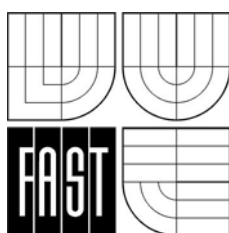


VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

PAVEL SCHAUER

APLIKOVANÁ FYZIKA

MODUL 4
PŘENOS TEPLA



STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Recenzoval: Prof. RNDr. Tomáš Ficker, CSc.

© Pavel Schauer, Brno 2006

OBSAH

1 Úvod.....	5
1.1 Cíle.....	5
1.2 Požadované znalosti.....	5
1.2.1 Fyzika.....	5
1.2.2 Matematika.....	5
1.3 Doba potřebná ke studiu.....	5
1.4 Klíčová slova.....	5
1.5 Přehled použitých symbolů.....	6
2 Úvod do přenosu tepla.....	7
2.1 Způsoby přenosu tepla.....	7
2.2 Základní veličiny přenosu tepla.....	8
2.2.1 Hustota tepelného toku při vedení tepla.....	8
2.3 Fourierův zákon vedení tepla.....	9
2.3.1 Tepelná vodivost různých látek.....	9
2.4 Diferenciální rovnice vedení tepla.....	11
2.5 Kontrolní otázky.....	12
3 Ustálené vedení tepla stěnami.....	14
3.1 Vedení tepla rovinnou stěnou.....	14
3.1.1 Jednoduchá rovinná stěna.....	14
3.1.2 Příčně složená rovinná stěna.....	15
3.1.3 Podélně složená rovinná stěna.....	16
3.1.4 Obecně složená rovinná stěna.....	17
3.2 Přestup tepla.....	17
3.3 Vedení tepla válcovou stěnou.....	19
3.4 Kontrolní otázky.....	20
3.5 Příklady k procvičení.....	21
4 Přenos tepla zářením.....	30
4.1 Základní veličiny záření.....	30
4.1.1 Černé těleso.....	32
4.2 Zákony záření černého tělesa.....	32
4.2.1 Záření reálných těles.....	33
4.2.2 Reálné tepelné vyzařování z povrchu tělesa.....	34
4.3 Kontrolní otázky.....	35
4.4 Příklady k procvičení.....	35
5 Závěr.....	40
5.1 Shrnutí.....	40
5.2 Studijní prameny.....	40
5.2.1 Seznam použité literatury.....	40
5.2.2 Seznam doplňkové studijní literatury.....	40
5.2.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny.....	40

1 Úvod

Přenos tepla je významná oblast fyziky, bez níž se technické aplikace neobejdou. Teplo se přenáší třemi základními mechanismy – vedením, prouděním a zářením. Poslední z nich se může uskutečnit i ve vakuu. Zaměříme se zejména na přenos tepla vedením a zářením.

1.1 Cíle

Tento studijní text je určen pro posluchače Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně a má sloužit jako jeden z učebních textů pro studium aplikované fyziky. Cílem je vybudování spolehlivého základu vědomostí, jež umožní budoucímu stavebnímu inženýrovi zvládat technické problémy v aplikační oblasti. Studijní text navazuje na moduly základní řady fyzikálních studijních opor a je součástí série modulů Aplikovaná fyzika, které spolu jako jeden celek tvoří úplnou studijní literaturu z oblasti termiky, záření a akustiky.

Tento čtvrtý modul, Přenos tepla, je rozdělen do tří kapitol. Cílem je popsat základní definice a zákony a rozšířit tyto poznatky o znalosti pro použití v technické praxi.

Výklad je průběžně doplněn kontrolními otázkami, řešenými příklady, neřešenými příklady a aplikacemi vyskytujícími se v technické praxi.

1.2 Požadované znalosti



1.2.1 Fyzika

Veličiny a jednotky, fyzikální rovnice, mechanika, hydromechanika, kmity a vlnění, stavové veličiny, termodynamika.

1.2.2 Matematika

Vektory, derivace, určitý a neurčitý integrál.

1.3 Doba potřebná ke studiu

10 hodin



1.4 Klíčová slova

Přenos tepla, tepelný tok, hustota tepelného, Fourierův zákon vedení tepla, tepelná vodivost, diferenciální rovnice vedení tepla, vedení tepla rovinnou stěnou, jednoduchá rovinná stěna, příčně složená rovinná stěna, podélně složená rovinná stěna, přestup tepla, vedení tepla válcovou stěnou, přenos tepla zářením, veličiny záření, černé těleso, zákony záření černého tělesa.





1.5 Přehled použitých symbolů

α	činitel pohlcení, součinitel přestupu tepla
ε	spektrální emisivita
Φ	tepelný tok
Φ_λ	spektrální tok
Φ_e	zářivý tok
λ	součinitel tepelné vodivosti
Λ	tepelná vodivost
∇	gradient (operátor)
∇^2	Laplaceův operátor
ρ	hustota
σ	Stefanova-Boltzmannova konstanta záření $\sigma=5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$
c	měrná tepelná kapacita
c_1	první konstanta Planckova zákona $c_1=2\pi hc^2$
c_2	druhá konstanta Planckova zákona $c_2=(hc)/k$
d	vzdálenost, tloušťka
E	energie
h	Planckova konstanta, $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
k	Boltzmannova konstanta, $k=1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
m	hmotnost
M_e	intenzita vyzařování
M_λ	spektrální intenzita vyzařování
P	výkon
q	hustota tepelného toku
Q	teplo
r	poloměr, vzdálenost
R	poloměr
R_T	tepelný odpor
S	plocha, průřez
t	čas, teplota (ve °C)
T	termodynamická teplota (v K)
V	objem
w	měrný objemový výkon
W	práce

2 Úvod do přenosu tepla

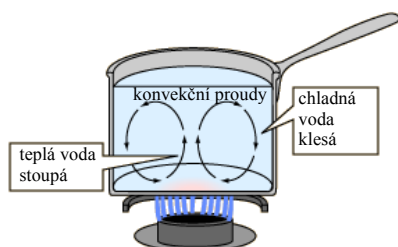
2.1 Způsoby přenosu tepla

Šíření tepla se může uskutečnit několika způsoby:

Přenos tepla vedením tepla (kondukcí) nastává tehdy, vyměňují-li si svoji kinetickou energii částice látky, které spolu sousedí. Podmínkou je existence spojitého látkového prostředí, ve vakuu vedení tepla nenastane. Vedení tepla probíhá v látkách ve všech skupenstvích.



Přenos tepla prouděním (konvekcí) je přenos způsobený pohybem tekutých látek, např. pohybem vzduchu nebo vody. Proudící tekutina s sebou přenáší energii ve formě tepla. Teplá proudící tekutina teplo přináší (vytápění), chladná odebírá (ochlazování klimatizací). Podmínkou přenosu tepla prouděním je existence látkového prostředí. Proudění tepla často nastává v kombinaci s vedením tepla. Zahříváme-li např. kapalinu na plotýnce, částice kapaliny s nižší hustotou se přemísťují k hladině (přenos prouděním) a zároveň si částice srážkami předávají svoji kinetickou energii (přenos vedením). Proudění látek může být **volné** nebo **nucené**, záleží na tom, jaký je důvod pohybu částic.



obr. 2.1 Cirkulace kapaliny způsobená volným prouděním

U **volného proudění** vznikne pohyb v důsledku různých teplot v objemu kapaliny nebo plynu a tím i různých hustot, které se vyrovnávají. Lehčí teplejší látka stoupá vzhůru a těžší chladnější klesá, přičemž se dostane na její místo. Tam se zahřeje a proces se může opakovat. **Nucené proudění tepla** vznikne vnějšími silami (čerpadlem, ventilátorem). Užívá se ho v technické praxi k zesílení přenosu tepla. Výhodou je, že nucené proudění může

nastat i proti teplotnímu spádu. Prouděním tedy lze i chladit.

Přenos tepla zářením (sáláním, radiací) jediný nevyžaduje látkové prostředí. Teplo se přenáší elektromagnetickým zářením a to i ve vakuu. Pokud je prostor mezi zářícím a ozařovaným tělesem vyplněn látkou, její teplota může být libovolně nižší nebo vyšší než teplota těles, předávajících si teplo. Tak se dostává teplo ze Slunce na Zemi. Tímto způsobem lze vytápět pomocí infrazářičů, nebo tepelně zpracovávat potraviny.



2.2 Základní veličiny přenosu tepla

Dále se zaměříme na vedení tepla. Některé veličiny však budou platné i pro jiné způsoby přenosu tepla. Patří k nim **tepelný tok** Φ .



Tepelný tok je definován diferenciálním podílem tepla dQ , které projde nějakou plochou (průřezem) S za čas dt a tohoto času

$$\Phi = \frac{dQ}{dt}. \quad (1)$$

Jednotka tepelného toku je shodná s jednotkou výkonu (W). Proto se někdy tepelný tok označuje jako **tepelný výkon**. Známe-li tepelný tok, můžeme, na základě definice (1) počítat přenesené teplo Q pomocí rovnice

$$Q = \int_0^t \Phi dt, \quad (2)$$

která v případě stacionárního tepelného toku (který je časově neměnný) přejde na tvar

$$Q = \Phi t, \quad (3)$$

kde t je doba přenosu tepla.

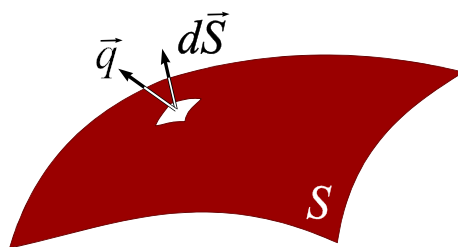


Často je výhodnější počítat přenos tepla jednotkovou plochou. Pak zavádíme **hustotu tepelného toku** q , kterou definujeme diferenciálním podílem tepelného toku $d\Phi$, který prochází elementární plochou dS a velikosti této plochy

$$q = \frac{d\Phi}{dS}, \quad (4)$$

kde element plochy dS musí být kolmý ke směru šíření tepla.

2.2.1 Hustota tepelného toku při vedení tepla



obr. 2.2 Vektorový popis hustoty tepelného toku

V případě přenosu tepla vedením můžeme hustotu tepelného toku pokládat za vektor, jehož směr je shodný se směrem největšího **teplotního spádu** (rozdílu teplot), který určuje nejen směr vedení tepla, ale i jeho kvantitu. Teplotní spád je určen záporným gradientem teploty, který je určen rovnicí

$$-\nabla T = \left(-\frac{\partial T}{\partial x}, -\frac{\partial T}{\partial y}, -\frac{\partial T}{\partial z} \right). \quad (5)$$

K označení gradientu jsme použili symbol ∇ (čti nabla). Záporný gradient teploty má v daném bodě teplotního pole takový směr, v němž je spád (pokles) teploty největší.

Po zavedení vektoru hustoty tepelného toku musí tepelný tok splňovat rovnici

$$d\Phi = \vec{q} \cdot d\vec{S}, \quad (6)$$

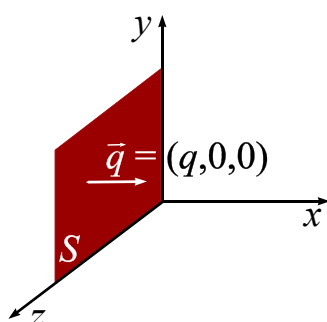
přičemž zde již může mít plocha $d\vec{S}$ jakýkoliv směr.

2.3 Fourierův zákon vedení tepla

Na základě experimentálních výsledků stanovil v r.1811 francouzský matematik a fyzik **Jean Batiste Joseph Fourier** (1768-1830) závislost hustoty tepelného toku na gradientu teploty pro vedení tepla rovnicí

$$\vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (7)$$

kde konstanta úměrnosti λ je **součinitel tepelné vodivosti**, který vyjadřuje schopnost materiálu vést teplo. Jeho jednotka je $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.



obr. 2.3 Jednorozměrný tepelný tok

Pokud má gradient teploty směr kolmo na plochu, můžeme vedení tepla sledovat pouze v jednom vybraném směru, například ve směru osy x . Potom můžeme Fourierův zákon (7) napsat ve tvaru

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (8)$$

2.3.1 Tepelná vodivost různých látek

Přenos tepla vedením v **pevných látkách** je zprostředkován buď **volnými elektrony** nebo **fonony**.

Elektronová teplotní vodivost je založena na přenosu energie pomocí **volných elektronů**, podobně jako se přenáší elektrický náboj při vedení elektrického proudu. Dobré vodiče elektrického proudu mají dostatek volných elektronů a proto jsou i dobrými tepelnými vodiči.

Dobrymi vodiči tepla jsou proto kovy, které jsou také dobrými vodiči elektrického proudu.

Fononová teplotní vodivost je založena na přenosu energie, který je podobný přenosu energie akustickým vlněním. Energie, kterou si mohou kmitající částice předávat, se přenáší po dávkách (kvantech). Tento druh přenosu tepla přisuzujeme částicím, které nazýváme **fonony**.

Říkáme, že k přenosu tepla dochází srážkami mezi fonony. Fonony se teplo přenáší rychlostí zvuku.

Elektrické izolanty jsou, až na výjimky, i dobrými tepelnými izolanty, protože obsahují velmi málo volných elektronů. Jsou však mezi nimi značné rozdíly, protože u nich záleží na fononové tepelné vodivosti. Keramika a termoplast jsou např. přibližně stejné elektrické izolanty. Keramika však, vzhledem k větší rychlosti a střední volné dráze fononů, vede znatelně lépe teplo než plasty. Teflon, který je velmi dobrý elektrický izolant, má vysoký podíl fononové tepelné vodivosti, která se blíží k tepelné vodivosti některých kovů. Používá se proto všude tam, kde je třeba zachovat elektrickou izolaci a zároveň docílit tepelný kontakt těles.

Na vedení tepla v pevných látkách se tedy mohou podílet jak volné elektrony, tak fonony. Výsledný součinitel tepelné vodivosti je pak dán součtem obou složek,

$$\lambda = \lambda_f + \lambda_e, \quad (9)$$

kde λ_f je fononová složka součinitele tepelné vodivosti a λ_e jeho elektronová složka. Pro elektrické vodiče je $\lambda = \lambda_e$. Pro elektrické izolanty je tomu naopak, v důsledku zanedbatelného počtu volných elektronů u nich převládá fononová tepelná vodivost a $\lambda = \lambda_f$.



Vedení tepla v **plynech** se uskutečňuje srážkami molekul. Proto mají velmi malou tepelnou vodivost, která u plynů závisí na četnosti srážek, tj. na střední volné dráze molekul.

Proto jsou dobrými **tepelnými izolanty** látky, jež v dutinách obsahují vzduch. Jsou to např. skelná vlna, minerální plst, pěnový beton, cihly a pod. Vodivost takových látek však značně závisí na jejich vlhkosti.

Nelepším tepelným izolantem je vakuum, kterým se však dobře šíří tepelné záření, kterému musíme zamezit vhodnou úpravou. Provádí se to nanesením zrcadlových povrchů stěn. Vakuum se rovněž používá k tepelné izolaci **Dewarovy nádoby**. Je to nádoba s dvojitou stěnou, mezi kterou je vyčerpán vzduch. Přenos tepelného záření je snížen postříbřením povrchů stěn.

Součinitel tepelné vodivosti λ vybraných látek [$\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$]					
polystyrén	0,033	dřevo (dub), kolmo na vlákna	0,21÷0,27	led (0 °C)	2,21
vzduch (0 °C)	0,0242	dřevo (dub), rovnoběžně s vlákny	0,35÷0,37	rtuť	8,2
vzduch	0,0256	vodík	0,205	olovo	34,3
laminát	0,04	lidská kůže	0,14÷0,17	železo	80,2
izolační skelná vlna	0,043	voda	0,598	zinek	126
cín	0,063	cihla pálená	0,72	hliník	235
překližka	0,12	sklo obyčejné	0,6÷1,05	měď	401
hélium	0,138	beton	0,8÷1,3	stříbro	428
sádra	0,17	led (-50 °C)	2,78	diamant	1000

tab. 2.1 Součinitel tepelné vodivosti vybraných látek při teplotě 20 °C (není-li uvedeno jinak).

Dewarovou nádobou je i **termoska**, kterou známe z domácnosti. Velmi účinně se snižuje **tepelná vodivost oken**, pokud je zdvojíme, vyčerpáme vzduch z prostoru mezi skly a následně prostor mezi skly naplníme speciálním plynem s nízkou tepelnou vodivostí (např. argonem), který ponecháme na atmosférickém tlaku. Tím nedojde k úniku plynu netěsnostmi a nedojde k promáčknutí skel tlakovou silou.

Součinitel tepelné vodivosti je **nepatrně závislý na teplotě**. Pro naše potřeby jej budeme považovat za konstantu. Teplotní změny součinitele tepelné vodivosti jsou významnější při teplotách nižších než 200K.

2.4 Diferenciální rovnice vedení tepla

Uvažujme látku objemu V libovolného tvaru (obr. 2.4), ve které mohou být zdroje tepla, které generují teplo měrného objemového výkonu w . Tyto zdroje vytvoří ve zkoumaném objemu V za čas dt teplo

$$dQ_z = \int_V w dV dt, \quad (10)$$

kde dV je objemový element sledované látky.

Jedna část tohoto tepla dQ_T se spotřebuje ke zvýšení teploty celého objemu látky o dT . Zjistíme ji rovnicí

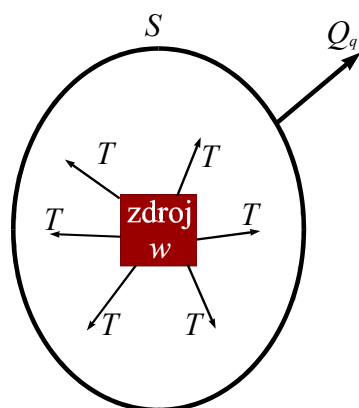
$$Q_T = \int_V c \rho dV dT, \quad (11)$$

kde c je měrná tepelná kapacita a ρ hustota látky.

Druhá část dodaného tepla dQ_q unikne do okolí. Toto teplo zjistíme z Fourierova zákona (7)

$$\begin{aligned} dQ_q &= \int_S \vec{q} \cdot d\vec{S} dt = \\ &= - \int_S \lambda \nabla T \cdot d\vec{S} dt, \end{aligned} \quad (12)$$

obr. 2.4 K odvození diferenciální rovnice vedení tepla



kde integrujeme přes plochu S , kterou teplo uniká. Zákon zachování energie vyžaduje splnění podmínky

$$dQ_z = dQ_T + dQ_q, \quad (13)$$

a tím i rovnice

$$\int_V w dV dt = \int_V \rho c dV dT - \int_S \lambda \nabla T \cdot d\vec{S} dt. \quad (14)$$

Pro úpravu této rovnice využijeme integrální **Gaussovu-Ostrogradského větu** známou z matematiky, která má obecný tvar

$$\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V (\operatorname{div} \vec{a}) dV, \quad (15)$$

kde operátor div se nazývá divergence a platí pro něj

$$\operatorname{div} \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}. \quad (16)$$

Je to skalár. Rovnice (15) pro naše potřeby bude

$$\int_S (\nabla T) \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}(\nabla T) dV = \int_V \nabla^2 T dV. \quad (17)$$

Zde operátor $\operatorname{div}(\nabla)$ je **Laplaceův operátor** ∇^2 , pro který platí

$$\nabla^2 T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (18)$$

Při platnosti těchto matematických vztahů lze rovnici (13) využít tak, že porovnáme integrované funkce. Dostaneme

$$\lambda \nabla^2 T dt + w dt = c \rho dT \quad (19)$$

a úpravou

$$\frac{w}{\rho c} + \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (20)$$

Tato rovnice je **obecná diferenciální rovnice vedení tepla**.



2.5 Kontrolní otázky

- (1) Jakým způsobem dochází k přenosu tepla při kondukcii?
- (2) Které mechanismy přenosu tepla nevyžadují látkové prostředí?
- (3) Které způsoby přenosu tepla se uplatňují při vytápění radiátory?
- (4) Uveďte, kterými způsoby se přenáší teplo v pevných látkách, kterými v tekutinách a kterými ve vakuu. Zdůvodněte svá tvrzení.
- (5) Co znamená a jak je definován tepelný tok a jak hustota tepelného toku?
- (6) Jaký směr má hustota tepelného toku v případě vedení tepla?
- (7) Jak je formulován Fourierův zákon pro vedení tepla?
- (8) Co je to součinitel tepelné vodivosti? Jakou má jednotku?
- (9) Co zprostředkovává přenos tepla v kovech a co v izolantech?
- (10) Souvisí nějak rychlost zvuku v izolantech s jejich tepelnou vodivostí?
- (11) Jak vedou teplo plyny?

- (12) *Proč není stěna Dewarovy nádoby průhledná?*
- (13) *Odvod'te diferenciální rovnici vedení tepla.*
- (14) *Jak bude vypadat diferenciální rovnice pro vedení tepla v látce, ve které neexistuje teplotní spád?*

3 Ustálené vedení tepla stěnami

3.1 Vedení tepla rovinnou stěnou



Vedení tepla, při němž je prostorové rozložení teplot časově neměnné, nazýváme **ustálené**. Pak můžeme pro libovolné místo psát $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$.

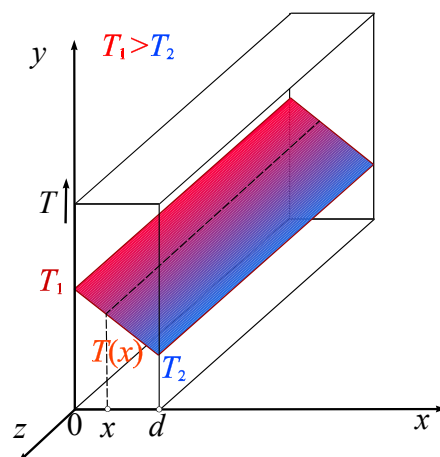
V případě, že ve sledovaném prostředí nejsou tepelné zdroje, přejde obecná diferenciální rovnice pro vedení tepla (20) na tvar

$$\nabla^2 T = 0 \quad (21)$$

Následující odstavce budou pojednávat o ustáleném vedení tepla.

3.1.1 Jednoduchá rovinná stěna

Uvažujme rovinnou stěnu o tloušťce d , která je znázorněna na obr. 3.1.



obr. 3.1 Jednoduchá rovinná stěna s vyznačeným teplotním spádem

Soustavu souřadnic zvolme tak, aby osy y a z ležely v jednom povrchu stěny a aby osa x byla na stěnu kolmá. Povrchová teplota stěny z jedné strany (pro $x=0$) je T_1 , z druhé strany ($x=d$) je T_2 . Rovinná stěna je tvořena homogenní látkou, jejíž součinitel tepelné vodivosti je λ . Pro tuto stěnu stačí uvažovat změny teplot ve směru x , změny teplot v ostatních směrech jsou nulové. Proto rovnici (21) napíšeme ve tvaru

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0. \quad (22)$$

Obecné řešení této rovnice je

$$T(x) = c_2 x + c_1. \quad (23)$$

Konstanty c_1, c_2 určíme z okrajových podmínek. Pro $x=0$ je $T = T_1$ a pro $x=d$ je $T = T_2$. Pak dostaneme

$$c_1 = T_1, \quad c_2 = \frac{T_2 - T_1}{d}. \quad (24)$$

Průběh teploty v homogenní stěně má tedy tvar

$$T(x) = \frac{T_2 - T_1}{d} x + T_1. \quad (25)$$

Tento průběh je zakreslen na obr. 3.1. jako přímka v rovině x, T . Pokud zvážíme, že teplotní spád ve směru osy z je nulový, dostaneme teplotní průběh

ve tvaru roviny, kterou rovněž vidíme na obr. 3.1., včetně barevného znázornění teplot. Červená barva odpovídá nejvyšší teplotě a modrá nejnižší teplotě ve stěně.

Hustotu tepelného toku stěnou určíme z jednorozměrného tvaru Fourierova zákona (8) derivováním funkce $T(x)$, tedy

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d}, \quad (26)$$

kde T_1 a T_2 jsou povrchové teploty stěny ($T_1 > T_2$). Tepelný tok stěnou o plošném průřezu S pak bude

$$\Phi = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{d}. \quad (27)$$

Pro přehlednější posouzení tepelných vodivostních vlastností stěn je výhodné zavést **tepelnou** vodivost Λ . Je to podíl tepelného toku Φ procházejícího stěnou a rozdílu teplot povrchů této stěny $\Delta T = T_1 - T_2$ ($T_1 > T_2$).

$$\Lambda = \frac{\Phi}{\Delta T}. \quad (28)$$

Reciprokou hodnotou tepelné vodivosti je **tepelný odpor** R_T

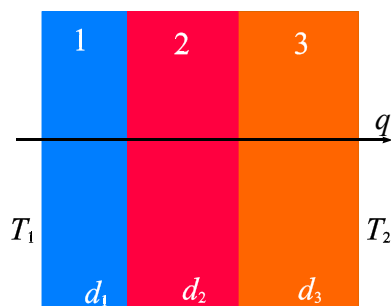
$$R_T = \frac{1}{\Lambda} = \frac{\Delta T}{\Phi}. \quad (29)$$

Použijeme-li vztah (27), dostaneme pro tepelnou vodivost a tepelný odpor jednoduché rovinné stěny vztahy

$$\Lambda = \frac{\lambda S}{d}, \quad (30)$$

$$R_T = \frac{d}{\lambda S}. \quad (31)$$

3.1.2 Příčně složená rovinná stěna



obr. 3.2 Příčně složená rovinná stěna

S tepelnou vodivostí a tepelným odporem můžeme v případě skládání rovinných stěn za sebe nebo vedle sebe pracovat podobně jako s odporem a vodivostí v elektřině. Seřadíme-li rovinné stěny různých tepelných odporů za sebe (obr. 3.2) vznikne **příčně složená rovinná stěna**. Její povrchová teplota bude z jedné strany T_1 a na protilehlé straně T_2 . Výsledný tepelný odpor R_T stěny dostaneme podobně jako v elektřině tak, že tepelné odpory (řazené

sériově) všech stěn sečteme. Dostaneme

$$R_T = R_{T_1} + R_{T_2} + R_{T_3} + \dots \quad (32)$$

nebo také, po využití rovnice (31)

$$R_T = \frac{1}{S} \left(\frac{d_1}{\lambda_1} + \frac{d_2}{\lambda_2} + \frac{d_3}{\lambda_3} + \dots \right) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}, \quad (33)$$

kde d_i jsou tloušťky jednotlivých stěn a λ_i jejich součinitelé tepelné vodivosti. Tepelný tok příčně složené stěny dostaneme z rovnice (27),

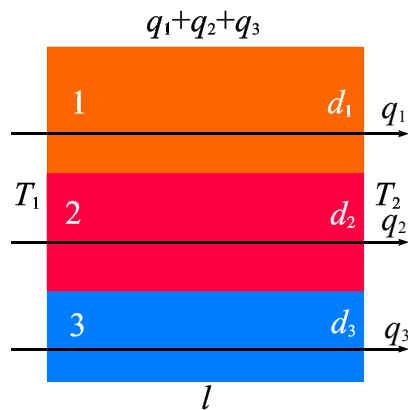
$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{R_T}, \quad (34)$$

po dosazení za tepelný odpor z rovnice (33) získáme **tepelný tok příčně složenou rovinnou stěnou** ve tvaru

$$\Phi = S \frac{T_1 - T_2}{\sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}}, \quad (35)$$

kde n je počet stěn, ze kterých je složená stěna sestavena.

3.1.3 Podélně složená rovinná stěna



obr. 3.3 Podélně složená rovinná stěna

Stěny různých tepelných odporů můžeme skládat i vedle sebe, jak ukazuje obr. 3.3. Pak vznikne **podélně složená rovinná stěna**, kde jednotlivými stěnami tečou různé hustoty tepelných toků. Teploty protilehlých povrchů stěn vlevo a vpravo předpokládáme po celé ploše konstantní (v praxi nebude tato podmínka zcela splněna). Při řešení takové stěny platí opět analogie s elektrickým obvodem, výslednou tepelnou vodivost Λ dostaneme tak, že sečteme tepelné vodivosti Λ_i jednotlivých stěn, jejichž plošný průřez je S_i a součinitel tepelné vodivosti λ_i . Dostaneme

$$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \dots \quad (36)$$

a po dosazení

$$\Lambda = \frac{1}{d} (\lambda_1 S_1 + \lambda_2 S_2 + \lambda_3 S_3 + \dots) = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i. \quad (37)$$

Tepelný tok stěnou pak bude mít tvar

$$\Phi = (T_1 - T_2) \Lambda, \quad (38)$$

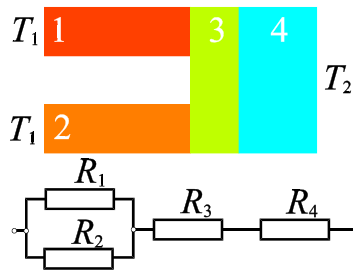
nebo-li

$$\Phi = \frac{T_1 - T_2}{d} \sum_{i=1}^n \lambda_i S_i, \quad (39)$$

kde n je počet skládaných stěn.

3.1.4 Obecně složená rovinná stěna

Orientačně lze podobnými metodami řešit i složitěji sestavené stěny. Pak je



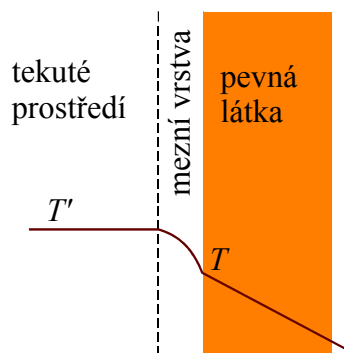
obr. 3.4 Obecně složená stěna a její náhradní elektrický obvod

výhodně překreslit tepelné odpory tak, aby reprezentovaly elektrické odpory v obvodu a získat výsledný odpor náhradní elektrické sítě metodami užívanými v elektřině. Jedna taková analogie je ukázána pro případ složené stěny na obr. 3.4., kde je rovněž zakreslena elektrická odporová síť, která tuto složenou stěnu simuluje. Na tomto principu jsou založeny metody **analogového měření tepelných vlastností stěn**. Pomocí elektrických



Orientačně proto, protože v mnohých případech vznikne při obecně sestavené stěně vícerozměrný tepelný tok, tedy tok nejen ve směru osy x .

odporových sítí můžeme vytvořit analogové modely reálných stěn a elektrickými metodami měřit jejich modelové tepelné vlastnosti.



obr. 3.5 Teplotní průběh při přestupu tepla

3.2 Přestup tepla

Při řešení průchodu tepla stěnami jsme dosud uvažovali povrchové teploty stěn. V praxi se však spíše setkáváme s případy, kde stěna je obklopena z jedné nebo obou stran tekutým prostředím (kapalinou nebo plynem) a není známa povrchová teplota stěny, nýbrž teplota obklopujícího tekutého prostředí. Proto je třeba řešit přenos tepla na rozhraní pevné látky a tekutiny nazývaný **přestup tepla**.

Přestup tepla vzniká proto, že v blízkosti povrchu stěny se vytvoří tenká **mezní vrstva**, na jejíž površích jsou rozdílné teploty. Napříč touto vrstvou vzniká přenos tepla. Jde o složitý proces, který závisí mimo jiné na rychlosti a typu proudění tekutiny podél stěny, viskozitě tekutiny a na jakosti povrchu stěny.



Situace, kterou popisujeme, je vyobrazena na obr. 3.5. Předpokládejme, že teplota prostředí je T' a povrchová teplota stěny je T . Experimenty ukazují, že není-li rozdíl teplot $\Delta T = T' - T$ větší než několik kelvinů, je možno hustotu tepelného toku q při přestupu tepla počítat pomocí empirického Newtonova vztahu

$$q = \alpha(T' - T), \quad (40)$$

kde koeficient α je **součinitel přestupu tepla**, jehož jednotka je $[\alpha] = \frac{\text{W} \cdot \text{m}^{-2}}{\text{K}} = \text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

Pro přestup tepla je možné, podobně jako v případě složených stěn, zavést tepelnou vodivost Λ_α a tepelný odpor R_α . Budeme je definovat rovnicemi analogickými k (28) a (29). S přihlédnutím k rovnici (40) dostaneme

$$\Lambda_\alpha = \alpha S, \quad (41)$$

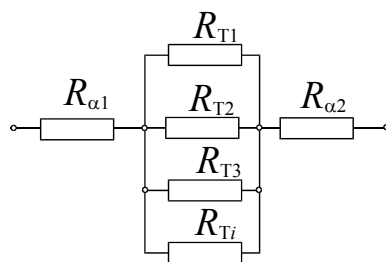
$$R_\alpha = \frac{1}{\alpha S}. \quad (42)$$

V případě, že řešíme přestup tepla na obou stranách rovinné stěny, zahrneme příslušné tepelné odpory do rovnic pro vedení tepla. Stejným postupem jako v článku 3.1.2 dostaneme pro **příčně složenou** rovinnou stěnu

$$\Phi = \frac{(T_1' - T_2')S}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}}, \quad (43)$$

kde teploty T_1' , T_2' jsou teploty obklopujícího tekutého prostředí. Je-li zadána jedna povrchová teplota, např. T_1 a z druhé strany stěny teplota prostředí T_2' , dostaneme stejným postupem vztah

$$\Phi = \frac{(T_1 - T_2')S}{\frac{1}{\alpha_2} + \sum_{i=1}^n \frac{d_i}{\lambda_i}}, \quad (44)$$



obr. 3.6 Náhradní elektrická síť pro vedení tepla podélně složené stěny s přestupem tepla

Pro podélně **složenou** stěnu si pomůžeme náhradní elektrickou sítí na obr. 3.6. Pro celkový odpor sítě R_T bude platit

$$R_T = R_{\alpha 1} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_{Ti}} \right)^{-1} + R_{\alpha 2}, \quad (45)$$

a po dosazení tepelných odporů z rovnic (31) a (42) dostaneme

$$R_T = \frac{1}{\alpha_1 S} + \frac{1}{\alpha_2 S} + \left(\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i S_i}{d} \right)^{-1}, \quad (46)$$

kde S je příčný plošný průřez stěnou.

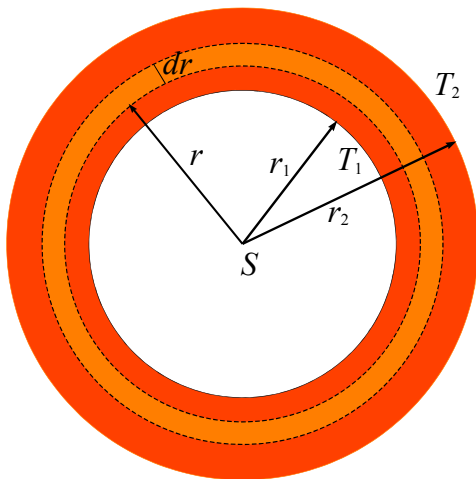
Tepelný tok podélně složené rovinné stěny s přestupem tepla dostaneme z rovnice (29), kam dosadíme R_T z rovnice (46), takže

$$\Phi = \frac{T_1' - T_2'}{\frac{l}{\alpha_1 S} + \frac{l}{\alpha_2 S} + d \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i S_i \right)^{-1}}, \quad (47)$$

kde T_1' , T_2' jsou teploty tekutého prostředí obklopujícího protilehlé povrchy stěny, d je její tloušťka, S_i jsou plošné průřezy jednotlivých podélně skládaných stěn a $S = \sum S_i$ je plošný průřez celé složené stěny.

3.3 Vedení tepla válcovou stěnou

Předpokládejme stěnu válcového tvaru, která je v řezu zakreslena na obr. 3.7. Vnitřní poloměr a povrchová teplota stěny jsou r_1 , T_1 , vnější poloměr a povrchová teplota stěny r_2 , T_2 . Najdeme tepelný tok touto stěnou.



obr. 3.7 Řez válcovou stěnou (*k odvození rovnice pro vedení tepla válcovou stěnou*)

Hledejme nejdříve tepelný odpor tenké válcové vrstvy o poloměru r a tloušťce dr . Tepelně se tato vrstva chová jako rovinná stěna obdélníkového tvaru o plošném průřezu $S = 2\pi r h$, kde h je výška stěny. Tepelný odpor této vrstvy, jejíž součinitel tepelné vodivosti je λ , bude podle rovnice (31)

$$dR_T = \frac{dr}{\lambda S}, \quad (48)$$

a po dosazení za plochu S

$$dR_T = \frac{1}{2\pi h \lambda} \frac{dr}{r}, \quad (49)$$

Válcová stěna vznikne příčným složením mnoha válcových vrstev, jejichž poloměry se mění od r_1 do r_2 , tepelný odpor válcové stěny tedy vznikne integrací tepelných odporů všech vrstev

$$R_T = \int dR_T = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{2\pi h \lambda} \frac{dr}{r}, \quad (50)$$

Po integraci dostáváme tepelný odpor válcové stěny

$$R_T = \frac{1}{2\pi h \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad (51)$$

a s využitím vztahu (29) tepelný tok válcovou stěnou

$$\Phi = \frac{2\pi h \lambda (T_1 - T_2)}{\ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (52)$$

Chceme-li do výpočtu zahrnout přestup tepla, musíme s přihlédnutím k rovnici (42) psát

$$R_T = \frac{1}{\alpha_1 S_1} + \frac{1}{2\pi h \lambda} \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{\alpha_2 S_2}, \quad (53)$$

kde $S_1 = 2\pi r_1 h$ je plocha vnitřního povrchu válcové stěny a $S_2 = 2\pi r_2 h$ je plocha jejího vnějšího povrchu. Tepelný tok s přestupem tepla pak bude

$$\Phi = \frac{2\pi h \lambda (T_1' - T_2')}{\frac{\lambda}{\alpha_1 r_1} + \ln \frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2 r_2}}, \quad (54)$$

kde T_1' a T_2' jsou vnitřní a vnější teplota tekutých prostředí obklopujících stěnu a α_1 a α_2 jsou vnitřní a vnější součinitelé přestupu tepla.



3.4 Kontrolní otázky

- (1) *Odvoďte teplotní průběh $T(x)$ v jednoduché rovinné stěně při ustáleném vedení tepla ve směru kolmo na stěnu.*
- (2) *Odvoďte hustotu tepelného toku při ustáleném vedení tepla jednoduchou rovinnou stěnou.*
- (3) *Co je to tepelný odpor a co je tepelná vodivost? Jaké vztahy je určují? Jak spolu souvisí?*
- (4) *Odvoďte rovnici pro ustálený tepelný tok příčně složenou rovinnou stěnou.*
- (5) *Odvoďte rovnici pro ustálený tepelný tok podélně složenou rovinnou stěnou.*
- (6) *Na jakém principu jsou založeny metody analogového měření tepelných vlastností stěn?*
- (7) *Najděte obecný vztah pro výpočet tepelné vodivosti stěny podle obr. 3.4.*
- (8) *Proč nebývá teplota povrchu tělesa a teplota obklopujícího tekutého prostředí stejná?*
- (9) *Jakou roli má při přestupu tepla mezní vrstva? Jak ji ztenčíme?*
- (10) *Co je to součinitel přestupu tepla? Jakou má jednotku?*
- (11) *Jak počítáme hustotu tepelného toku při přestupu tepla?*
- (12) *Jak se změní rovnice pro ustálený tepelný tok složenými rovinnými stěnami, zahrneme-li do výpočtu přestup tepla?*

- (13) Znázorněte graficky teplotní spády při průchodu tepla rovinnou stěnou, a to jak v tekutině, která ji obklopuje, tak ve stěně.
- (14) Odvoďte rovnici pro ustálený tepelný tok válcovou stěnou.
- (15) Jsou hustoty tepelného toku válcovou stěnou při vnitřním a vnějším povrchu stěny stejné?
- (16) Jaká bude odpověď na stejnou otázku v případě tepelného toku?

3.5 Příklady k procvičení

Řešený příklad 3.1

Jeden konec měděné tyče délky 30 cm a příčného průřezu 3 cm² udržujeme na teplotě 300 °C a druhý zasahuje do tajícího ledu. Tyč je izolována od okolí. Určete: a) hustotu tepelného toku tyčí, b) tepelný tok tyčí, c) hmotnost ledu, který roztaje za 10 minut. Součinitel tepelné vodivosti mědi je 389 W.m⁻¹.K⁻¹, měrné skupenské teplo tání ledu je 3,3.10⁵ J.kg⁻¹.

Řešení:

a) Použijeme rovnici pro hustotu tepelného toku stěnou (26), kde d bude délka tyče. Hustota tepelného toku tyčí pak bude

$$q = \lambda \frac{T_1 - T_2}{d},$$

kde T_1 je teplota teplého konce tyče a T_2 je teplota studeného konce. Numericky dostaneme

$$q = 389 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \frac{(300 - 0) \text{ K}}{0,3 \text{ m}} = 3,89 \text{ W.m}^{-2} = 389 \text{ kW.m}^{-2}.$$

b) Tepelný tok tyčí určíme na základě definice hustoty tepelného toku 0

$$\Phi = q S = 389 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2} \cdot 3 \cdot (10^{-2} \text{ m})^2 = 116,7 \text{ W}.$$

c) Vzhledem k tomu, že nedochází k žádné ztrátě tepla do okolí, bude za čas t dodáno ledu teplo $Q = \Phi t$, které se celé spotřebuje na tání ledu. Na tání ledu o hmotnosti m je potřeba teplo $Q = m l$, takže porovnáním tepel dostaneme hmotnost rozpuštěného ledu

$$m = \frac{\Phi t}{l}$$

a hmotnost ledu, který roztaje za 10 minut bude

$$m = \frac{116,7 \text{ W} \cdot 60 \cdot 10 \text{ s}}{3,3 \cdot 10^5 \text{ J.kg}^{-1}} = 0,212 \text{ kg} = 212 \text{ g}.$$

Řešený příklad 3.2

Navrhněte tloušťku izolační stěny mrazírny z materiálu, jehož součinitel tepelné vodivosti je 0,1 W.m⁻¹.K⁻¹, má-li vzduch chlazeného prostoru teplotu -24 °C a vnější povrch stěny nesmí mít nižší teplotu než 15 °C při

teplotě vzduchu vně mrazírny $25\text{ }^{\circ}\text{C}$. Součinitel přestupu tepla na obou stranách izolační stěny je $12\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$.



Řešení:

Budeme pracovat se stěnou, u které známe teplotu vzduchu chlazeného prostoru T_2' a teplotu vnější povrchovou teplotu stěny T_1 . Pro stěnu napíšeme rovnici (43) bez přestupu tepla na vnější straně, tedy

$$q = \frac{T_1 - T_2'}{\frac{1}{\alpha_2} + \frac{d}{\lambda}}$$

a úpravou nalezneme neznámou tloušťku stěny

$$d = \lambda \left(\frac{T_1 - T_2'}{q} - \frac{1}{\alpha_2} \right).$$

Hustotu tepelného toku izolační stěnou určíme ze znalosti teploty jejího vnějšího povrchu a teploty vzduchu vně izolační stěny. Použijeme k tomu rovnici (40) pro přestup tepla na povrchu stěny

$$q = \alpha_1(T_1' - T_1).$$

Dosazením poslední rovnice do rovnice pro tloušťku stěny dostaneme

$$d = \lambda \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{T_1 - T_2'}{T_1' - T_1} - \frac{1}{\alpha_2} \right) = \frac{\lambda}{\alpha} \left(\frac{T_1 - T_2'}{T_1' - T_1} - 1 \right),$$

kde jsem využil rovnost $\alpha_1 = \alpha_2$. Dosazením numerických hodnot vyjde tloušťka izolační stěny mrazírny

$$d = \frac{0,1\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}{12\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}} \cdot \left(\frac{15\text{ }^{\circ}\text{C} + 24\text{ }^{\circ}\text{C}}{25\text{ }^{\circ}\text{C} - 15\text{ }^{\circ}\text{C}} - 1 \right) = 0,0242\text{ m} = 2,42\text{ cm}.$$



Řešený příklad 3.3

Deska se skládá ze 40 železných plechů tloušťky 1 mm o ploše 2 m^2 , mezi nimiž je 39 papírových listů tloušťky 0,3 mm o stejné ploše. Součinitel tepelné vodivosti železa je $66\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ a papíru $0,12\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Určete a) střední měrnou tepelnou vodivost složené desky, b) tepelný odpor desky.



Řešení:

a) Počet, tloušťku a měrnou tepelnou vodivost plechů označíme n_1 , d_1 , λ_1 a podobně pro papírový list n_2 , d_2 , λ_2 . Porovnáním tepelného odporu desky z definiční rovnice (29) a tepelného odporu desky na základě rovnice (31) dostaneme

$$\frac{\Delta T}{\Phi} = \frac{d}{\lambda S}$$

a úpravou, s dosazením tloušťky složené desky $d = n_1 d_1 + n_2 d_2$ a hustoty tepelného toku $q = \Phi/S$, získáme střední měrnou tepelnou vodivost složené desky

$$\bar{\lambda} = \frac{\Phi d}{S \Delta T} = q \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2}{\Delta T}.$$

Hustotu tepelného toku složené desky určíme pomocí rovnice (35), tedy

$$q = \frac{\Delta T}{n_1 \frac{d_1}{\lambda_1} + n_2 \frac{d_2}{\lambda_2}}$$

a dosadíme ji do předchozí rovnice. Dostaneme

$$\bar{\lambda} = \frac{\Delta T}{n_1 \frac{d_1}{\lambda_1} + n_2 \frac{d_2}{\lambda_2}} \cdot \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2}{\Delta T} = \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2}{n_1 \frac{d_1}{\lambda_1} + n_2 \frac{d_2}{\lambda_2}} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 (n_1 d_1 + n_2 d_2)}{n_1 d_1 \lambda_2 + n_2 d_2 \lambda_1}.$$

Po dosazení zadaných hodnot dostaneme střední měrnou tepelnou vodivost

$$\bar{\lambda} = \frac{66 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 0,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot (40,0,001 \text{ m} + 39,0,0003 \text{ m})}{40,0,001 \text{ m} \cdot 0,12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} + 39,0,0003 \text{ m} \cdot 66 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,527 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

b) Vrátime se k rovnici (31), kterou upravíme do tvaru

$$R_T = \frac{n_1 d_1 + n_2 d_2}{\bar{\lambda} S}.$$

Dosazením zadaných hodnot dostaneme tepelný odpor složené desky

$$R_T = \frac{40,0,001 \text{ m} + 39,0,0003 \text{ m}}{0,527 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 2 \text{ m}^2} = 0,0491 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}.$$

Řešený příklad 3.4

V zahradní chatce jsou kamínka o tepelném výkonu 4 kW. Střecha i obvodové stěny chatky jsou ze stejného jednoduchého dřevěného panelu a jejich celková plocha je 56 m². Podlaha je dobře tepelně zaizolovaná, proto ztráty tepla podlahou zanedbejte. Teplota vzduchu uvnitř chatky je 22 °C a venkovní je -8 °C. Určete a) teplotu vnitřního povrchu obvodových stěn chatky, b) teplotu jejich vnějšího povrchu, c) tloušťku dřevěného panelu. Součinitel přestupu tepla na vnitřní straně stěny je 14 W·m⁻¹·K⁻¹ a na vnější straně 12 W·m⁻¹·K⁻¹. Součinitel tepelné vodivosti dřeva je 0,17 W·m⁻¹·K⁻¹.

Řešení:

Vzhledem k tomu, že ztráty tepla podlahou můžeme zanedbat, bude výkon kamínek rovný tepelnému toku střechou a obvodovými stěnami chatky $P = \Phi$, přičemž pro tepelný tok přes mezní vrstvu na povrchu stěny chatky jak zevnitř, tak zvenku, bude platit rovnice získaná drobnou úpravou rovnice (40),

$$\Phi = S\alpha(T' - T).$$

a) Pro přestup tepla na vnitřní straně stěn napíšeme předchozí rovnici s teplotou vzduchu T_1' a teplotou povrchu stěny T_1

$$P = \Phi = S\alpha_1(T_1' - T_1)$$



a odtud zjistíme hledanou teplotu vnitřního povrchu stěny

$$T_1 = T_1' - \frac{P}{S \alpha_1} = 22 \text{ }^\circ\text{C} - \frac{4 \cdot 10^3 \text{ W}}{56 \text{ m}^2 \cdot 14 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 16,9 \text{ }^\circ\text{C}.$$

b) Obdobně zjistíme teplotu vnějšího povrchu stěny

$$T_2 = T_2' + \frac{P}{S \alpha_2} = -8 \text{ }^\circ\text{C} + \frac{4 \cdot 10^3 \text{ W}}{56 \text{ m}^2 \cdot 12 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = -2,0 \text{ }^\circ\text{C}.$$

c) Pro určení tloušťky panelu vyjdeme z rovnice (26). Nahradíme v ní tepelný tok výkonem kamínek

$$P = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{d}$$

a upravíme pro výpočet tloušťky stěny

$$d = \lambda S \frac{T_1 - T_2}{P}.$$

Po dosazení zadaných hodnot bude mít tloušťka stěny hodnotu

$$d = 0,17 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 56 \text{ m}^2 \cdot \frac{16,9 \text{ }^\circ\text{C} + 2,05 \text{ }^\circ\text{C}}{4 \cdot 10^3 \text{ W}} = 0,0451 \text{ m} = 4,5 \text{ cm}.$$



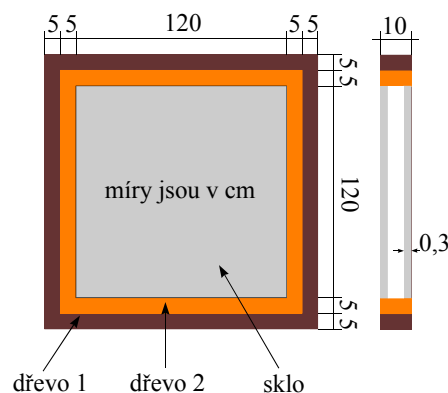
Řešení příklad 3.5

Určete tepelný odpor zdvojeného okna s rámem zkonstruovaného podle obr. 3.8, je-li prostor mezi skleněnými tabulemi vyplněn vzduchem. Tepelný odpor vzduchem vyplněného prostoru je $2,7 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}$ (zahrnuje všechny mechanismy přenosu tepla vzduchovou vrstvou). Součinitel tepelné vodivosti skla je $0,74 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, dřeva pevného rámu $0,21 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a dřeva pohyblivého rámu $0,36 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

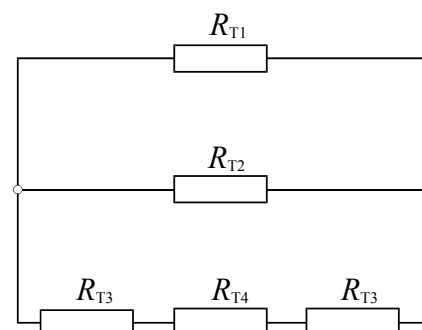


Řešení:

Při dalším řešení budou často využívána následující pravidla platná u odporových sítí: u sériově spojených odporů sčítáme jejich odpory, u paralelně spojených odporů sčítáme jejich vodivosti, odpor je převrácená hodnota vodivosti. Dále již na to nebudeme upozorňovat.



obr. 3.8 Konstrukce zdvojeného okna s rámem



obr. 3.9 Náhradní schéma tepelné sítě pro výpočet tepelného odporu okna

Příklad budeme řešit pomocí náhradního elektrického obvodu, sestaveného na obr. 3.9, ve kterém je možno jednotlivé tepelné odpory popsat rovnicemi:

1) tepelný odpor pevného rámu

$$R_{T1} = \frac{d_1}{\lambda_1 S_1} = \frac{0,1 \text{ m}}{0,21 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 0,27 \text{ m}^2} = 1,76 \text{ K.W}^{-1},$$

2) tepelný odpor pohyblivého rámu, který má stejnou tloušťku s pevným rámem, $d_1 = d_2$

$$R_{T2} = \frac{d_1}{\lambda_2 S_2} = \frac{0,1 \text{ m}}{0,36 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \cdot 0,25 \text{ m}^2} = 1,11 \text{ K.W}^{-1},$$

3) tepelný odpor jedné skleněné tabule

$$R_{T3} = \frac{d_3}{\lambda_3 S_3} = \frac{0,003 \text{ m}}{1,44 \text{ m}^2 \cdot 0,74 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}} = 0,0015 \text{ K.W}^{-1},$$

4) tepelný odpor vzduchového prostoru mezi skly je zadán

$$R_{T4} = 2,70 \text{ K.W}^{-1}.$$

Tepelný odpor vzduchového prostoru a dvou skleněných tabulí označíme R_{T5} . Ve shodě s elektrickým schématem na obr. 3.9 bude (tepelný odpor skel je v tomto příkladu zanedbatelný)

$$R_{T5} = 2 R_{T3} + R_{T4} \cong R_{T4} = 2,70 \text{ K.W}^{-1}.$$

Pro výslednou tepelnou vodivost okna bude ve shodě s elektrickým schématem platit

$$\Lambda_T = \frac{1}{R_{T1}} = \frac{1}{R_{T1}} + \frac{1}{R_{T2}} + \frac{1}{R_{T5}}$$

a po dosazení hodnot

$$\Lambda_T = \frac{1}{1,76 \text{ K.W}^{-1}} + \frac{1}{1,11 \text{ K.W}^{-1}} + \frac{1}{2,70 \text{ K.W}^{-1}} = 1,84 \text{ W.K}^{-1},$$

z čehož vychází tepelný odpor okna

$$R_T = \frac{1}{\Lambda_T} = \frac{1}{1,84 \text{ W.K}^{-1}} = 0,544 \text{ K.W}^{-1}.$$

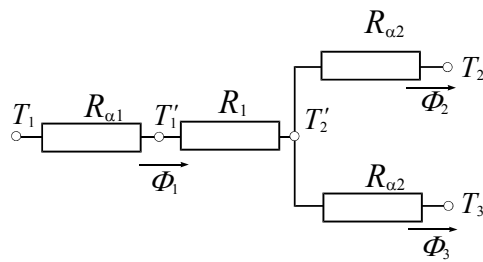
Řešený příklad 3.6

Vypočítejte tepelný výkon, který dodává při vytápění plechový radiátorový článek s tloušťkou plechu 3 mm, jestliže teplota vody v radiátoru je 60 °C. Jeho povrch má plochu 0,18 m². Předpokládejme, že polovina povrchu článku má okolní teplotu vzduchu 26 °C a druhá polovina povrchu má teplotu okolního vzduchu 45 °C. Součinitel tepelné vodivosti plechu je 84 W.m⁻¹.K⁻¹, součinitel přestupu tepla na vnitřním povrchu radiátoru je 84 W.m⁻².K⁻¹ a na vnějším povrchu radiátoru 22 W.m⁻².K⁻¹.





Řešení:



obr. 3.10 Náhradní odporová síť pro příklad „radiátor“

Náhradní odporová síť pro naše zadání je zakreslena na obr. 3.10. Předpokládáme v ní, že vnější povrchová teplota T_2' je na celém povrchu radiátoru, vzhledem k velmi dobré tepelné vodivosti plechu, stejná. Tepelný odpor mezní povrchové vrstvy na vnitřní straně radiátoru je

$$R_{\alpha 1} = \frac{1}{\alpha_1 S},$$

tepelný odpor stěny radiátoru

$$R_1 = \frac{1}{\lambda S}$$

a dva stejné tepelné odpory na dvou různých mezních vrstvách na vnějším povrchu radiátoru budou

$$R_{\alpha 2} = \frac{1}{\alpha_2 \frac{S}{2}} = \frac{2}{\alpha_2 S}.$$

Na obr. 3.10 jsou rovněž zakresleny tepelné toky jednotlivými větvemi odporové sítě a teploty, které se nacházejí uvnitř radiátoru (T_1) a v jeho vnějším okolí (T_2, T_3). Sestavíme rovnice podle pravidel elektrické odporové sítě s tím, že elektrický proud nahradíme tepelným tokem, rozdíl potenciálů (napětí) nahradíme rozdílem teplot a elektrické odpory nahradíme tepelnými odpory.

Pro uzel s teplotou T_2' platí pro tepelné toky rovnice

$$\Phi_1 = \Phi_2 + \Phi_3, \quad (\text{P1})$$

pro horní větev odporové sítě platí

$$T_1 - T_2 = \Phi_1 (R_{\alpha 1} + R_1) + \Phi_2 R_{\alpha 2}, \quad (\text{P2})$$

a pro dolní větev platí

$$T_1 - T_3 = \Phi_1 (R_{\alpha 1} + R_1) + \Phi_3 R_{\alpha 2}. \quad (\text{P3})$$

Úpravou rovnice (P2) dostaneme

$$\Phi_2 = \frac{T_1 - T_2 - \Phi_1 (R_{\alpha 1} + R_1)}{R_{\alpha 2}}, \quad (\text{P4})$$

dosazením rovnice (P1) do rovnice (P3)

$$T_1 - T_3 = \Phi_1 (R_{\alpha 1} + R_1) + (\Phi_1 - \Phi_2) R_{\alpha 2}, \quad (\text{P5})$$

a dosazením rovnice (P4) do (P5) s následnou úpravou vyjde

$$\Phi_1 = \frac{2T_1 - T_2 - T_3}{2R_{\alpha 1} + 2R_1 + R_{\alpha 2}}$$

Po dosazení jednotlivých tepelných odporů z úvodních rovnic bude tepelný tok článkem radiátoru

$$\Phi_1 = \frac{S(T_1 - \frac{T_2 + T_3}{2})}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{d}{\lambda}}$$

a po dosazení zadaných hodnot

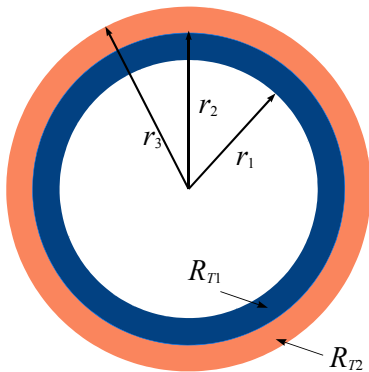
$$\Phi_1 = \frac{0,18 \text{ m}^2 \cdot (60^\circ\text{C} - \frac{26^\circ\text{C} + 45^\circ\text{C}}{2})}{\frac{1}{84 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}} + \frac{1}{22 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}} + \frac{0,003 \text{ m}}{84 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}}} = 76,8 \text{ W}$$

Pokud si dobře všimneme jmenovatele výrazu s dosazenými hodnotami, mohli jsme od začátku zanedbat tepelný odpor stěny radiátoru, který je asi 300 x menší než přechodový tepelný odpor na vnitřním povrchu radiátoru. Ponechali jsem ho tam však z didaktických důvodů, protože ne vždy tomu tak musí být.

Řešený příklad 3.7

Válcové ocelové potrubí pro rozvod tepla, délky 22 m, vnitřního průměru 70 mm a vnějšího průměru 76 mm je obalené azbestovým izolačním obalem tloušťky 30 mm. Vnitřní povrch potrubí má teplotu 10 °C a vnější povrch obalu teplotu -10 °C. Součinitel tepelné vodivosti oceli je 51 W.m⁻¹.K⁻¹ a azbestové izolace 0,129 W.m⁻¹.K⁻¹

a) Vypočítejte ztráty tepla do okolí za 24 hodin. b) Jaké by byly ztráty, kdyby potrubí nebylo obaleno izolačním obalem?



obr. 3.11 Průřez potrubím s izolací

Řešení:

a) Vyjdeme z rovnice pro tepelný odpor válcové stěny (52), kde výšku h nahradíme délkou l . Pro ocelovou válcovou stěnu dostaneme

$$R_{r1} = \frac{1}{2\pi l \lambda_1} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

a pro azbestovou válcovou stěnu bude



$$R_{T2} = \frac{1}{2\pi l \lambda_2} \ln \frac{r_3}{r_2},$$

Výsledný tepelný odpor bude součet

$$R_T = R_{T1} + R_{T2} = \frac{1}{2\pi l \lambda_1 \lambda_2} (\lambda_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \lambda_1 \ln \frac{r_3}{r_2})$$

a s využitím rovnice (29) dostaneme hledaný tepelný tok

$$\Phi = \frac{2\pi l \lambda_1 \lambda_2 \Delta T}{\lambda_2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \lambda_1 \ln \frac{r_3}{r_2}}.$$

Po dosazení bude mít tepelný tok izolovaného potrubí hodnotu

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{2\pi \cdot 51 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot 0,129 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot 22 \text{ m} \cdot 20 \text{ K}}{0,129 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot \ln \frac{76 \text{ mm}}{70 \text{ mm}} + 51 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \cdot \ln \frac{106 \text{ mm}}{76 \text{ mm}}} = \\ &= 1071 \text{ W} = 1,07 \text{ kW}. \end{aligned}$$

a tepelné ztráty izolovaného potrubí za 24 hodin budou

$$Q = \Phi t = 1,07 \cdot 10^3 \text{ W} \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24) \text{ s} = 9,26 \cdot 10^7 \text{ J} = 92,6 \text{ MJ}.$$

b) V případě, že nebude potrubí izolováno, přejde rovnice pro výpočet tepelného toku na základní tvar (52), takže

$$\Phi = \frac{2\pi l \lambda_1 \Delta T}{\ln \frac{r_2}{r_1}}.$$

Po dosazení dostaneme hodnotu tepelného toku neizolovaného potrubí

$$\Phi = \frac{2\pi \cdot 51 \cdot 22 \text{ m} \cdot 20 \text{ K}}{\ln \frac{76 \text{ mm}}{70 \text{ mm}}} = 1,71 \cdot 10^6 \text{ W} = 1,71 \text{ MW}$$

a tepelné ztráty neizolovaného potrubí za 24 hodin

$$Q = \Phi t = 1,71 \cdot 10^6 \text{ W} \cdot (60 \cdot 60 \cdot 24) \text{ s} = 1,48 \cdot 10^{11} \text{ J} = 148 \text{ GJ}.$$



Neřešený příklad 3.8

V tlustostěnné uzavřené kovové nádobě je kapalina teploty T_1 . Teplota vnějšího vzduchu je T_2 . Obecně vypočítejte teplotu vnější stěny nádoby T' , je-li součinitel tepelné vodivosti kovu λ , součinitel přestupu tepla pro rozhraní kov-vzduch α a pro rozhraní kov-kapalina je tento součinitel nekonečně velký. Tloušťka stěny je d . $[T' = \frac{\lambda T_1 + \alpha d T_2}{\lambda + \alpha d}]$



Neřešený příklad 3.9

Tři desky týchž rozměrů jsou položeny na sebe. prostřední deska je olověná, obě krajní jsou stříbrné. Vnější stranu jedné stříbrné desky udržujeme na teplotě 100°C , vnější stranu druhé stříbrné desky udržujeme chlazením v

ledu na teplotě $0\text{ }^{\circ}\text{C}$. Určete teploty na rozhraní olověné desky s oběma stříbrnými. [$98\text{ }^{\circ}\text{C}$; $10,8\text{ }^{\circ}\text{C}$]

Neřešený příklad 3.10

Ve válcové nádobě o poloměru 5 cm a výšce 15 cm je elektrická topná spirála o výkonu 165 W. Teplota na vnějším povrchu nádoby se ustálila na $80\text{ }^{\circ}\text{C}$, přičemž teplota místnosti byla $15\text{ }^{\circ}\text{C}$. Určete součinitel přestupu tepla na povrch nádoby. [$40,4\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$]

**Neřešený příklad 3.11**

Navrhněte správnou tloušťku materiálu použitého na izolaci parní turbíny, jehož součinitel tepelné vodivosti je $0,07\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Turbína pracuje s vodní párou teploty $410\text{ }^{\circ}\text{C}$. Aby nedošlo ke zranění, je kladena podmínka, aby teplota povrchu izolačního materiálu nepřekročila $50\text{ }^{\circ}\text{C}$ při teplotě vzduchu ve strojovně $20\text{ }^{\circ}\text{C}$. Součinitel přestupu tepla na povrchu izolace ve strojovně je $11,9\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, na protilehlém povrchu izolace přestup tepla neuvažujeme. [7 cm]

**Neřešený příklad 3.12**

Pokojová stěna šířky 4 m, výšky 2,4 m a tloušťky 30 cm je postavena z cihel, které mají součinitel tepelné vodivosti $\lambda_c = 0,755\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Stěna obsahuje okno rozměru 2 m x 1,2 m, jehož tepelná vodivost je $\Lambda = 4,3\text{ W}\cdot\text{K}^{-1}$. Stěna je oboustranně omítnuta omítkou tloušťky 2 cm s měrnou tepelnou vodivostí $\lambda_o = 0,87\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Na vnitřní straně stěny je přes celou její šířku do výšky 1,2 m dřevěné obložení tlusté 18 mm (přípevněno se vzduchovou mezerou 3 cm). Součinitel tepelné vodivosti použitého dřeva je $\lambda_d = 0,21\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, vzduchu $\lambda_v = 24\cdot 10^{-3}\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$. Určete tepelnou vodivost stěny. [$12,4\text{ W}\cdot\text{K}^{-1}$]



4 Přenos tepla zářením

Každé tuhé nebo kapalně těleso vysílá do svého okolí elektromagnetické vlnění. Jde o únik části vnitřní energie těles do okolí, tím se těleso ochlazuje. Proto takovému záření říkáme **teplotní záření**.



Teplotní záření vydávají všechna tělesa, jejichž teplota je vyšší než 0 K, tedy všechna reálná tělesa. Je-li teplota zářícího tělesa dostatečně vysoká, vnímáme teplotní záření okem jako světlo.

Ještě nedávno převládal názor, že pro teplotní záření vyzařují jen tělesa silně zahřátá, protože slabé záření nebylo možné měřit. Dnes vlivem velkého rozvoje měřicí elektroniky je již tento názor překonán. Elektronické detektory záření jsou schopné změřit záření těles jejichž teplota je desítky stupňů pod bodem mrazu. Moderní elektronika například, na základě měření a vyhodnocování záření, navádí řízené střely.



Pro lidské oko je teplotní záření pozorovatelné od teplot přibližně 700 °C, kdy se projevuje jako **infračervené záření** (infrazářič). Při vyšších teplotách se k infračervenému záření, které zůstává dominantní, přidává **viditelné světlo** (žárovka). Při velmi vysokých teplotách se v teplotním záření tělesa objevuje i **ultrafialové záření** (Slunce).

4.1 Základní veličiny záření



Pro přenos energie zářením zavádíme **zářivý tok** Φ_e , který určuje energii (teplo), která vystupuje z plochy (povrchu tělesa) nebo prochází danou plochou za časovou jednotku.

Je definován rovnicí

$$\Phi_e = \frac{dQ}{dt}. \quad (55)$$

Zde dt je čas, po který teplo dQ vystupovalo z plochy (procházel plochou). Zářivý tok je kvantitativně shodný s tepelným tokem, který jsme zavedli v článku 2.2 a má jednotku W (watt). Vyjadřuje výkon záření, v němž jsou zastoupeny všechny vlnové délky.



Pro zjištění spektrálního rozdělení zářivého toku v závislosti na vlnové délce záření zavádíme **spektrální tok** (někdy **spektrální zářivý tok**) Φ_λ , který je definován diferenciálním podílem zářivého toku a vlnové délky.

Definujeme ho rovnicí

$$\Phi_\lambda = \frac{d\Phi_e}{d\lambda}, \quad (56)$$

kde $d\Phi_e = \Phi_\lambda(\lambda)d\lambda$ je zářivý tok obsahující jen záření vlnových délek v intervalu $(\lambda, \lambda + d\lambda)$. Spektrální tok má jednotku $\text{W}\cdot\text{m}^{-1}$.

Pomocí zářivého nebo spektrálního toku můžeme vyjádřit energii (teplo), která je přenášena zářením. Vzhledem k definici (56) totiž platí

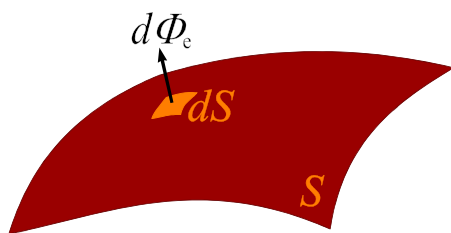
$$\Phi_e = \int_0^\infty \Phi_\lambda d\lambda \quad (57)$$

a celkové teplo přenášené zářením pak v souladu s rovnicí (55) bude

$$Q = \int_0^t \Phi_e dt = \int_0^t \int_0^\infty \Phi_\lambda d\lambda dt, \quad (58)$$

kde t v horní mezi integrálu je čas, po který je záření přenášeno.

Ukazuje se výhodné zavést veličinu, která bude vyjadřovat zářivý tok Φ_e vyzařovaný jednotkovou plochou povrchu tělesa. Bude to **intenzita vyzařování** M_e .



obr. 4.1 K definici intenzity vyzařování

Intenzita vyzařování je definovaná rovnicí

$$M_e = \frac{d\Phi_e}{dS}, \quad (59)$$

kde $d\Phi_e$ je ta část zářivého toku, která je vyzařovaná z povrchu tělesa o ploše dS jak dokumentuje obr. 4.1.

Analogicky zavedeme **spektrální intenzitu vyzařování** M_λ , kterou zase odvodíme od spektrálního zářivého toku Φ_λ .



rovnici

$$M_\lambda = \frac{d\Phi_\lambda}{dS}, \quad (60)$$

kde, podobně jako v definici (59), $d\Phi_\lambda$ je ta část spektrálního toku, která je vyzařovaná z povrchu tělesa o ploše dS .

Se schopností těles vydávat záření úzce souvisí jejich schopnost pohlcovat je. Ukazuje se, že čím lépe těleso záření pohlcuje, tím lépe je i vydává.

Schopnost těles pohlcovat záření vyjadřuje bezrozměrný **spektrální činitel pohlcení** $\alpha(\lambda)$.



Spektrální činitel pohlcení je definovaný poměrem

$$\alpha(\lambda) = \frac{\Phi_{\lambda a}}{\Phi_\lambda}, \quad (61)$$

kde $\Phi_{\lambda a}$ je spektrální tok pohlcený povrchem tělesa a Φ_{λ} je spektrální tok dopadající na povrch tělesa.

4.1.1 Černé těleso



V dalším výkladu budeme sledovat jen záření **černého tělesa**. Je to takové těleso, které má schopnost pohltit veškeré záření, které na něj dopadá. Pro černé těleso tedy v celém rozsahu vlnových délek platí $\alpha(\lambda) = 1$.

4.2 Zákony záření černého tělesa

Teorii záření černého tělesa se zabývali nejdříve na základě empirických poznatků (pozorování) **Stefan**, **Boltzmann** a **Wien** a přestože získali dodnes používané zákony, jejich studie nebyla ucelená.



Teprve později, německý fyzik **Max Karl Planck** (1858-1947), provedl ucelenou kvantovou studii teorie záření, která přinesla řadu nových poznatků, avšak rovněž potvrdila dříve zjištěné rovnice. Planck v roce 1901 odvodil **zákon záření černého tělesa**.

Planckův zákon záření černého tělesa popisuje rovnice

$$M_{\lambda}(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)}, \quad (62)$$

kde konstanty c_1 , c_2 mají hodnoty

$$c_1 = 2 \pi h c^2 = 3,7418 \cdot 10^{-16} \text{ W} \cdot \text{m}^2, \quad (63)$$

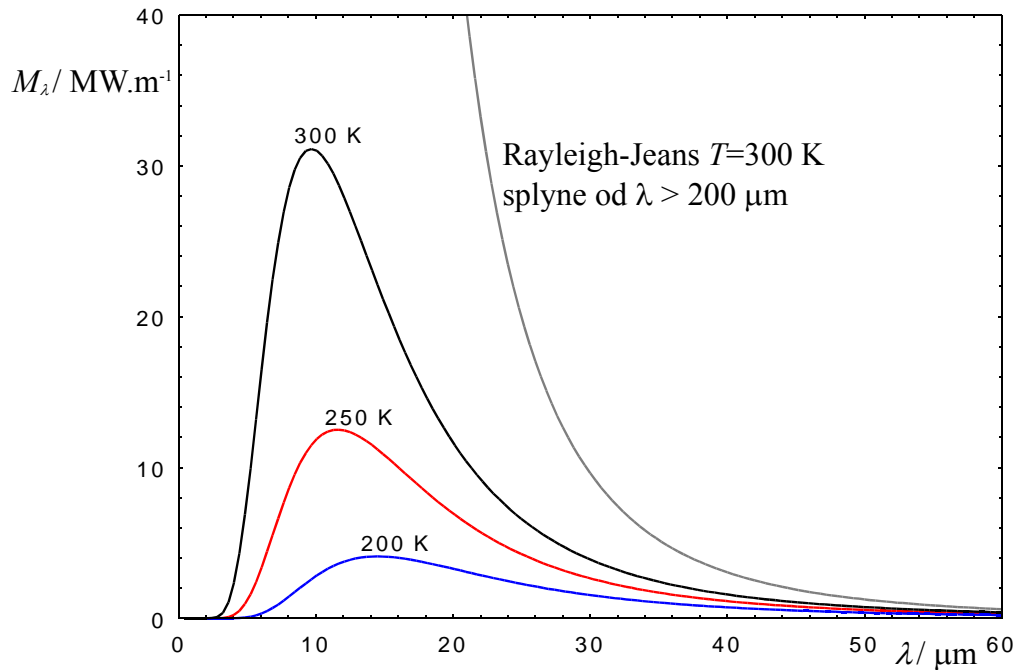
$$c_2 = \frac{h c}{k} = 1,4388 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{K}. \quad (64)$$

Zde h je Planckova konstanta, k je Boltzmannova konstanta a c je rychlost světla. Grafické vyjádření Planckova zákona záření je na obr. 4.2. Vidíme na něm, že se zvyšující se teplotou zářícího tělesa se křivka závislosti spektrální intenzity vyzařování na vlnové délce zužuje a její maximum se posouvá k nižším vlnovým délkám. Pro porovnání je na obr. 4.2 zakreslena rovněž křivka pro **Rayleighův-Jeansův zákon** (1905) $M_{\lambda} = 2\pi k c(T/\lambda^4)$, který souhlasí s průběhem Planckova zákona pouze pro vlnové délky od $\lambda > 200 \mu\text{m}$. Značný nesouhlas Rayleighova-Jeansova zákona od reálného průběhu pro $\lambda \ll 200 \mu\text{m}$ byl nazván **ultrafialová katastrofa**.

Integrací Planckova zákona, v souladu s rovnicí (57), dostaneme **Stefanův-Boltzmannův zákon záření černého tělesa** ve tvaru

$$M_e(T) = \sigma T^4, \quad (65)$$

kde σ je Stefanova-Boltzmannova konstanta,



obr. 4.2 Grafické znázornění Planckova zákona záření

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,6705 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4} \quad (66)$$

Nejintenzivnější záření je vyzařováno pro určitou vlnovou délku λ_m . Tato vlnová délka je určena maximem spektrální intenzity v Planckově rovnici (62).

Najdeme ji tak, že splníme podmínku $\frac{\partial M_\lambda}{\partial \lambda} = 0$. Pak dostaneme **Wienův posunovací zákon**

$$\lambda_m T = b, \quad (67)$$

kde b je **Wienova konstanta**, $b = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$. Podíváme-li se na obr. 4.2, můžeme vlastnost popsanou rovnicí (67) pozorovat. S klesající teplotou z 300 K na 200 K roste vlnová délka maxima funkce z $9,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ na $1,45 \cdot 10^{-5} \text{ m}$.

4.2.1 Záření reálných těles

Zákony záření černého tělesa lze s jistou úpravou použít i pro reálná tělesa, která se nechovají jako absolutně černá, tj. která nepohlcují veškeré záření jež na ně dopadne. Musíme však zavést **spektrální emisivitu**, která je definována poměrem

$$\varepsilon(\lambda) = \frac{M'_\lambda}{M_\lambda}, \quad (68)$$

kde M'_λ je spektrální intenzita vyzařování reálného tělesa a M_λ je spektrální intenzita vyzařování absolutně černého tělesa, přičemž obě tělesa mají stejnou teplotu. Reálné těleso vždy vyzařuje méně než absolutně černé, proto $\varepsilon < 1$.

Známe-li spektrální emisivitu tělesa, můžeme na základě rovnice (68) určit jeho vyzařování rovnicí

$$M_{\lambda}' = \varepsilon M_{\lambda}. \quad (69)$$

V hrubém přiblížení je spektrální emisivita tělesa rovna jeho spektrálnímu činiteli pohlcení, $\varepsilon(\lambda) \approx \alpha(\lambda)$.

4.2.2 Reálné tepelné vyzařování z povrchu tělesa

Pokud studujeme reálné tepelné vyzařování z povrchu tělesa, musíme si

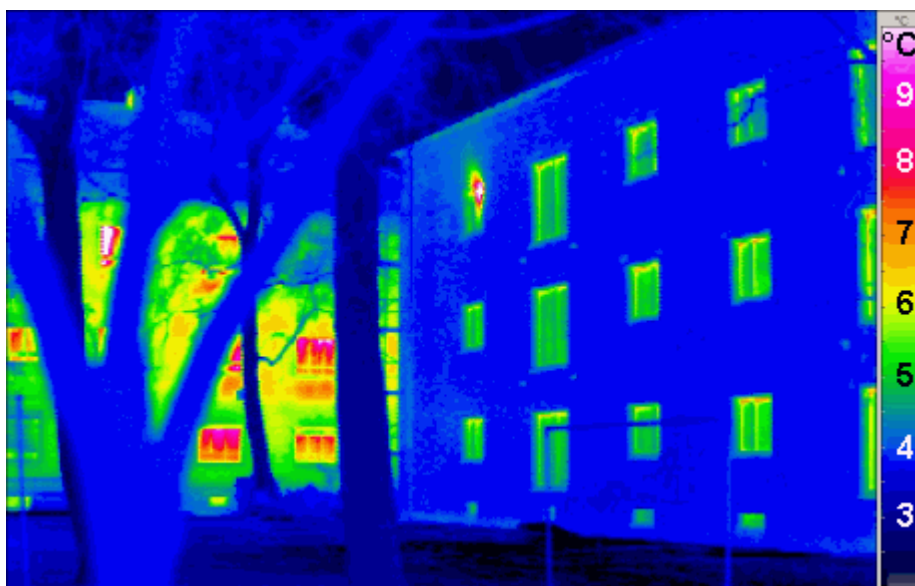


obr. 4.3 Infračervená fotografie (termogram) lidského těla

uvědomit, že v okolí tělesa je prostředí. Teplota prostředí je většinou odlišná od teploty zářiče méně než několik desítek K. V takovém případě musíme předpokládat, že proti tepelnému toku zářícího tělesa teče opačný tepelný tok z prostředí na těleso. Výsledný tepelný tok pak, bude s využitím Stefanova–Boltzmannova zákona, rozdílem obou toků, tedy

$$\Phi_e = \varepsilon \sigma S(T^4 - T_0^4), \quad (70)$$

kde T je teplota zářícího tělesa a T_0 je teplota okolního prostředí. Pomocí rovnice (70) se řeší reálné výpočty v technické praxi, teploty se dosazují v K. Vzhledem k tomu, že teploty vystupují ve čtvrtých mocninách, při teplotě zářícího tělesa větší než 350 °C (623 K) a teplotě okolního prostředí 20 °C (293 K) lze teplotu okolního prostředí zanedbat.



obr. 4.4 Termogram pasivní budovy s tradiční budovou v pozadí. Jedná se o budovu postavenou nejmodernějšími technologiemi s velmi nízkými nároky na vytápění.

4.3 Kontrolní otázky



- (1) Co je to teplotní záření? Vyložte jeho vznik.
- (2) Je možné vidět lidským okem záření těles, jejichž teplota je nad 700 °C?
- (3) Co je to zářivý tok a co je spektrální tok? Jak se od sebe liší?
- (4) Co je to intenzita vyzařování a co je spektrální intenzita vyzařování? Jak se od sebe liší? Jak tyto veličiny souvisí se zářivým tokem a jak se spektrálním tokem?
- (5) Vyjádřete přenesené teplo zářením pomocí a) zářivého toku, b) spektrálního toku.
- (6) Který ze zákonů záření černého tělesa má ve fyzice základní význam a proč?
- (7) Vyjádřete graficky závislost spektrální intenzity vyzařování na teplotě.
- (8) Vyjádřete graficky závislost zářivého toku na teplotě.
- (9) Jakou křivku vytváří závislost vlnové délky příslušející maximální spektrální intenzitě vyzařování na teplotě? Vyjádřete ji graficky.

4.4 Příklady k procvičení

Řešený příklad 4.1

Na 1 cm² zemského povrchu dopadá ze Slunce asi 8,12 J energie za minutu. Jaká je povrchová teplota Slunce za předpokladu, že září jako absolutně černé těleso? Vzdálenost Slunce od Země je 149,5 · 10⁶ km a poloměr Slunce je 695 550 km.

Řešení:

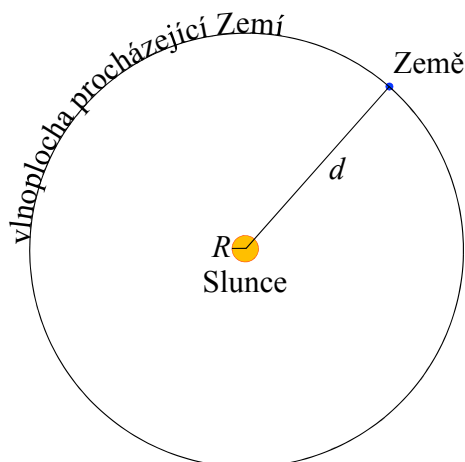
Stefanův-Boltzmannův zákon záření (65) určuje energii, kterou vyzařuje 1 m² povrchu Slunce za 1 s. Celý sluneční povrch vyzaří za jednotku času energii

$$\Phi_e = S M_e = 4 \pi R^2 \sigma T^4.$$

Tato energie, v souladu s obr. 4.5, dopadne na vlnoplochu tvaru koule, jejíž poloměr d je roven vzdálenosti Země-Slunce. Na plošnou jednotku této vlnoplochy dopadne energie

$$E = \frac{\Phi_e}{4 \pi d^2}.$$

Dosazením první rovnice do druhé dostaneme



obr. 4.5 K příkladu ... Vzájemná poloha Slunce a Země



$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \sigma T^4 \frac{R^2}{d^2}$$

a odtud

$$T = \sqrt[4]{\frac{d}{R} \frac{E}{\sigma}}$$

Po dosazení číselných hodnot bude

$$T = \sqrt[4]{\frac{1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}}{6,96 \cdot 10^8 \text{ m}} \cdot \frac{8,12 \cdot 10^4 \text{ m}^2}{60}}{\sqrt[4]{5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}}} = 5770 \text{ K} = 5497 \text{ } ^\circ \text{C}.$$



Řešený příklad 4.2

Jaký proud musí téct kovovým vláknem pyrometru, jehož poloměr je 0,05 mm, aby se jeho teplota udržovala na hodnotě 2500 K? Měrný odpor vlákna je $2,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$. Předpokládejte, že vlákno září jako absolutně černé těleso a tepelné ztráty zanedbejte.



Řešení:

Září-li vlákno jako absolutně černé těleso, vyzařuje podle Stefanova-Boltzmannova zákona záření (65) do okolního prostoru výkon

$$\Phi_e = S \sigma T^4,$$

kde $S = \pi d l$ je plocha povrchu vlákna průměru d a délky l (plášť válce). Tento výkon musíme vláknu dodávat pomocí elektrického proudu, tedy

$$P = UI = RI^2.$$

Za odpor dosadíme $R = \rho \frac{l}{\frac{1}{4}\pi d^2} = \frac{4\rho l}{\pi d^2}$ a rovnice porovnáme.

$$\Phi_e = P$$

$$\pi d \sigma T^4 = \frac{4\rho}{\pi d^2} I^2.$$

Další úpravou

$$I = \sqrt{\frac{\pi^2 d^3 \sigma T^4}{4\rho}} = \frac{1}{2} \pi d T^2 \sqrt{\frac{d\sigma}{\rho}}.$$

Po dosazení hodnot bude

$$I = \frac{1}{2} \pi 1 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot (2500 \text{ K})^2 \cdot \sqrt{\frac{1 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}}{2,5 \cdot 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}}} = 1,48 \text{ A}.$$



Řešený příklad 4.3

Polovodičovým fotocitlivým radiačním snímačem máme bezkontaktně změřit teplotu absolutně černého tělesa, která se nachází v okolí hodnoty 2000 K. K dispozici máme tři druhy polovodičových snímačů: germaniový,

galium arsenidový (GaAs) a na bázi sirníku kadmia (CdS). Uvedené materiály mají svoji největší citlivost pro následující energie fotonů (v pořadí, jak jsou uvedeny v předcházející větě): 0,805 eV; 1,42 eV; 2,41 eV. Uvedené hodnoty jsou zároveň energetické hodnoty pásů zakázaných energií zmíněných polovodičů. Který snímač použijeme?

Řešení:



Určíme v jaké oblasti vlnových délek těleso maximálně září. Použijeme k tomu Wienův zákon (67). Dostaneme

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

takže uvažované těleso bude nejvíce vyzařovat v okolí vlnových délek

$$\lambda_m = \frac{2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}}{2000 \text{ K}} = 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Energie fotonu je $E_f = hf$, kde h je Planckova konstanta $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

a f je frekvence záření, která souvisí s vlnovou délkou vztahem $f = \frac{c}{\lambda}$ (c je rychlost světla). Takže, po dosazení za f a úpravě zjistíme, že uvažované polovodičové snímače jsou nejvíce citlivé pro vlnovou délku

$$\lambda = \frac{hc}{E_f}.$$

Uvědomíme-li si, že 1 eV je $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, můžeme pomocí poslední rovnice najít vlnové délky, pro které jsou snímače nejcitlivější. Germanium bude nejcitlivější pro vlnovou délku

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{0,805 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 1,544 \cdot 10^{-6} \text{ m},$$

GaAs pro vlnovou délku

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{1,42 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 0,875 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

a CdS bude nejcitlivější pro vlnovou délku

$$\lambda = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}{2,41 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 0,515 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Porovnáme-li získané výsledky s hodnotou $\lambda_m = 1,45 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ získanou na začátku řešení, vidíme, že pro uvažované měření bude nejcitlivější germaniový snímač, zatímco snímač GaAs a zejména snímač CdS budou vhodné pro podstatně vyšší teploty.

Řešený příklad 4.4

Z Planckova zákona záření černého tělesa odvoďte Stefanův-Boltzmannův zákon záření.





Řešení:

Vyjdeme z rovnice (57), kterou převedeme na tvar s intenzitami vyzařování (dosadíme $\Phi_e = M_e S$, podobně $\Phi_\lambda = M_\lambda S$), tedy

$$M_e = \int_0^\infty M_\lambda d\lambda$$

a za M_λ dosadíme Planckův zákon (62), takže máme vyřešit integrál

$$M_e = \int_0^\infty \frac{c_1}{\lambda^5 (e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1)} d\lambda .$$

Provedeme substituci $x = \frac{c_2}{\lambda T}$ a najdeme

$$\lambda = \frac{c_2}{T} x^{-1} , \quad \frac{d\lambda}{dx} = -\frac{c_2}{T} x^{-2} ,$$

což dosadíme do rovnice integrálu. Bude

$$\begin{aligned} M_e &= \int_\infty^0 \frac{c_1}{\left(\frac{c_2}{T} x^{-1}\right)^5 (e^x - 1)} \left(-\frac{c_2}{T} x^{-2} dx\right) = \\ &= \frac{c_1 T^4}{c_2^4} \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx, \end{aligned}$$

kde integrál má hodnotu

$$\int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} .$$

Po dosazení za konstanty c_1 a c_2 dostaneme Stefanův-Boltzmannův zákon záření

$$M_e = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} T^4 = \sigma T^4 .$$



Řešený příklad 4.5

Z Planckova zákona záření černého tělesa odvoďte Wienův posunovací zákon záření.



Řešení:

Vlnová délka ve Wienově posunovacím zákoně musí splňovat podmínku maxima funkce $\frac{\partial M_\lambda}{\partial \lambda} = 0$. Dosadíme-li do této podmínky Planckův zákon záření, dostaneme rovnici

$$-\frac{5c_1}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} + \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{\frac{c_2}{\lambda^2 T} e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{\left(e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1\right)^2} = 0 ,$$

kteřou zkrátíme výrazem $\frac{c_1}{\lambda^6} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$ a dostaneme

$$\frac{c_2}{\lambda T} \cdot \frac{e^{\frac{c_2}{\lambda T}}}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} = 5$$

Zavedeme substituci $x = \frac{c_2}{\lambda T}$ a dostaneme rovnici

$$x e^x = 5(e^x - 1) ,$$

kteřou vyřešíme a najdeme hodnotu $x = 4,965$. Substituci $x = \frac{c_2}{\lambda T}$ upravíme

pro oblast maximálního vyzařování na tvar $\lambda_m T = \frac{c_2}{x} = b$, kde jsme vlnovou délku označili indexem maxima a současně zavedli Wienovu konstantu $b = c_2/x$. Po dosazení konstanty c_2 z rovnice (64) a $x = 4,965$ dostaneme $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$ m.K.

Neřešený příklad 4.6

Na jaký rozsah vlnových délek musí být citlivé teplotní čidlo, aby měřilo teplotu v rozmezí 200 °C až 400 °C? [4,31 μm až 6,13 μm]



Neřešený příklad 4.7

Žárovka má vlákno dlouhé 12 cm o průměru 0,2 mm. Na žárovce je údaj 60 W, 220 V. Určete teplotu vlákna za předpokladu, že žárovka je připojena na udané napětí. [1663 °C]



Neřešený příklad 4.8

Vypočítejte celkový zářivý tok vycházející ze žárovky s válcovým vláknem průměru 0,14 mm a délky 12 cm, je-li jeho teplota 2750 °C za předpokladu, že a) považujeme vlákno žárovky za černé těleso, b) činitel pohltivosti vlákna je 0,4. [a) 250 W, b) 100 W]



5 Závěr



5.1 Shrnutí

Modul PŘENOS TEPLA pojednává o oblasti fyziky, která má pro stavebnictví mimořádný význam. Byly zde vysvětleny způsoby přenosu tepla, základní veličiny vedení tepla, Fourierův zákon vedení tepla, tepelná vodivost, diferenciální rovnice vedení tepla, ustálené vedení tepla rovinnými stěnami, vedení tepla válcovou stěnou a přestup tepla.

5.2 Studijní prameny



5.2.1 Seznam použité literatury

- [1] Schauer, P. *Termika a záření*. CERM 1998
- [2] Horák, Z., Krupka, F. *Fyzika*. SNTL/ALFA 1976, 2 svazky
- [3] Binko, J., Kašpar, I. *Fyzika stavebního inženýra*. SNTL/ALFA 1983
- [4] Krempaský, J. *Fyzika*. ALFA/SNTL 1982



5.2.2 Seznam doplňkové studijní literatury

- [5] Holliday, D., Resnick, R., Walker, J. *Fyzika*. VUT/VUTIUM 2000



5.2.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

- [6] <http://fyzika.fce.vutbr.cz>