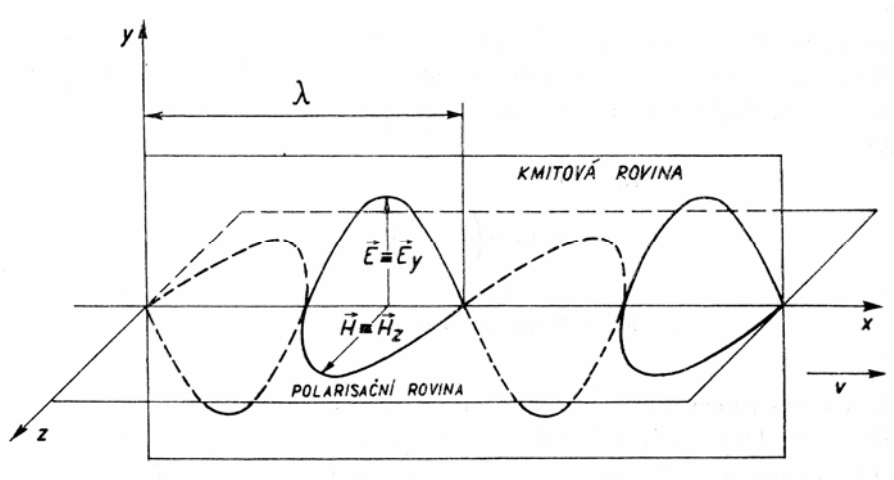
$$H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_z = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} B \sin \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right]. \quad (8.75)$$

$$H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_y = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.76)$$

Vektory \vec{E} a \vec{H} jsou podle (8.70) na sebe kolmé a poměr jejich velikostí je podle (8.67) konstantní.

Pro různé hodnoty amplitud A, B a fázového rozdílu φ mohou nastat tyto případy:

a) Je-li amplituda $B = 0$, má intenzita \vec{E} pouze složku ve směru osy y a \vec{H} má složku pouze ve směru osy z . Vektor \vec{E} leží trvale v rovině rovnoběžné s rovinou xy a vektor \vec{H} v rovině rovnoběžné s rovinou xz . Takovéto vlnění nazýváme lineárně polarizované. Pro určitý časový okamžik $t = 0$ je průběh intenzit \vec{E} a \vec{H} v závislosti na x znázorněn na obr. 8.2. Za kmitovou rovinu polarizované vlny se obvykle považuje rovina, v níž leží vektor \vec{E} . Polarizační rovinou se nazývá rovina vektorů \vec{H} .

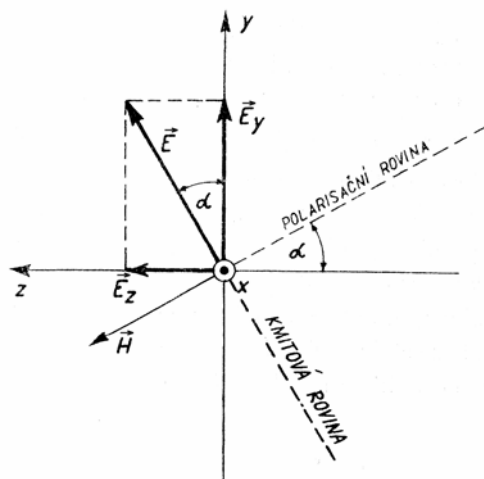


Obr. 8.2: Průběh lineárně polarizovaného vlnění

b) Je-li $A = 0$, je tento případ podobný předcházejícímu případu. Vektor \vec{E} má směr osy z , vektor \vec{H} má směr osy y .

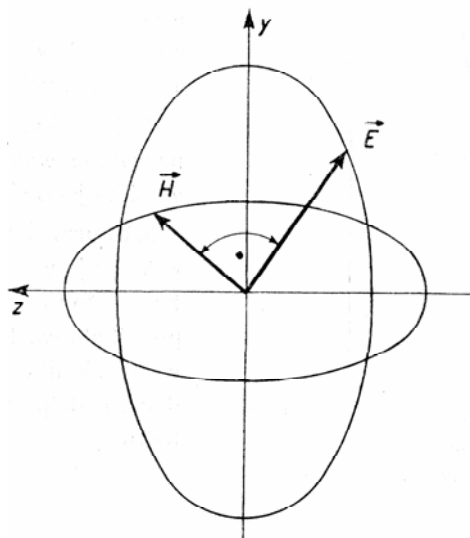
c) Je-li $A \neq 0$, $B \neq 0$, $\varphi = 0$, jsou složky vektorů \vec{E} a \vec{H} podle (8.72) až (8.76) ve fázi. Výsledné vlnění je lineárně polarizované, obr. 8.3. Kmitová rovina však svírá s rovinou xy úhel α , pro který platí

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_z}{E_y} = \frac{B}{A}. \quad (8.77)$$



Obr. 8.3: Lineárně polarizované vlnění

d) V obecném případě je $A \neq 0$, $B \neq 0$, $\varphi \neq 0$. Koncový bod vektoru \vec{E} pro $x = \text{konst.}$ v závislosti na čase opisuje elipsu, protože jeho složky se podle (8.72) a (8.73) mění harmonicky s určitou hodnotou fázového posuvu φ , obr. 8.4. Podobně se chová vektor \vec{H} , který je kolmý na vektor \vec{E} . Vzniká elipticky polarizované vlnění.



Obr. 8.4: Elipticky polarizované vlnění

Kontrolní otázky 8.5



1. Jak odlišíme lineárně polarizovanou elektromagnetickou vlnu od elipticky polarizovaného vlnění?

8.6 Energie přenášená elektromagnetickým vlněním



Protože energie elektromagnetického pole je závislá na vektorech \vec{E} a \vec{H} , dochází při změně těchto vektorů při šíření elektromagnetické vlny k přenosu energie.

8.6.1 Objemová hustota energie elektrického pole

Určíme energii E_e elektrického pole mezi deskami kondenzátoru s dielektrikem o permitivitě ε . Desky necht' mají plochu S a vzdálenost mezi nimi je d . Nabity jsou nábojem $+Q$ a $-Q$ a napětí mezi deskami je U , (obr. 2.19). Při nabíjení kondenzátoru je třeba vykonat práci

$$W = \int_0^Q U dQ. \quad (8.78)$$

Vyjádríme-li napětí U pomocí náboje a kapacity podle (2.41), dostaneme

$$W = \int_0^Q \frac{Q}{C} dQ = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}. \quad (8.79)$$

Podle (2.42) je $Q = E\varepsilon S$ a podle (2.54) je $C = \frac{\varepsilon S}{d}$. Potom

$$W = \frac{1}{2} E^2 \varepsilon S d = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 V . \quad (8.80)$$

kde V je objem prostředí mezi deskami kondenzátoru, v němž je soustředěno elektrické pole. Energie E_e elektrického pole mezi deskami kondenzátoru je rovna práci W .

Objemovou hustotu energie homogenního elektrického pole w_e definujeme jako podíl energie E_e a objemu pole V ,

$$w_e = \frac{E_e}{V} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} . \quad (8.81)$$

Z (8.81) vyplývá, že objemová hustota energie elektrického pole je úměrná kvadrátu velikosti intenzity nebo skalárnímu součinu vektorů \vec{E} a \vec{D} elektrického pole. Dá se dokázat, že vztah (8.81) platí pro libovolné, nejen homogenní, elektrické pole.

8.6.2 Objemová hustota energie magnetického pole

Uurčíme nejdříve energii magnetického pole cívky o indukčnosti L a ohmickém odporu vinutí R , která je připojena ke zdroji o elektromotorickém napětí u_e podle obr. 5.3. Z rovnice (5.7) vyplývá po dosazení za $u_R = Ri$

$$u_e = Ri + L \frac{di}{dt} . \quad (8.82)$$

Násobíme-li rovnici proudem i , dostaneme okamžitý výkon, dodávaný zdrojem do obvodu

$$u_e i = Ri^2 + Li \frac{di}{dt} . \quad (8.83)$$

Potom práce vykonaná zdrojem od okamžiku zapnutí zdroje až do doby t je

$$W = \int_0^t u_e i dt = \int_0^t Ri^2 dt + \int_0^t \left(Li \frac{di}{dt} \right) dt . \quad (8.84)$$

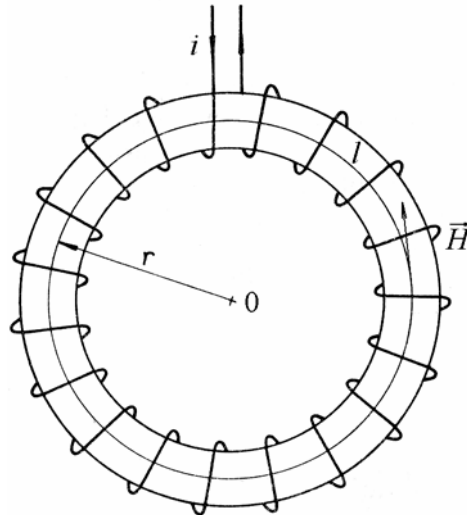
První člen na pravé straně představuje Jouleovo teplo, dodané do odporu R . Druhý člen představuje energii magnetického pole cívky E_m , pro kterou platí

$$W_m = \int_0^t \left(Li \frac{di}{dt} \right) dt = \frac{1}{2} Li^2 , \quad (8.85)$$

kde $i = i(t)$.

Vyjádříme energii magnetického pole E_m pomocí velikostí vektoru intenzity \vec{H} a magnetické indukce \vec{B} magnetického pole cívky. Pro výpočet použijeme model toroidální cívky podle obr. 8.5 s n závitů, průřezem S a délkou střední kružnice l , kterou protéká proud i . Intenzitu magnetického pole H určíme pomocí zákona celkového proudu (4.13). Platí

$$Hl = ni . \quad (8.86)$$



Obr. 8.5: Toroidální cívka

Určíme indukčnost L toroidu podle (4.28)

$$L = \frac{\Phi}{i} = \frac{nBS}{i} = \frac{n\mu HS}{i}, \quad (8.87)$$

kde Φ je celkový magnetický tok procházející průřezem S (předpokládáme, že magnetické pole je soustředěno uvnitř toroidu). Potom

$$E_m = \frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} n\mu HS \frac{Hl}{n} = \frac{1}{2} \mu H^2 Sl = \frac{1}{2} \mu H^2 V, \quad (8.88)$$

kde V je objem toroidu.

Hustota energie magnetického pole je potom

$$w_m = \frac{E_m}{V} = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}. \quad (8.89)$$

Dá se dokázat, že vztah (8.89) platí pro libovolné magnetické pole.

8.6.3 Poyntingův vektor

Budeme hledat výraz pro výkon přenášený rovinným postupným elektromagnetickým vlněním. Plochou S kolmou ke směru šíření vlny o rychlosti v přeneše tato vlna za elementární časový interval dt energii, která je obsažena v objemu $dV = Sv dt$,

$$dE = w dV = wSv dt, \quad (8.90)$$

kde w je celková hustota energie elektromagnetického pole

$$w = w_e + w_m = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2. \quad (8.91)$$

Okamžitý přenášený výkon jednotkovou plochou je okamžitá výkonová hustota p , kterou určíme pomocí (8.90)

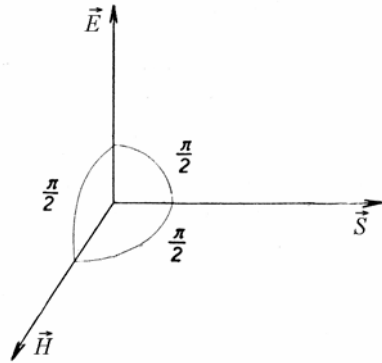
$$p = \frac{1}{S} \frac{dE}{dt} = wv. \quad (8.92)$$

Pro rovinnou vlnu platí podle (8.66) $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$, potom podle (8.81), (8.89) a (8.39) dostaneme

$$p = \left[\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\varepsilon}{\mu} E^2 \right) \right] \sqrt{\frac{1}{\varepsilon \mu}} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E^2 = EH = |\vec{E} \times \vec{H}|. \quad (8.93)$$

Vektorový součin $\vec{E} \times \vec{H}$ je vektor, který má směr kolmý na vektory \vec{E} a \vec{H} , tedy stejný jako směr šíření elektromagnetické vlny. Definujeme tzv. Poyntingův vektor \vec{S} jako vektor, jehož velikost je rovna okamžité výkonové hustotě p , $S = p$, a jehož směr a orientaci určuje šířící se elektromagnetická vlna, obr. 8.6

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}.$$



Obr. 8.6: K definici Poyntingova vektoru

Vzorec pro Poyntingův vektor byl odvozen pro postupnou rovinnou vlnu. Dá se však dokázat pomocí Maxwellových rovnic, že platí pro obecné elektromagnetické pole.

Pomocí Poyntingova vektoru můžeme určit intenzitu vlnění I jako časovou střední hodnotu okamžité výkonové hustoty $p = S$.

8.6.4 Energie harmonické vlny

Pro rovinnou vlnu postupující v kladném smyslu osy x má Poyntingův vektor tvar ($E_x = 0, H_x = 0$)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = (E_y \vec{j} + E_z \vec{k}) \times (H_y \vec{j} + H_z \vec{k}) = (E_y H_z - E_z H_y) \vec{i}. \quad (8.94)$$

Vyjádříme-li podle (8.64) intenzitu \vec{H} pomocí \vec{E} , dostaneme

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_y^2 + E_z^2) \vec{i}. \quad (8.95)$$

Pro lineárně polarizované harmonické vlnění je podle (8.72), (8.73), $\varphi = 0$,

$$E_y = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (8.96)$$

$$E_z = B \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right). \quad (8.97)$$

Poyntingův vektor má tvar

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (A^2 + B^2) \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) \vec{i}. \quad (8.98)$$

Intenzita vlnění má potom velikost

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (A^2 + B^2). \quad (8.99)$$

Pro elipticky polarizované vlnění je velikost složek dána vztahem (8.72) a (8.73). Poyntingův vektor má potom tvar

$$\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left\{ A^2 \sin^2 \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + B^2 \sin^2 \omega \left[\left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] \right\} \vec{i}.$$

Intenzita vlnění je

$$I = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (A^2 + B^2). \quad (8.100)$$

Porovnáme-li (8.99) a (8.100), vidíme, že intenzita vlnění nezávisí na vzájemném posunutí složek vektoru \vec{E} resp. \vec{H} .

Kontrolní otázky 8.6



1. Jaké veličiny ovlivňují objemovou hustotu energie elektrického pole?
2. Jaká je souvislost mezi energií elektrického a magnetického pole?
3. Definiujte intenzitu elektromagnetického vlnění.
4. Které veličiny ovlivňují energii harmonické elektromagnetické vlny?
5. Jaký význam má Poyntingův vektor?

8.7 Stojaté elektromagnetické vlnění



Dosud jsme uvažovali podle (8.44) pouze postupnou rovinnou vlnu zadanou vektorovou funkcí $\vec{E}_1 \left(t - \frac{x}{v} \right)$, která se šířila v kladném smyslu osy x . Postupuje-li současně v záporném smyslu osy x vlna, která je dána funkcí $E_2 \left(t + \frac{x}{v} \right)$, dochází ke skládání obou vln. Výsledná vlna je dána vztahem (8.44)

$$\vec{E} = \vec{E}_1 \left(t - \frac{x}{v} \right) + \vec{E}_2 \left(t + \frac{x}{v} \right). \quad (8.101)$$

Protože sledujeme rovinné vlny, jsou složky \vec{E} a \vec{H} v ose x nulové. Potom

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_{1y} + E_{2y})\vec{j} + (E_{1z} + E_{2z})\vec{k}, \quad (8.102)$$

kde $\vec{E}_1 = E_{1y}\vec{j} + E_{1z}\vec{k}$, $\vec{E}_2 = E_{2y}\vec{j} + E_{2z}\vec{k}$. Podobně vektor intenzity magnetického pole je dán vztahem

$$\vec{H} = (H_{1y} + H_{2y})\vec{j} + (H_{1z} + H_{2z})\vec{k}, \quad (8.103)$$

kde složky vektorů \vec{E}_1 a \vec{H}_1 jsou navzájem vázány vztahy (8.61) a (8.62) a pro složky vektorů \vec{E}_2 a \vec{H}_2 platí tyto vztahy s opačnými znaménky.

8.7.1 Vzájemná poloha vektorů \vec{E} a \vec{H}

Vyšetříme vzájemnou polohu vektorů \vec{E} a \vec{H} výsledné vlny. Pokud by byly vektory \vec{E} a \vec{H} navzájem kolmé, byl by jejich skalární součin nulový. Skalární součin těchto vektorů je

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = (E_{1y} + E_{2y})(H_{1y} + H_{2y}) + (E_{1z} + E_{2z})(H_{1z} + H_{2z}). \quad (8.104)$$

Vyjádříme-li složky vektoru \vec{H} pomocí složek vektoru \vec{E} , (8.61), (8.62), dostaneme

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left[(E_{1y} + E_{2y})(E_{2z} - E_{1z}) + (E_{1z} + E_{2z})(E_{1y} - E_{2y}) \right]. \quad (8.105)$$

Po úpravě

$$\vec{E} \cdot \vec{H} = 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (E_{1y}E_{2z} - E_{2y}E_{1z}). \quad (8.106)$$

Vektory \vec{E} a \vec{H} jsou na sebe trvale kolmé jen v případě, že

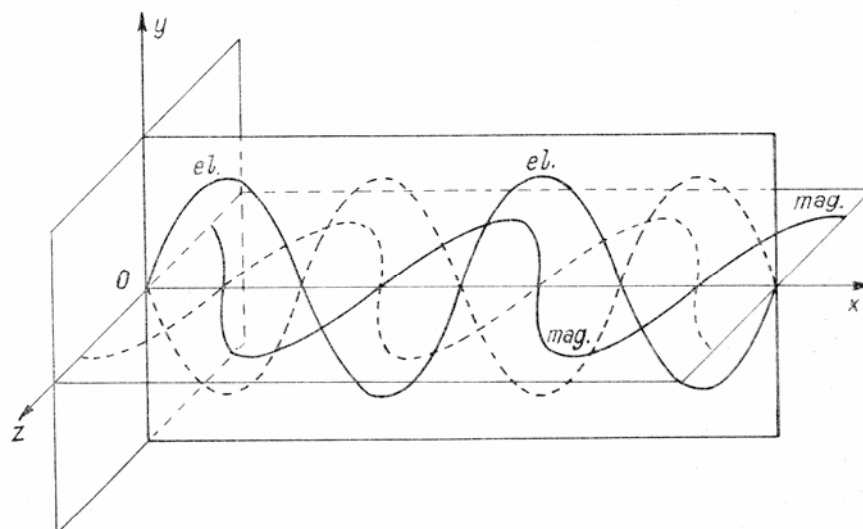
$$E_{1y}E_{2z} - E_{2y}E_{1z} = 0, \quad (8.107)$$

$$\frac{E_{1y}}{E_{1z}} = \frac{E_{2y}}{E_{2z}}. \quad (8.108)$$

Pro harmonické vlnění dané rovnicemi (8.72) a (8.73) tato podmínka znamená, že musí být složky vektorů \vec{E}_1 , resp. \vec{E}_2 ve fázi, čili dílčí vlny musí být lineárně polarizované a musí mít společnou polarizační rovinu.

8.7.2 Průběh stojatého vlnění dvou harmonických lineárně polarizovaných vln

Polohu souřadných os zvolíme tak, aby směr šíření vln souhlasil s osou x a společná polarizační rovina obou vln byla rovnoběžná s rovinou xz (obr. 8.7). Potom má vektor \vec{E} jen složku ve směru osy y a vektor \vec{H} ve směru z .



Obr. 8.7: Vznik stojatého vlnění

Budeme vyšetřovat úplné stojaté hmonické vlnění, které je charakterizováno stejnou amplitudou obou vln a stejnou úhlovou frekvencí ω

$$E_1 = E_{1y} = A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (8.109)$$

$$E_2 = E_{2y} = A \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi \right], \quad (8.110)$$

$$H_1 = H_{1z} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right), \quad (8.111)$$

$$H_2 = H_{2z} = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} A \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] \quad (8.112)$$

Výsledná intenzita elektrického pole bude

$$E = E_1 + E_2 = A \left\{ \sin \omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \sin \left[\omega \left(t + \frac{x}{v} \right) + \varphi \right] \right\}, \quad (8.113)$$

$$E = 2A \cos \left(\omega \frac{x}{v} + \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right), \quad (8.114)$$

$$E = E_0 \sin \left(\omega t + \frac{\varphi}{2} \right), \text{ kde } E_0 = 2A \cos \left(\omega \frac{x}{v} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (8.115)$$

Výsledná intenzita elektrického pole má harmonický průběh. Intenzita je ve všech bodech prostoru ve fázi a její amplituda E_0 je dána funkcí závislou na souřadnici x . Vlnění tohoto typu se nazývá úplné stojaté vlnění. Amplituda vlnění (8.113) nabývá maxima v bodech x , pro které platí

$$\omega \frac{x}{v} + \frac{\varphi}{2} = 2k \frac{\pi}{2}. \quad (8.116)$$

Těmto bodům v prostoru říkáme kmitny stojatého vlnění. Platí-li

$$\omega \frac{x}{v} + \frac{\varphi}{2} = (2k+1) \frac{\pi}{2}, \quad (8.117)$$

je amplituda nulová a body o souřadnici x nazýváme uzly. Dva sousední uzly, resp. kmitny, jsou od sebe vzdáleny o $\lambda/2$, neboť

$$\frac{\omega x_2}{v} + \frac{\varphi}{2} - \left(\frac{\omega x_1}{v} + \frac{\varphi}{2} \right) = 2(k+1) \frac{\pi}{2} - 2k \frac{\pi}{2}, \quad (8.118)$$

$$x_2 - x_1 = \frac{v}{\omega} \pi = \frac{1}{2} \frac{v}{f} = \frac{\lambda}{2}, \quad (8.119)$$

kde λ je vlnová délka vlnění. Mezi kmitnou a sousedním uzlem je vzdálenost $\lambda/4$.

Podobně, vyšetřujeme-li stojaté vlnění magnetické složky elektromagnetického vlnění, podle (8.111) a (8.112) zjistíme, že výsledná intenzita magnetického pole má podobný průběh jako intenzita elektrického pole, ale je posunuta ve fázi o $\pi/2$. Má-li v daném bodě v daném okamžiku intenzita E maximum, má intenzita H minimum a naopak.

8.7.3 Harmonické stojaté vlnění při kolmém odrazu od vodivé roviny

Při dopadu lineárně polarizované vlny na dokonale vodivou rovinu kolmou k ose x dochází k dokonalému odrazu elektromagnetické vlny, tedy amplituda odražené vlny bude mít stejnou velikost jako vlna dopadající. Intenzita elektrického pole má v bodech vodivé roviny nulovou hodnotu (uzel). Magnetická složka má potom v těchto bodech kmitnu. Elektrická složka se tedy odráží s opačnou fází a magnetická složka se odráží beze změny fáze.

Kontrolní otázky 8.7

1. Za jakých podmínek vzniká stojaté elektromagnetické vlnění?
2. Jaká je vzájemná poloha vektorů \vec{E} a \vec{H} ?
3. V jakém vztahu jsou elektrická a magnetická složka elektromagnetického vlnění při kolmém odrazu od vodivé roviny?



8.8 Modulace elektromagnetické vlny

Použijeme-li elektromagnetické vlny k přenosu informace o nějaké fyzikální veličině popsané časovou funkcí $f(t)$, (tzv. přenos informace), neprovedeme zpravidla přímou transformaci funkce $f(t)$ na elektromagnetickou vlnu stejného časového průběhu, ale z technických důvodů modulujeme touto informací některý z parametrů harmonické vlny, tj. amplitudu, fázi nebo úhlovou frekvenci.



V dalším budeme sledovat v libovolném bodě prostoru elektrickou složku rovinné elektromagnetické vlny, polarizované v jedné rovině, s vektorem intenzi-

ty elektrického pole ve směru osy z , $\vec{E} = E(t)\vec{k}$. Modulované elektromagnetické vlnění má potom časový průběh velikosti intenzity elektrického pole ve tvaru

$$E(t) = E_0(t)\sin[\Phi(t)]. \quad (8.120)$$

Modulační signál $f(t)$ může podle (8.120) ovlivňovat buďto amplitudu $E_0(t)$, nebo okamžitý úhlový kmitočet $\omega(t) = \frac{d\Phi(t)}{dt}$ nebo fázi $\Phi(t)$.

Modulaci elektromagnetického vlnění můžeme realizovat např. tak, že funkci $f(t)$, kterou popisujeme časový průběh přenášené informace, převedeme vhodným převodníkem (např. mikrofonem, jedná-li se o akustický signál) na elektrickou veličinu (např. napětí), kterou se v modulátoru moduluje nosný harmonický elektrický signál. Tento se zesílí výkonovým zesilovačem a přivádí do antény ve formě napájecího proudu. Anténa vyzařuje modulované elektromagnetické vlnění do okolního prostoru.

8.8.1 Amplitudová modulace

Vyznačuje se konstantní úhlovou frekvencí ω_0 , fází $\omega_0 t + \varphi$ a amplitudou $E_0(t) = [A_0 + k_a f(t)]$, takže modulovaná elektromagnetická vlna má v daném bodě prostoru velikost intenzity elektrického pole

$$E(t) = [A_0 + k_a f(t)]\sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.121)$$

Je-li $f(t)$ harmonickou funkcí času o úhlové frekvenci $\Omega \ll \omega_0$, je $k_a f(t) = A_n \sin \Omega t$. Potom má intenzita elektrického pole tvar (obr. 8.8)

$$E(t) = (A_0 + A_n \sin \Omega t)\sin(\omega_0 t + \varphi) = A_0(1 + \alpha \sin \Omega t)\sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (8.122)$$

Vztah (8.122) můžeme vyjádřit ve tvaru

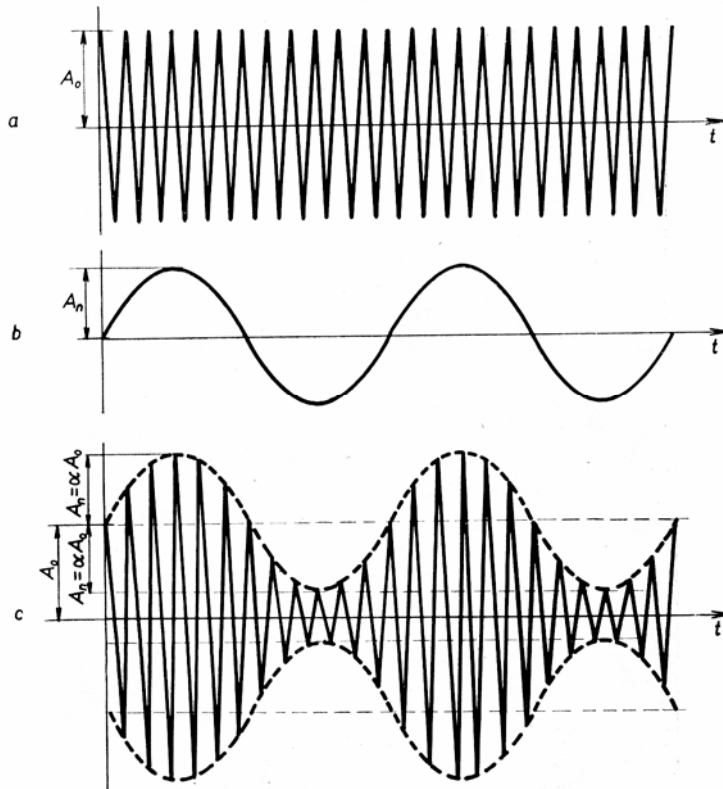
$$E(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{A_n}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t + \varphi] - \frac{A_n}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi]. \quad (8.123)$$

Spektrum této funkce má tři složky o frekvenci ω_0 , $\omega_0 - \Omega$ a $\omega_0 + \Omega$.

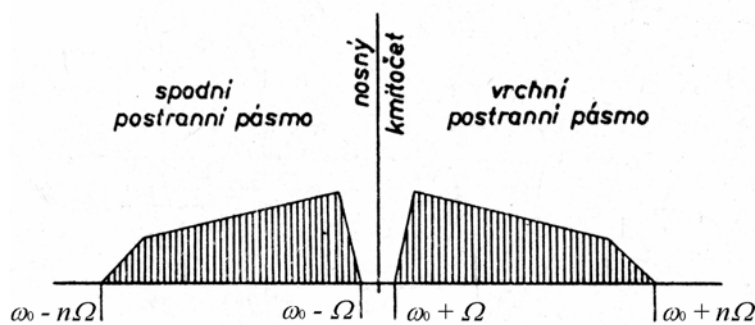
Úhlovou frekvenci ω_0 nazýváme nosnou úhlovou frekvencí a úhlové frekvence $\omega_0 \pm \Omega$ postranními úhlovými frekvencemi.

Jestliže je funkce $f(t)$ periodickou funkcí s periodou $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, potom její spektrum má harmonické složky o úhlových frekvencích $n\Omega$, kde $n = 1, 2, \dots, \infty$. Spektrum modulovaného signálu se skládá ze složek o úhlové frekvenci ω_0 a postranních pásem o úhlových frekvencích $\omega_0 \pm n\Omega$ (obr. 8.9).

Jestliže je funkce $f(t)$ neperiodickou funkcí, je její spektrum spojitě a obě postranní pásma modulovaného signálu jsou spojitá.



Obr. 8.8: Amplitudově modulovaný signál



Obr. 8.9: Spektrum amplitudově modulovaného signálu

8.8.2 Kmitočtová modulace

Při kmitočtové modulaci se mění okamžitý úhlový kmitočet $\omega(t)$ nosného signálu podle vztahu

$$\omega(t) = \omega_0 + k_k f(t), \quad (8.124)$$

kde $f(t)$ je informace o přenášené fyzikální veličině. Protože okamžitý úhlový kmitočet $\omega(t)$ je definován jako derivace fáze $\Phi(t)$ podle času, je ve vztahu (8.120)

$$\Phi(t) = \int \omega(t) dt = \omega_0 t + k_k \int f(t) dt + \varphi, \quad (8.125)$$

kde φ je integrační konstanta.

Intenzita elektrického pole elektromagnetického vlnění má potom v daném bodě prostoru tvar

$$E(t) = E_0 \sin[\omega_0 t + k_k \int f(t) dt + \varphi]. \quad (8.126)$$

Je-li modulační signál $f(t)$ harmonickou funkcí času o úhlové frekvenci Ω , je ve vztahu (8.125) $k_k f(t) = A_n \sin \Omega t$ a vztah (8.126) přechází do tvaru

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t - \frac{A_n}{\Omega} \cos \Omega t + \varphi). \quad (8.127)$$

Veličina A_n/Ω se nazývá modulační index. Spektrum této funkce je tvořeno nekonečným počtem dvojic postranních složek s úhlovými frekvencemi $\omega_0 \pm n\Omega$, $n = 1, 2, \dots$, a amplitudami závislými na modulačním indexu.

8.8.3 Fázová modulace

Při fázové modulaci se mění fáze funkce (8.120) modulačním signálem $f(t)$ podle vztahu

$$\Phi(t) = \omega_0 t + k_f f(t) + \varphi. \quad (8.128)$$

Intenzita elektrického pole má potom tvar

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t + k_f f(t) + \varphi). \quad (8.129)$$

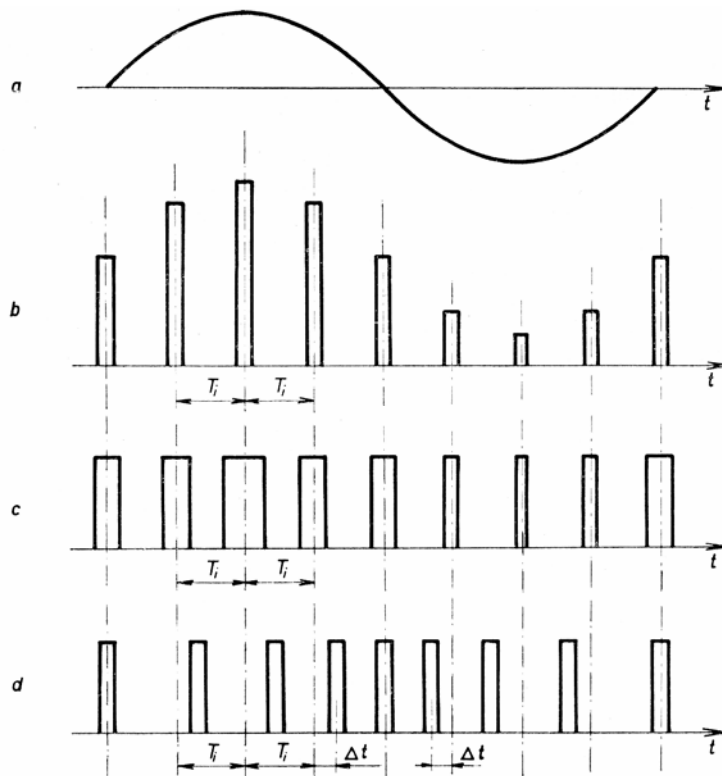
Pro harmonický signál s úhlovou frekvencí Ω je $k_f f(t) = A_n \sin \Omega t$ a potom platí

$$E(t) = E_0 \sin(\omega_0 t + A_n \sin \Omega t + \varphi). \quad (8.130)$$

Spektrum této funkce je podobné jako pro kmitočtově modulované vlnění.

8.8.4 Impulsová modulace

Tento způsob modulace spočívá v tom, že se harmonické elektromagnetické vlnění nevysílá trvale, ale jen ve tvaru impulsů (např. délky řádově μs), mezi nimiž je časový odstup. Tvar a vzájemné rozložení těchto impulsů je možné ovlivnit modulačním signálem a tyto parametry využít jako nositele informace (obr. 8.10). Podle toho, který parametr ovlivňujeme, dostáváme impulsovou modulaci amplitudovou, šířkovou a polohovou.



Obr. 8.10: Impulsově modulovaný signál: a) modulační signál, b) amplitudová, c) šířková, d) polohová modulace

Kontrolní otázky 8.8

1. Z jakého důvodu musíme provádět při přenosu informace pomocí elektromagnetického vlnění modulaci nosného signálu?
2. Jakými parametry je charakterizována amplitudově modulovaná vlna?
3. Která veličina je ovlivňována přenášeným informačním signálem při kmitočtové modulaci?
4. Jaký je vztah mezi kmitočtovou a fázovou modulací?
5. Vysvětlete princip přenosu zpráv pomocí impulsové modulace.

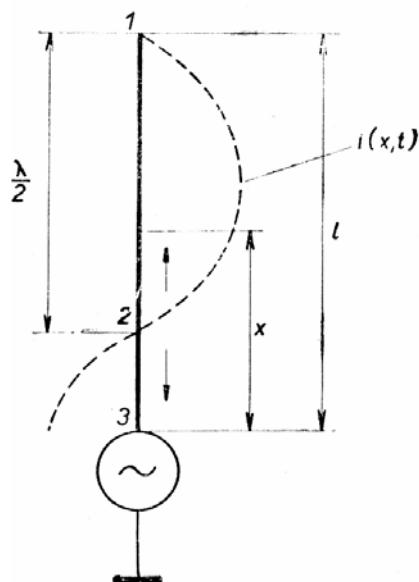


8.9 Vyzařování a příjem elektromagnetického vlnění

Existence elektromagnetických vln v prostoru vyžaduje existenci časově proměnného elektromagnetického pole v tomto prostoru. Aby takovéto pole existovalo, je třeba, podle Maxwellových rovnic, aby se někde v prostoru měnila hustota elektrického náboje ρ nebo hustota elektrického proudu \vec{J} . Tuto část prostoru, ve které dochází k časové změně ρ nebo \vec{J} nebo obou veličin, nazýváme zdrojem elektromagnetického vlnění nebo zářičem elektromagnetické energie. V oblasti vyzařování radiových vln nazýváme takový zdroj vysílací anténou. Anténa představuje vodič nebo soustavu vodičů, v nichž je časově



proměnný elektrický proud. Jakákoliv změna proudu se však šíří podél vodiče konečnou rychlostí v . Je-li kmitočet harmonického proudu $i = I_m \sin \omega t$ napájecího antény $f = \omega / 2\pi$, šíří se změna proudu po vodiči ve tvaru vlny s vlnovou délkou $\lambda_v = v / f$. Je-li vodič na konci naprázdno, vznikne na něm stojaté vlnění proudové vlny, které má na konci proudový uzel, s rozložením amplitudy harmonického proudu $I_m(x)$ podle obr. 8.11.



Obr. 8.11: Rozložení proudu podél antény

8.9.1 Elektromagnetické pole krátké antény

Při vyšetřování vyzařování elektromagnetického vlnění obvykle vycházíme z krátké antény (elementární dipól), jejíž délka $l \ll \lambda_v / 4$. Potom můžeme uvažovat rozložení amplitudy proudu I_m v anténě konstantní a délku antény uvažujeme zanedbatelnou vzhledem ke vzdálenosti bodu, ve kterém vyšetřujeme intenzity elektromagnetického pole \vec{E} a \vec{H} . Rozložení intenzity \vec{E} a magnetické indukce \vec{B} elektromagnetického pole v prostoru, buzeném proudem antény určíme řešením soustavy Maxwellových rovnic pro daný případ. Řešení Maxwellových rovnic v kulových souřadnicích dává pro vzdálenou oblast, pro kterou platí $\lambda / r \ll 1$, kde λ je délka elektromagnetické vlny ve volném prostoru (obr. 8.12)

$$E_r = 0, E_\varphi = 0, H_r = 0, H_\vartheta = 0, \quad (8.131)$$

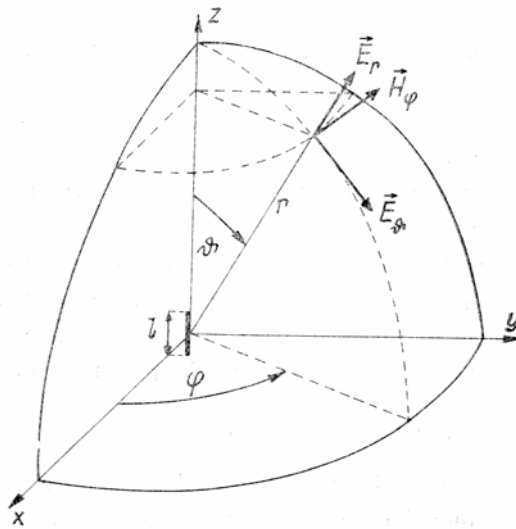
$$E = E_\vartheta = \frac{I_m l}{2r\lambda} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \sin \vartheta, \quad (8.132)$$

$$H = H_\varphi = \frac{I_m l}{2r\lambda} \cos \omega \left(t - \frac{r}{v} \right) \sin \vartheta, \quad (8.133)$$

za předpokladu, že anténa je buzena proudem $i = I_m \sin \omega t$. Tato vzdálená oblast se nazývá oblastí záření a je nejdůležitější oblastí elektromagnetického pole krátké antény. Velikost složek (8.132), (8.133) je přímo úměrná amplitudě proudu I_m a délce l antény a nepřímo úměrná vzdálenosti r a vlnové délce λ . Vektory \vec{E} a \vec{H} jsou navzájem ve fázi, jsou navzájem kolmé a jsou kolmé ke směru šíření vlnění. Poměr jejich velikostí je

$$\frac{E}{H} = \frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}. \quad (8.134)$$

Vzdálené pole je příčné a podobá se poli rovinných vln s tím rozdílem, že se jeho amplituda zmenšuje s $1/r$. V nepříliš velké části prostoru můžeme takovou vlnu pokládat přibližně za rovinnou.



Obr. 8.12: Složky elektromagnetického pole krátké antény

8.9.2 Směrová vyzařovací charakteristika

Velikost intenzit \vec{E} a \vec{H} v daném bodě prostoru ve vzdálenosti r od počátku souřadné soustavy závisí také na úhlu ϑ , který svírá spojnice uvažovaného bodu a počátku souřadnic s osou z . Tato závislost určuje směrovou vyzařovací charakteristiku (diagram záření). Ve směru osy z je $\vartheta = 0$ a $E = 0$, v rovině xy je $\vartheta = \pi/2$ a intenzita elektrického pole je maximální a je rovna E_m .

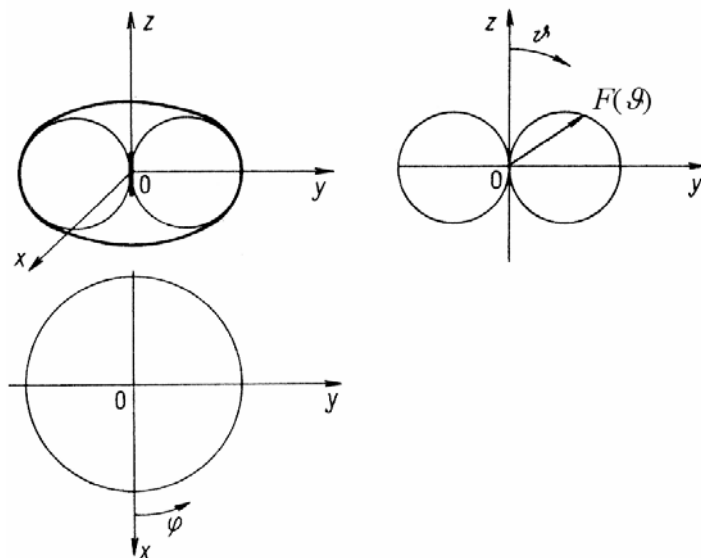
Směrovou vyzařovací charakteristiku definujeme obecně funkcí

$$F(\varphi, \vartheta) = \frac{E}{E_m}, \quad (8.135)$$

kde E je velikost intenzity \vec{E} v daném směru ve vzdálenosti r a E_m je maximální intenzita pro stejnou vzdálenost r . Pro krátkou anténu ve vzdálené oblasti platí podle (8.132)

$$F(\varphi, \vartheta) = \sin \vartheta. \quad (8.136)$$

Směrová vyzářovací charakteristika F představuje rovnici plochy v prostoru kolem antény. Pro praktické využití se používají řezy této plochy s typickými rovinami (např. horizontální a vertikální rovinou). Hodnoty funkce F se obvykle vynášejí v decibelech, $F = 20 \text{ dB} \log \frac{E}{E_m}$. Směrová vyzářovací charakteristika pro krátkou anténu je uvedena na obr. 8.13.



Obr. 8.13: Směrová vyzářovací charakteristika krátké antény

8.9.3 Výkon vyzářený krátkou anténou

Výkon, který krátká anténa vyzáří do okolního prostředí ve formě elektromagnetického vlnění určíme tak, že ve velké vzdálenosti od antény si představíme kulovou plochu o poloměru r se středem ve středu antény, určíme intenzitu vlnění v bodech této kulové plochy a integrací intenzity vlnění po dané kulové ploše určíme časovou střední hodnotu výkonu vyzářovaného anténou.

Protože jsou složky vektorů intenzity elektrického a magnetického pole E_g a H_φ navzájem kolmé, je velikost Poyntingova vektoru podle (8.132) a (8.133)

$$S = E_g H_\varphi = \left(\frac{I_m l}{2r\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin^2 \vartheta \cos^2 \omega \left(t - \frac{r}{v} \right). \quad (8.137)$$

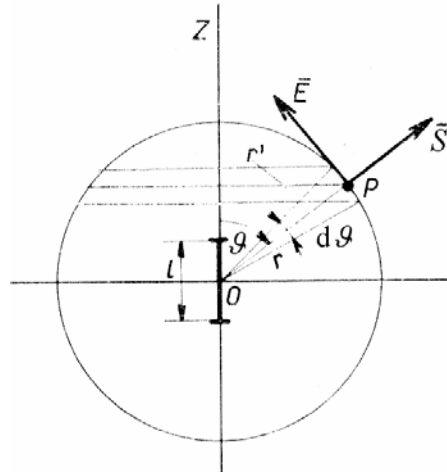
Intenzita vlnění I je podle (8.99) definována jako časová střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru S po dobu periody vlnění T , tedy na základě (8.137) se rovná ve vzdálenosti r

$$I = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} \left(\frac{I_m l}{2r\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin^2 \vartheta. \quad (8.138)$$

Výkon přenášený elektromagnetickou vlnou, který prochází zvolenou kulovou plochou určíme integrací intenzity po kulové ploše.

Protože je intenzita při konstantním r funkcí jenom úhlu ϑ , můžeme zvolit plošný element dS kulové plochy ve tvaru pásu, který obsahuje body s úhly z intervalu $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$, obr. 8.14. Podle obr. 8.14 platí

$$dS = 2\pi r' \cdot r d\vartheta = 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (8.139)$$



Obr. 8.14: Kulová plocha pro určení vyzařovaného výkonu (\vec{S} je Poyntingův vektor)

Elementární výkon vyzářený anténou plochou dS je

$$dP = I dS, \quad (8.140)$$

kde I je intenzita vlnění podle (8.138). Celkový výkon P vyzářený anténou do celého prostoru je

$$P = \int_0^\pi \frac{1}{2} \left(\frac{I_m l}{2r\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \sin^2 \vartheta \cdot 2\pi r^2 \sin \vartheta d\vartheta. \quad (8.141)$$

Protože $\int_0^\pi \sin^3 \vartheta = \frac{4}{3}$, bude

$$P = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} I^2 = R_a I^2, \quad (8.142)$$

kde $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ je efektivní hodnota harmonického proudu napájecího antény, R_a

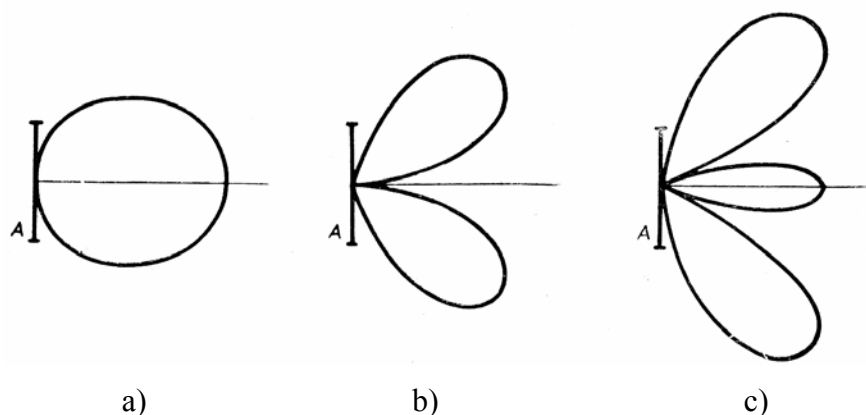
je vyzařovací odpor antény. Podle (8.68) je pro vakuum $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 377 \Omega$, potom

$$R_a = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2 = 790 \Omega \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2. \quad (8.143)$$

Ze vztahu (8.143) vyplývá, že vyzařovací odpor antény a tím i vyzařovaný výkon antény při konstantní efektivní hodnotě proudu I je větší pro větší hodnoty poměru $\frac{l}{\lambda}$.

8.9.4 Dlouhá anténa

Dlouhou anténou nazýváme lineární anténu, jejíž délka je srovnatelná nebo delší, než je vlnová délka proudového rozložení na anténě. V tomto případě je rozložení velikosti proudu podél antény v konstantním časovém okamžiku nerovnoměrné (viz obr. 8.11). Tuto anténu můžeme rozložit na řadu krátkých úseků, z nichž každý můžeme považovat za krátkou anténu s příslušnou hodnotou protékajícího proudu. Intenzity elektromagnetického pole \vec{E} a \vec{H} v oblasti záření jsou potom dány vektorovým součtem intenzit, které jsou vyvolány jednotlivými úseky "krátkých antén". Vyzařování je sice symetrické kolem osy antény, ale v rovinách procházejících osou antény je nesymetrické. Objevují se zde jednak směry, v nichž dochází ke skládání vlnění ve fázi z jednotlivých úseků antény, ale také směry, kde se příspěvky jednotlivých úseků vzájemně ruší. Příklad směrového vyzařovacího diagramu celovlnné svislé antény je uveden na obr. 8.15.



Obr. 8.15: Směrový vyzařovací diagram antény: a) půlvlnná, b) celovlnná, c) $3/2 \lambda$

Celkový vyzářený výkon dlouhou anténou můžeme určit ze vztahu (8.142), dosadíme-li za délku antény l , tzv. efektivní délku antény.

Chceme-li vyzářený výkon soustředit do určitého směru v prostoru, použijeme směrovou anténu.

Směrovou anténou nazýváme obecně takové uspořádání jednoho nebo více činných anténních vodičů, kdy anténa jako celek nevyzařuje do všech směrů v prostoru, ale záření se soustřeďuje do poměrně úzkého svazku paprsků. Těchto antén se používá zvláště tehdy, jedná-li se o spojení mezi dvěma body v prostoru nebo je třeba pokrýt elektromagnetickou energií jen určitou oblast. Směrovosti antény se dosáhne např. použitím většího počtu lineárních antén (anténní soustavy), které jsou buď všechny napájeny proudy stejné nebo různé amplitudy a fáze, nebo jsou napájeny jen některé z nich a ostatní působí jako

reflektory nebo direktory. Vhodnou volbou počtu, umístění a napájení dílčích antén dosáhneme různých směrových účinků soustavy.

8.9.5 Přijímací antény

Přijímací anténa má za úkol přeměnit elektromagnetické vlnění dopadající na anténu na proudy ve vodičích antény a jejich energii s určitou účinností předat přímo nebo prostřednictvím napájecího vedení přijímači. V principu by každá vysílací anténa mohla působit i jako přijímací. Přesto je mezi oběma druhy antén řada rozdílů.

(1) Elektromagnetická energie je přiváděna u přijímacích antén podél celého anténního vodiče.

(2) Přijímací antény v oblasti DV, SV a KV mají pracovat zpravidla v širším kmitočtovém rozsahu, než antény vysílací.

(3) Přijímací antény pro decimetrové a centimetrové vlny mohou být totožné s anténami vysílacími. Rozdíl mezi nimi bývá zpravidla způsoben velkým rozdílem mezi přijímaným a vysílaným výkonem.

(4) Důležitými parametry přijímacích antén jsou jejich směrové účinky, velikost odevzdaného výkonu přijímači a impedance antény.

(5) Směrové vlastnosti přijímacích antén se využívají pro různé účely. Např. v radiolokaci a navigaci slouží k určení směru cíle. Dále se směrových vlastností využívá ke zmenšení příjmu rušících signálů přicházejících z jiných směrů než užitečný signál (rušení jinými vysílači, rušení odraženým televizním signálem, průmyslovými zdroji atd.).

(6) V rozhlasovém pásmu DV, SV a KV se používají svislé tyčové nebo krátké drátové antény, které nejsou na přijímanou vlnovou délku přesně nastaveny, jsou mnohem kratší než je přijímaná vlnová délka a přijímají bez výrazného směrového účinku. V rozhlasovém pásmu VKV a v pásmech TV se používá "laděných antén", jejichž rozměry jsou v určitém vztahu k vlnové délce přijímaného signálu. Tyto antény mají směrový účinek, velikost napětí v anténě způsobeného dopadající elektromagnetickou vlnou závisí na její poloze vzhledem k vysílači. Laděné antény používají jako základní prvek dipól.

(7) Na hodnotu napětí vzniklého v přijímací anténě má vliv polarizace elektromagnetické vlny. Je-li vysílací anténou dipól, leží magnetické indukční čáry v rovinách kolmých k dipólu, kdežto elektrické siločáry probíhají v rovinách vysílacího dipólu. Dipól přijímací antény musí být orientován stejně jako dipól vysílací antény, tedy při vodorovné polarizaci elektromagnetického vlnění vodorovně a při svislé polarizaci svisle.

Dipól orientovaný kolmo k elektrickým siločarám nepřijímá signál. Této skutečnosti se využívá v I. až III. TV pásmu k odstranění vzájemného rušení dvou blízkých vysílačů, pracujících na stejném kmitočtu a s různou polarizací elektromagnetického vlnění. Vlivem odrazů dochází ve vzdálenějších oblastech k depolarizaci elektromagnetické vlny, což se projevuje výrazně ve IV. a V. TV pásmu. Zde se svislé polarizace proto nepoužívá.

Kontrolní otázky 8.9

1. *Jaké vlastnosti musí mít zdroj elektromagnetického vlnění?*
2. *Jaká je obecná charakteristika antény?*
3. *Jaké je rozložení proudu v anténě?*
4. *Uveďte vlastnosti krátké antény.*
5. *Jaké kritérium platí pro blízkou a vzdálenou oblast?*
6. *Jaký je vztah vektoru \vec{E} a \vec{H} ve vzdálené oblasti?*
7. *Jakou informaci dává vyzářovací diagram?*
8. *Jaký tvar má směrová vyzářovací charakteristika pro krátkou anténu?*
9. *Které parametry antény ovlivňují vyzářovaný výkon antény?*
10. *Charakterizujte dlouhou anténu.*
11. *Jakou funkci plní směrová anténa?*
12. *Jak se dosahuje směrovosti antény?*
13. *Jaký úkol plní přijímací anténa?*
14. *Uveďte základní rozdíly mezi přijímací a vysílací anténou?*
15. *Uveďte příklady využití směrových antén.*
16. *Jaký vliv na příjem elektromagnetického vlnění má polarizace vlnění?*
17. *Vysvětlete pojem depolarizace vlnění.*

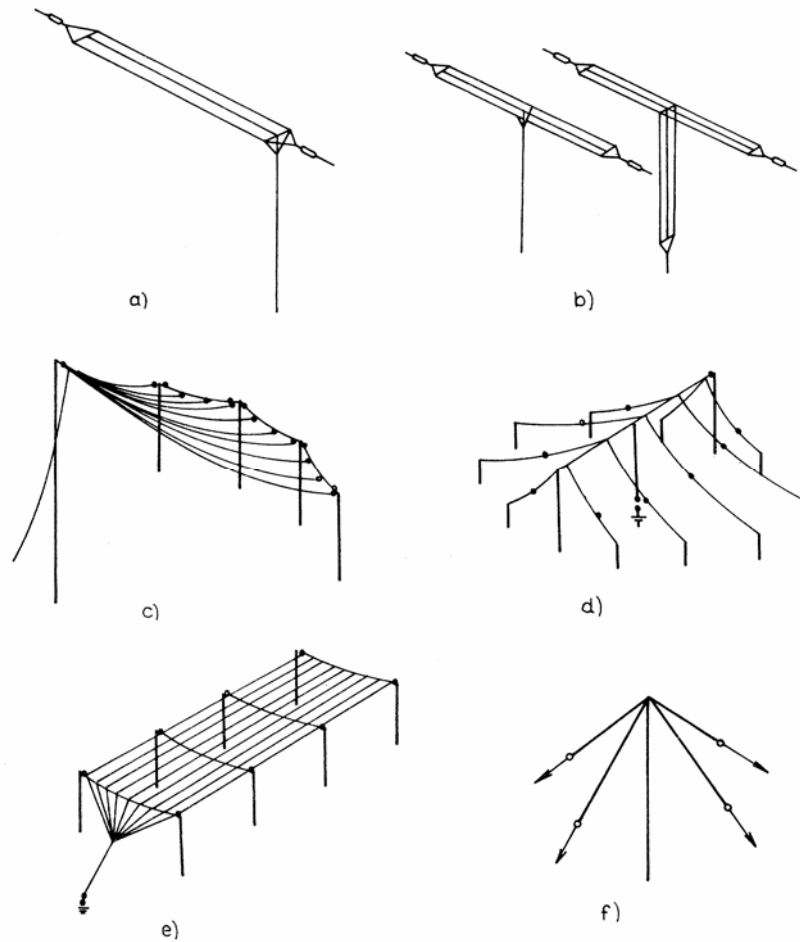
8.10 Základní typy antén

Antény můžeme rozdělit podle různých hledisek.

- (1) Podle kmitočtu, na němž pracují - dlouhovlnné, středovlnné, krátkovlnné, antény pro decimetrové a centimetrové vlny a další.
- (2) Podle účelu - rozhlasové, televizní, radiolokační, zaměřovací, letadlové a další.
- (3) Podle konstrukčního principu - lineární, smyčkové, šroubovicové, trychtýřové, parabolické a další.

Uvedeme základní typy antén.

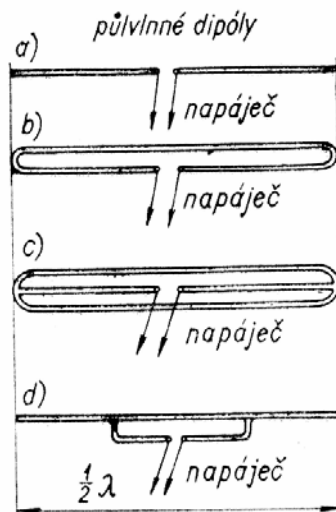
1. **Anténa dlouhovlnná** je určena pro kmitočtové pásmo (10 – 300) kHz, které odpovídá velmi dlouhým a dlouhým vlnám. Tyto antény mají malou účinnost. Antény se používají ve sdělovacích soustavách a zaměřovacích soustavách pro dálkové námořní a letecké spoje. Při použití velmi dlouhých vln lze dosáhnout spojení i pod mořskou hladinou. Příklad dlouhovlnných antén je uveden na obr. 8.16.



Obr. 8.16: Dlouhovlnné antény

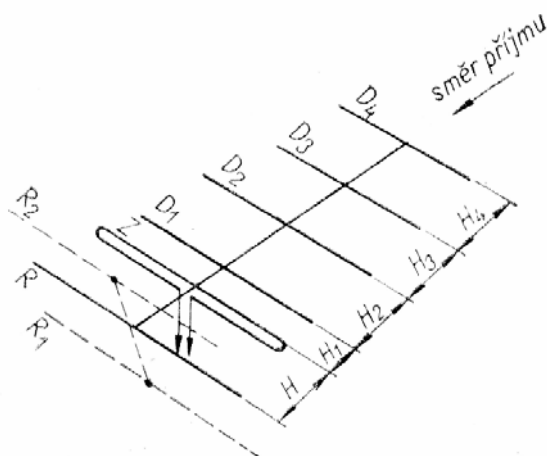
2. **Anténa středovlnná** (pro pásmo 300 kHz až 3 MHz). Zpravidla se jí rozumí vysílací anténa rozhlasová v pásmu SV. Tvoří ji např. vertikální samonosná ocelová věž o výšce $\lambda/4$ nebo větší, stabilizovaná bočními vypínacími lany. Od země je izolována patním izolátorem. Jiným typem je anténa tvořená vodorovným vodičem.

3. **Anténa krátkovlnná** (pro pásmo (3 – 30) MHz). Slouží pro radiové spoje s využitím odrazu elektromagnetických vln od ionosféry (vrstva atmosféry). Její rozměry mohou být srovnatelné s délkou vlny. Základním typem je půlvlnný dipól (obr. 8.17).

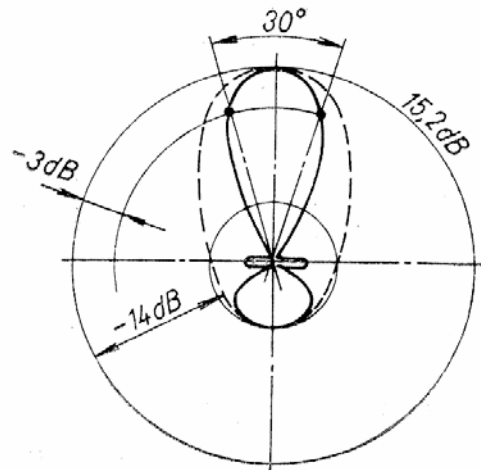


Obr. 8.17: Půlvlnný dipól

4. **Anténa pro velmi krátké vlny** (pro pásmo (30 – 300) MHz). Používá se pro radiové spojení na krátké vzdálenosti (pozemní spoje, letecké spoje, televize, FM rozhlas). Využívá se šíření elektromagnetických vln na přímou viditelnost. Jako všesměrová anténa se používá dipólová anténa. Pro směrové účely se používá nejčastěji tzv. Yagiho anténa (obr. 8.18). Základem této antény je zářič Z ve tvaru půlvlnného dipólu (aktivní prvek – např. skládaný dipól). K dipólu, k němuž je připojen napáječ, je dozadu, ve směru příjmu, umístěn v přesné vzdálenosti jeden nebo více reflektorů R , poněkud delších než zářič. Ve směru příjmu před zářičem jsou umístěny direktory D , jejichž délka se postupně zkracuje. Směrovost antény závisí na počtu direktorů, jejich vzájemné rozteči a délce. S rostoucím počtem direktorů se směrovost zvětšuje. Vodorovný řez směrovým diagramem je uveden na obr. 8.19. Anténa má výstupní impedanci 300Ω . Použije-li se jako napáječ souosý kabel o vlnové impedanci 75Ω , je nutné provést symetrizaci napáječe (přízpusobení). Jinak by bylo nutné jako napáječ použít dvojlinku o impedanci 300Ω .



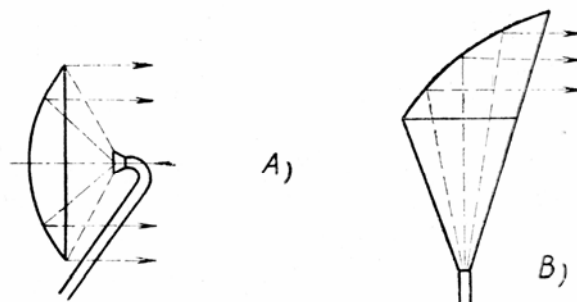
Obr. 8.18: Anténa typu Yagi



Obr. 8.19: Vodorovný řez směrové vyzařovací charakteristiky antény typu Yagi

5. **Anténa pro decimetrové vlny** (pro kmitočtové pásmo (300 – 3000) MHz). Zahrnuje všechny typy antén pro velmi krátké vlny a antény využívající některých principů antén pro centimetrové vlny, jako jsou např. anténa parabolická nebo trychtýřová.

6. **Antény pro centimetrové vlny** (pro kmitočtové pásmo (3 – 30) GHz). Malá vlnová délka elektromagnetického vlnění dovoluje vytvořit antény, jejichž rozměry jsou mnohokrát větší než vlnová délka. To umožňuje vytvořit úhlově užší směrové vyzařovací charakteristiky. Anténa má tedy dvě funkce, jednak převádí energii vysokofrekvenčních proudů přiváděných z vysílače na energii elektromagnetického záření a jednak vytváří určitý směrový diagram záření. Typickým příkladem je **parabolická anténa** (obr. 8.20), kdy primární zářič (trychtýř, dipól) plní funkci ozařovače a parabolický reflektor určuje směrové účinky antény.

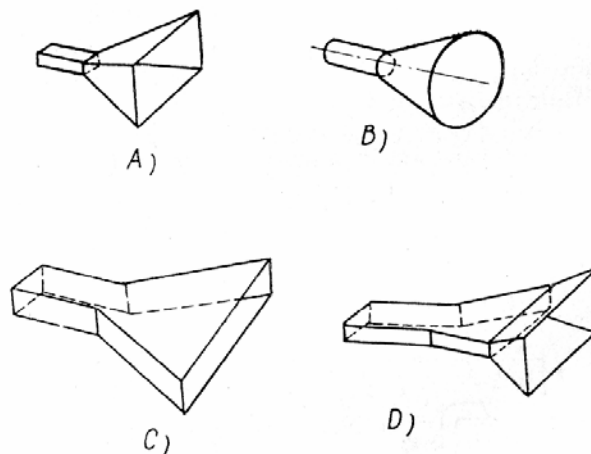


Obr. 8.20: Parabolická anténa

Parabolické antény se používají zejména pro směrové spoje na centimetrových vlnách a při radiolokaci. Použije-li se odrazná kovová plocha, vložená do cesty svazku elektromagnetického vlnění z parabolické antény, lze svazek odklonit

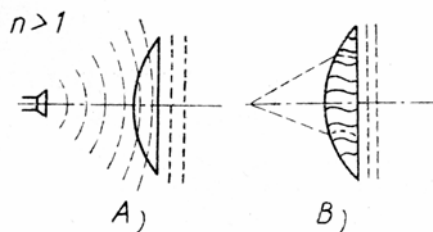
z původního směru. Tohoto principu využívají periskopické antény pro spojení na centimetrových vlnách v horském terénu.

Anténa trychtýřová vznikne rozšířením konce dutého vlnovodu do tvaru nálevky (obr. 8.21). Směrnost, impedance a tvar diagramu záření závisí na rozměrech nálevky.



Obr. 8.21: Trychtýřová anténa

Dalším typem antén pro centimetrové vlny (též pro dm a mm vlny) je **čočková anténa** (elektromagnetická čočka). Skládá se z ozařovače, jenž vytváří elektromagnetické vlnění s kulovou nebo válcovou vlnoplochou. Toto vlnění převádí anténní čočka (např. z dielektrika) ve vlnění rovinné (obr. 8.22). Anténní čočky se používají zejména v radiolokaci.

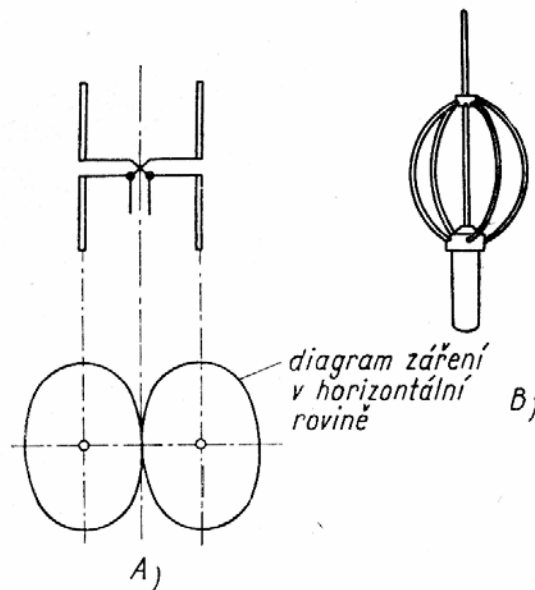


Obr. 8.22: Čočková anténa

7. Další typy antén. **Výsuvná anténa** (teleskopická) je tyčová anténa, skládající se z několika navzájem zasouvacích dílů. Používá se u přenosných přijímačů a mobilních radiových stanic menšího výkonu.

Smyčková anténa je tvořena cívkou s jedním nebo několika závity. Je schopna vyvolat nebo přijímat magnetickou složku elektromagnetického pole (kolmou k rovině smyčky). V radiových přijímačích se používá feritová anténa (cívka je navinutá na feritovou tyč).

Zaměřovací anténa slouží pro radiové zaměřovače zdrojů elektromagnetického vlnění. Může se zaměřovat na maximum přijímané elektromagnetické energie nebo na minimum (obr. 8.23).



Obr. 8.23: Příklad zaměřovací antény, A) směrová vyzářovací charakteristika v horizontální rovině, B) konstrukční uspořádání

Kontrolní otázky 8.10

1. Jak se rozdělují antény podle kmitočtu?
2. Uveďte základní charakteristiky dlouhovlnných antén.
3. Uveďte základní charakteristiky středovlnných antén.
4. Uveďte základní charakteristiky krátkovlnných antén.
5. Uveďte základní charakteristiky antén pro velmi krátké vlny.
6. Popište antény pro centimetrové vlny.
7. Jak rozdělujeme antény podle konstrukčního principu?



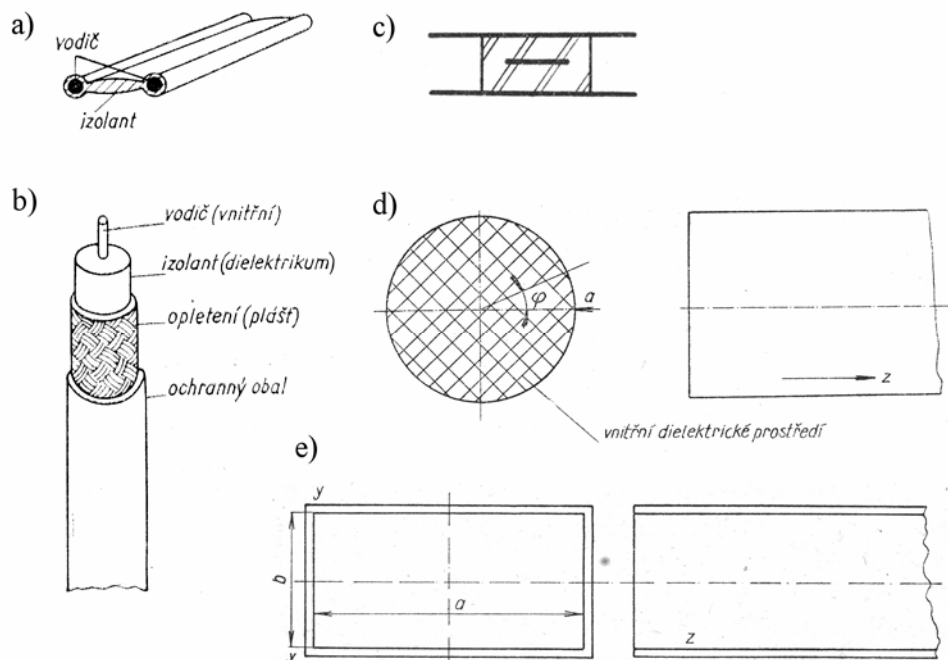
8.11 Šíření elektromagnetického vlnění

Elektromagnetická energie se může přenášet mezi zdrojem a spotřebičem buďto volným prostorem, potom musí být zdroj a spotřebič opatřeny anténami, nebo vedením. Vysokofrekvenční energii lze přenášet vlněním tří vidů: příčným elektrickým a magnetickým (TEM), příčným elektrickým (TE) a příčným magnetickým (TM).



8.11.1 Vedení elektromagnetické vlny

Vedené elektromagnetické vlny se šíří podél vodičů nebo dielektrik. Nejčastěji používaná vedení jsou a) dvouvodičové vedení, b) souosé vedení, c) páskové vedení, d) dielektrický vlnovod, e) kovový vlnovod (obr. 8.24).



Obr. 8.24: Příklady vedení elektromagnetických vln: a) dvouvodičové vedení, b) koaxiální vedení, c) páskové vedení, d) dielektrický vlnovod, e) kovový vlnovod

Charakteristickými veličinami vysokofrekvenčního vedení jsou vlnová impedance Z_0 , činitel útlumu pro daný kmitočet a výkonová zatížitelnost.

8.11.1.1 Dvouvodičové vedení

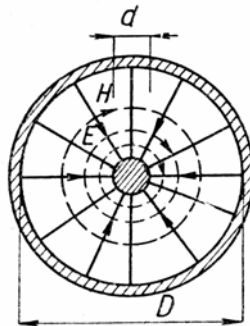
Dvouvodičové nebo vícevodičové vedení se používá k přenosu ustálených stejnosměrných proudů a k přenosu střídavých proudů do kmitočtu stovek MHz. Je tvořeno dvěma rovnoběžnými vodiči, mezi nimiž je vzduchové nebo jiné dielektrikum. Elektromagnetické vlnění se vede v okolí vodičů. V oblasti vysokých kmitočtů nelze vedení použít, neboť na koncích a v ohybech by vznikly velké ztráty vyzařováním energie do okolního prostoru. Základním parametrem je vlnová impedance Z_0 , která je pro vedení s malými ztrátami dána vztahem

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad (8.144)$$

kde L a C je indukčnost a kapacita vedení na jednotku délky. Je-li použito mezi vodiči dielektrikum, je $\epsilon_r > 1$, ve vztahu (8.144) se ϵ_r -krát zvětší kapacita při stejné vzdálenosti mezi vodiči a vlnová impedance se zmenší. Např. pro anténní napáječe se u nás používá dvojlinka o $Z_0 = 300 \Omega$. Z_0 je však značně závislé na vzdálenosti nestíněné dvojlinky od vodivých nebo jiných těles.

8.11.1.2 Souosý (koaxiální) kabel

Je tvořen vnitřním vodičem a vnějším vodičem (pláštěm) ve tvaru válcové plochy. Elektromagnetické pole je soustředěno uvnitř mezi oběma vodiči. Vnitřní vodič je pomocí izolantu držen přesně v ose vnějšího vodiče. Rozložení elektrického a magnetického pole je uvedeno na obr. 8.25. Přenos elektromagnetické energie se děje ve směru osy kabelu prostřednictvím příčného vlnění TEM. V praxi se používají kabely s vlnovou impedancí $Z_0 = 75 \Omega, 60 \Omega, 50 \Omega$. Souosé kabely se používají až do frekvencí řádově GHz, na cm vlnách se používají zpravidla jen pro kratší spoje.



Obr. 8.25: Rozložení elektrického a magnetického pole uvnitř souosého kabelu

8.11.1.3 Vlnovody

V užším smyslu se vlnovodem rozumí kovová trubka kruhového nebo obdélníkového průřezu příčného rozměru srovnatelného s délkou vlny, kterou se šíří vlnění ve směru osy v důsledku odrazu elektromagnetického vlnění od vnitřní stěny vlnovodu. Vnitřní povrch vodiče odráží tím lépe, čím má vodič vyšší vodivost. Vlnovody se používají k přenášení elektromagnetické energie v oblasti cm a mm vln. Budícím zdrojem elektromagnetického vlnění ve vlnovodu je buďto dipól, nebo smyčka napájená ze zdroje vysokofrekvenční energie.

Jestliže je vysokofrekvenční vedení na konci zatíženo impedancí rovnou vlnové impedanci $\hat{Z}_k = \hat{Z}_0$, vznikne na vedení postupné vlnění a dochází k přenosu elektromagnetické energie od zdroje k zátěži, obr. 8.26.



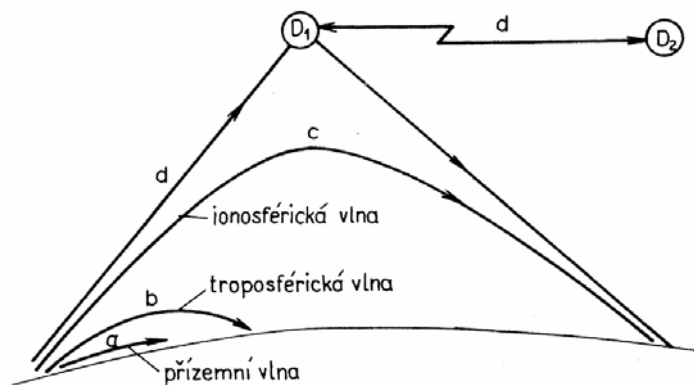
Obr. 8.26: Homogenní vedení zakončené obecnou impedancí

Je-li konec vedení naprázdno nebo nakrátko ($Z_k = \infty$ nebo $Z_k = 0$), dochází na konci k odrazu elektromagnetického vlnění, na vedení vzniká úplné stojaté vlnění a nedochází k přenosu energie. Je-li délka vedení $\lambda/4$ (nebo lichý násobek $\lambda/4$) a vedení je na konci nakrátko, vznikne na vedení proudová vlna s uzlem na počátku a vstupní impedance vedení je ∞ . U vedení na konci naprázdno je vstupní impedance v tomto případě nulová.

Je-li vedení zatíženo obecnou impedancí, vznikne na vedení částečné stojaté vlnění s určitým poměrem stojatých vln.

8.11.2 Šíření elektromagnetického vlnění v okolí Země

Na šíření elektromagnetického vlnění v prostoru kolem Země má vliv jednak povrch Země, jednak složení jednotlivých vrstev atmosféry, jednak kmitočet daného vlnění nebo jeho spektrální složení (pokud se jedná o vlnění neharmonické). Pokud sledujeme toto šíření s ohledem na přenos informace, můžeme charakterizovat vlnění mezi vysílačem a přijímačem obecně jako vlnu přímou (přímé spojení mezi vysílačem a přijímačem na přímou viditelnost), vlnu odraženou od nějakého tělesa, vlnu přízemní (šíří se ohybem podél země), vlnu troposférickou (vlnění, které se v troposféře láme a odráží se zpět na Zemi) a vlnu ionosférickou (vlnění se láme a odráží v ionosféře). Troposférické a ionosférické vlnění se s ohledem na přijímač na povrchu Země nazývá prostorovou vlnou. Které z těchto vlnění se využije pro přenos informace závisí na vlnové délce elektromagnetického vlnění a na poloze vysílače a přijímače. Tak se může uskutečnit spojení Země - Země, Země - kosmos, kosmos - kosmos (např. mezi družicemi), obr. 8.27.



Obr. 8.27: Šíření elektromagnetických vln při různých druzích spojů (a – přízemní vlna, b – troposférická vlna, c – ionosférická vlna, d – vlna přímá)

8.11.2.1 Vliv povrchu Země na šíření elektromagnetického vlnění

Povrch Země může ovlivňovat přízemní nebo dopadající vlnu jednak svými nerovnostmi, které posuzujeme poměrem nerovnosti k vlnové délce vlnění, jednak svými elektrickými vlastnostmi.

Největší část zemského povrchu je pokryta vodou. Z hlediska elektrických vlastností musíme rozlišovat mořskou vodu, která má podstatně větší elektric-

kou vodivost než voda sladká. Souš pak dělíme z hlediska elektrické vodivosti na vlhkou zemi (pole, louky, lesy, porosty) a suchou zemi (pouště a skalnaté hory). Kdyby byl povrch Země dokonale vodivý, potom by se elektromagnetické vlny od něho dokonale odrážely. Ve skutečnosti v důsledku konečné vodivosti se část energie elektromagnetických vln pohlcuje. Toto pohlcování roste rychle s rostoucím kmitočtem vlnění. Proto se jako povrchové vlny uplatňují hlavně radiové dlouhé vlny, které se šíří až do vzdálenosti 3000 km od vysílače.

8.11.2.2 Vliv složení atmosféry na šíření elektromagnetického vlnění

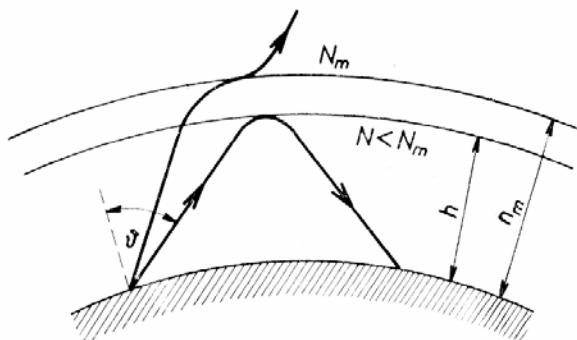
Atmosféru dělíme na troposféru (výška nad povrchem Země 0 až 11 km), stratosféru (11 až 60 km), ionosféru (60 až 600 km) a exosféru (nad 600 km). Složení suchého vzduchu zemského povrchu je dáno plyny N_2 , O_2 , Ar, CO_2 , Ne, He, H_2 . Do výšek asi 100 km má atmosféra totéž složení jako u zemského povrchu a je promíchána prouděním vzduchu. Na základě měření bylo zjištěno, že koncentrace plynů atmosféry sahá až do vzdálenosti 2 až 3 zemských poloměrů.

Ultrafialové záření vyvolává ionizaci plynů atmosféry, jejímž výsledkem je vznik vrstvy kladných iontů a volných elektronů. Hlavním zdrojem ionizujícího záření je Slunce. Důležitým zdrojem ionizace může být také záření hvězd. Dalším zdrojem jsou např. kosmické paprsky, proudy meteorů a elektrostatické pole bouřkových mraků. Na ionizovatelnost atmosféry má také vliv teplota, tlak a chemické a fyzikální složení atmosféry. Současně s ionizací však probíhá rekombinace elektronů s kladnými ionty. Výsledkem je určitá elektronová koncentrace v atmosféře, která závisí na intenzitě ionizujícího záření.

Poněvadž hustota vzduchu v atmosféře s výškou klesá a intenzita ionizujícího záření roste, dosahuje intenzita ionizace (počet volných elektronů vznikajících v jednotce objemu za sekundu) maxima v oblasti výšek mezi 60 km až 250 km. Tato vrstva atmosféry se nazývá ionosféra.

Ionosféra se skládá ze čtyř základních vrstev: D, E, F_1 , F_2 . Čím je vrstva výše, tím více je ionizována. Každá vrstva má maximální koncentraci iontů N uprostřed. Vrstva D je ve výšce asi 60 až 80 km, existuje jen ve dne, po západu Slunce zaniká. Vrstva E má maximum ve výšce asi 90 km, vrstva F_1 asi 150 km a vrstva F_2 má maximum ve výšce asi 230 km. Po západu Slunce vymizí vrstvy D a F_1 , elektronová koncentrace vrstev E a F_2 se sice zmenší, ale zachová se po celou noc.

Permitivita ionizovaného plynu klesá s rostoucí ionizací a tedy také klesá s rostoucí výškou. V důsledku toho nastává v ionosféře spojitý lom elektromagnetického vlnění a může dojít i k odrazu elektromagnetického vlnění od ionosférické vrstvy, obr. 8.28.



Obr. 8.28: Lom a odraz elektromagnetických vln vyzářených anténou do oblasti ionosféry

Aby se elektromagnetická vlna odrazila od ionizovaných vrstev zpět k povrchu Země, nesmí kmitočet vlnění překročit určitou hodnotu, která je přímo úměrná odmocnině elektronové koncentrace ve vrstvě v místech největší koncentrace elektronů a která klesá s klesajícím úhlem ϑ . Existuje kritická hodnota kmitočtu vlnění, při kterém se ještě vlnění vyzařované kolmo vzhůru ($\vartheta = 0$) odrazí zpět (ve dne kolem 10 MHz). Kromě lomu a odrazu dochází v ionosféře také k absorpci elektromagnetických vln, která je tím větší, čím delší je vlnová délka.

Kontrolní otázky 8.11



1. Uveďte příklady vedené elektromagnetické vlny.
2. Jaké jsou základní rysy elektromagnetické vlny vedené vlnovodem?
3. Jaká je charakteristika šíření elektromagnetické vlny v okolí Země?
4. Jaký vliv má povrch Země na šíření elektromagnetických vln?
5. Jak ovlivňuje ionosféra šíření elektromagnetických vln?
6. Proč je spojení na krátkých vlnách vhodnější v noci?

8.12 Autotest



1. Kterými veličinami popisujeme elektromagnetické pole?
2. Jaký význam pro praxi mají Maxwellovy rovnice?
3. Vysvětlete pojem homogenní, izotropní, nevodivé a nemagnetické prostředí.
4. Jaká je souvislost mezi světlem a elektromagnetickým vlněním?
5. Uveďte základní charakteristiky rovinné elektromagnetické vlny?
6. Které veličiny ovlivňují energii harmonické elektromagnetické vlny?
7. Jaká je vzájemná poloha vektorů \vec{E} a \vec{H} pro rovinnou vlnu?
8. Z jakého důvodu musíme provádět při přenosu informace pomocí elektromagnetického vlnění modulaci nosného signálu?

9. Jaký je vztah mezi kmitočtovou a fázovou modulací?
10. Jaké vlastnosti musí mít zdroj elektromagnetického vlnění?
11. Jakou informaci dává vyzařovací diagram?
12. Které parametry antény ovlivňují vyzařovaný výkon antény?
13. Uveďte příklady využití směrových antén.
14. Jak se rozdělují antény podle kmitočtu?
15. Uveďte základní charakteristiky antén pro velmi krátké vlny.
16. Uveďte příklady vedené elektromagnetické vlny.

8.13 Klíč k autotestu 8.12

1. Vektory intenzity elektrického pole \vec{E} , elektrické indukce \vec{D} , intenzity magnetického pole \vec{H} a magnetické indukce \vec{B} jako funkcemi času.
2. Maxwellovy rovnice slouží k určení vektorů intenzity elektrického pole \vec{E} , elektrické indukce \vec{D} , intenzity magnetického pole \vec{H} a magnetické indukce \vec{B} při zadaných zdrojích a okrajových a počátečních podmínkách.
3. Platí pro ně $\rho = 0$, $\gamma = 0$, $\mu_r \approx 1$. Ve všech směrech a ve všech bodech má stejné vlastnosti.
4. Světlo je elektromagnetické vlnění v rozsahu vlnových délek 0,38 μm až 0,76 μm .
5. Vektory pole jsou funkcemi pouze souřadnice x a času t a jsou vzájemně kolmé. Složky E_x a H_x jsou nulové.
6. Velikost amplitudy složek vektoru \vec{E} a odmocnina z podílu ε a μ .
7. Jsou navzájem kolmé.
8. Vyzařovací účinnost vysílací antény je úměrná kvadrátu podílu její délky a vlnové délky vyzařovaného vlnění. Proto musíme nízkofrekvenční signály přenášet pomocí vysokofrekvenčního nosného signálu, pro který je vlnová délka srovnatelná s realizovatelnou délkou antény.
9. Při kmitočtové modulaci mění modulační signál okamžitý úhlový kmitočet. Při fázové modulaci se mění fáze nosného signálu. Fáze je dána časovým integrálem okamžitého úhlového kmitočtu.
10. Musí v něm docházet k časové změně hustoty elektrického náboje nebo hustoty proudu.
11. Udává závislost intenzity E nebo intenzity vlnění I na směrových úhlech ϑ a φ v kulových souřadnicích.
12. Efektivní hodnota proudu v anténě a poměr délky antény a vlnové délky vyzařovaného vlnění.
13. Využívají se pro spojení mezi dvěma body v prostoru nebo je-li potřeba pokrýt elektromagnetickou energií jen určitou část prostoru. V radiolokaci



se používají pro určení směru cíle. Další využití je pro zmenšení přijímaného rušivého signálu z určitého směru.

14. Podle kmitočtu se antény rozdělují na dlouhovlnné, středovlnné, krátkovlnné, antény pro decimetrové vlny, antény pro centimetrové vlny a další.
15. Používají se pro spojení na krátké vzdálenosti: jako všesměrová se používá dipólová, jako směrová Yagiho anténa. Využívají se také další prvky pro zlepšení příjmu nebo vyzařování dipólu, zejména reflektory a direktory.
16. Vedení elektromagnetické vlny dvouvodičovým vedením, souosým vedením, páskovým vedením, dielektrickým vlnovodem a kovovým vlnovodem.

8.14 Korespondenční úkoly



1. Vysvětlete jev šíření elektromagnetického vlnění.
2. Jaký význam má první Maxwellova rovnice?
3. Jaký vztah má druhá Maxwellova rovnice k Faradayovu zákonu elektromagnetické indukce?
4. V čem vidíte podobu mezi třetí a čtvrtou Maxwellovou rovnicí a kde je naopak rozdíl?
5. Jaký vztah mají permitivita a permeabilita prostředí k rychlosti šíření světla?
6. Podle jakých kritérií rozdělujeme elektromagnetické vlnění?
7. Definujte intenzitu elektromagnetického vlnění.
8. Jaký význam má Poyntingův vektor?
9. Za jakých podmínek vzniká stojaté elektromagnetické vlnění?
10. Vysvětlete princip přenosu zpráv pomocí impulsové modulace.
11. Jaká je obecná charakteristika antény?
12. Jaký je vztah vektoru \vec{E} a \vec{H} ve vzdálené oblasti?
13. Jaký tvar má směrová vyzařovací charakteristika pro krátkou anténu?
14. Jaký úkol plní přijímací anténa?
15. Jak rozdělujeme antény podle konstrukčního principu?
16. Jaká je charakteristika šíření elektromagnetické vlny v okolí Země?
17. Jak ovlivňuje ionosféra šíření elektromagnetických vln?

8.15 Závěr



V prostoru, ve kterém se nacházejí elektrické náboje existuje elektromagnetické pole. Jeho vlastnosti jsou závislé na rozložení těchto nábojů v prostoru a v čase.

Maxwellovy rovnice vyjadřují vztahy mezi vektory \vec{E} , \vec{D} , \vec{H} , \vec{B} a zdroji elektromagnetického pole.

Úplnou soustavu Maxwellových rovnic tvoří čtyři rovnice hlavní a čtyři rovnice vedlejší.

První Maxwellova rovnice v diferenciálním tvaru vychází ze zákona celkového proudu, který je jejím integrálním tvarem.

Druhá Maxwellova rovnice v integrálním tvaru vyjadřuje Faradayův zákon elektromagnetické indukce.

Třetí Maxwellova rovnice v integrálním tvaru vychází z Gaussovy věty elektrostatiky.

Čtvrtá Maxwellova rovnice v integrálním tvaru vyjadřuje princip kontinuity magnetického indukčního toku nebo také skutečnost, že magnetické pole je "bezzdrojové".

Maxwellovy rovnice se doplňují vedlejšími rovnicemi, tak zvanými „materiálovými vztahy“, vyjadřujícími závislost vektorů \vec{D} na \vec{E} a \vec{B} na \vec{H} .

Vlnová rovnice je pro vektory \vec{E} a \vec{H} ve tvaru

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}.$$

Pro fázovou rychlost elektromagnetických vln platí

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_r \varepsilon_0 \mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}.$$

Fázová rychlost šíření elektromagnetické vlny ve vakuu má největší hodnotu c . V každém jiném prostředí se šíří rychlostí menší než c .

Podle vlnové délky λ dělíme obvykle spektrum elektromagnetického vlnění na:

1. **γ záření** ($\lambda < 0,0012$ nm), jehož umělým zdrojem je např. betatron,
2. **rentgenové záření** ($\lambda = 0,0012$ nm až 12 nm),
3. **ultrafialové záření** ($\lambda = 12$ nm až 380 nm),
4. **viditelné světlo** ($\lambda = 380$ nm až 760 nm),
5. **infračervené záření** ($\lambda = 760$ nm až 1 mm),
6. **radiové vlny** ($\lambda > 1$ mm).

U rovinné elektromagnetické vlny je vektor \vec{H} kolmý na vektor \vec{E} .

Pro rovinnou vlnu platí $H = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E$.

Protože energie elektromagnetického pole je závislá na vektorech \vec{E} a \vec{H} , dochází při změně těchto vektorů při šíření elektromagnetické vlny k přenosu energie.

Šíření energie elektromagnetické vlny je popsáno Poyntingovým vektorem $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Stojaté vlnění vzniká, šíří-li se dvě vlny proti sobě.

Při dopadu lineárně polarizované vlny na dokonale vodivou rovinu kolmou ke směru šíření dochází k dokonalému odrazu elektromagnetické vlny, tedy amplituda odražené vlny bude mít stejnou velikost jako vlna dopadající. Intenzita elektrického pole má v bodech vodivé roviny nulovou hodnotu (uzel). Magnetická složka má potom v těchto bodech kmitnu.

Pro přenos informace elektromagnetickými vlnami musíme provádět modulaci nosného vysokofrekvenčního signálu.

Používá se amplitudová, kmitočtová, fázová a impulsová modulace.

Existence elektromagnetických vln v prostoru vyžaduje existenci časově proměnného elektromagnetického pole v tomto prostoru. Tu část prostoru, ve které dochází k časové změně ρ nebo \vec{J} nebo obou veličin, nazýváme zdrojem elektromagnetického vlnění nebo zářičem elektromagnetické energie.

V oblasti vyzařování radiových vln nazýváme takový zdroj vysílací anténou. Anténa představuje vodič nebo soustavu vodičů, v nichž je časově proměnný elektrický proud.

Antény můžeme rozdělit podle různých hledisek.

- (1) Podle kmitočtu, na němž pracují - dlouhovlnné, středovlnné, krátkovlnné, antény pro decimetrové a centimetrové vlny a další.
- (2) Podle účelu - rozhlasové, televizní, radiolokační, zaměřovací, letadlové a další.
- (3) Podle konstrukčního principu - lineární, smyčkové, šroubovicové, trychtýřové, parabolické a další.

Elektromagnetická energie se může přenášet mezi zdrojem a spotřebičem buďto volným prostorem, potom musí být zdroj a spotřebič opatřeny anténami nebo vedením.

Vedené elektromagnetické vlny se šíří podél vodičů nebo dielektrik.

Užívá se dvouvodičové vedení, koaxiální vedení, dielektrické vedení a vlnovody.

Na šíření elektromagnetického vlnění v prostoru kolem Země má vliv jednak povrch Země, jednak složení jednotlivých vrstev atmosféry, jednak kmitočet daného vlnění nebo jeho spektrální složení (pokud se jedná o vlnění neharmonické).

Povrch Země může ovlivňovat přízemní nebo dopadající vlnu jednak svými nerovnostmi, které posuzujeme poměrem nerovnosti k vlnové délce vlnění, jednak svými elektrickými vlastnostmi.

9 Seznam použité literatury

- [1] Horák, Z. - Krupka, F.: Fyzika. Praha, SNTL, SVTL, 1966.
- [2] Šíkula, J. - Liška, M. - Vašina, P.: Fyzika I. Praha, SNTL, Nakladatelství technické literatury, 1987.
- [3] Klimeš, B. - Kracík, J. - Ženíšek, A.: Základy fyziky II. Praha, ACADEMIA, 1972.
- [4] Čičmanec, P.: Elektrina a magnetismus. Bratislava, Praha, ALFA, SNTL, 1980.
- [5] Šíkula, J. - Koktavý, B. - Schauer, P.: Fyzika II. Brno, Nakladatelství VUT, 1993.
- [6] Fuka, J. - Havelka, B.: Elektromagnetické pole. Praha, Státní pedagogické nakladatelství, 1958.
- [7] Chobola, Z. - Koktavý, B.: Elektronizace a automatizace měřících metod ve stavebnictví. Brno, Ediční středisko VUT, 1990.
- [8] Slavíček, E. - Wagner, J.: Fyzika pro chemiky. Praha, SNTL, 1971.
- [9] Zehnula, K.: Snímače neelektrických veličin. Praha, SNTL, 1983.
- [10] Bureš, F. - Čermáková, A. - Doležalová, J. - Rybínová, H.: Příklady z technické fyziky. Vysokoškolské skriptum. Praha, Státní nakladatelství technické literatury, 1976.
- [11] Hajko, V., aj.: Fyzika v príkladoch. Bratislava, Alfa, Vydavateľstvo technickej a ekonomickej literatúry, 1983.
- [12] Serway, R. A.: Physics for Scientists and Engineers / with Modern Physics. Saunders College Publishing, Philadelphia, 1983.
- [13] Syrový, A.: Sbíрка příkladů z fyziky. Praha, SNTL, Nakladatelství technické literatury, 1971.
- [14] Gvozdjak, L.: Základy elektrotechniky prenosu a spracovania zpráv. Nakladatelství Alfa, Bratislava, 1968.
- [15] Prokop, J., Vokurka, J.: Šíření elektromagnetických vln a antény. SNTL Praha, 1982.
- [16] Havlíček, M. a kol.: Sdělovací technika. SNTL Praha, 1970.
- [17] Český, M.: Antény pro příjem rozhlasu a televize. SNTL Praha, 1973.
- [18] Halliday, D., Resnick, R., Walker, J.: Fyzika. Brno, Vutium, 2001.

