VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

LUBOŠ PAZDERA

FYZIKA

MODUL M05

MECHANICKÉ KMITÁNÍ A VLNĚNÍ

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

Uvedený modul prohlubuje znalosti v oblasti fyziky, která se zabývá mechanickým kmitáním a vlněním. Studenti se seznámí s volným kmitáním netlumeným a tlumený, vynuceným kmitáním, skládáním kmitů a základy vlnění.

1.2 Požadované znalosti

U studentů se požadují znalosti fyzikálních pojmů na úrovni gymnázia. Také z matematiky je potřebná znalost úpravy vztahů, která odpovídá rozsahu gymnázia a také derivací, integrací a operací s goniometrickými funkcemi. Vhodná je také znalost fyziky v oblasti kinematiky a dynamiky hmotného bodu a těles.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul je tvořen šestnácti kapitolami.

Při studiu jde především o pochopení základního smyslu uváděného učiva, pochopení jeho struktury a postupného osvojení při cvičení nebo konzultacích.

1.4 Klíčová slova

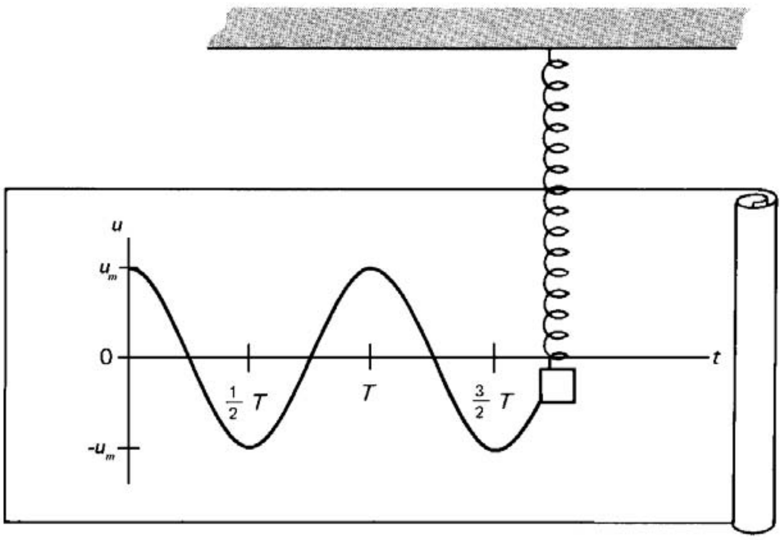
Kmitání, volné kmity, nucené resp. vynucené kmity, tlumené kmity, lineární harmonický oscilátor, perioda, frekvence, úhlová frekvence, fáze, počáteční fáze, koeficient tlumení, kmit, kyv, matematické kyvadlo, fyzické kyvadlo, rezonance, vlnění, postupná vlna, podélná vlna, příčná vlna, vlnočet, stojaté vlnění, vlnová rovnice, interference, Dopplerův jev.

2 Volné harmonické kmity

Mnoho objektů vibruje nebo osciluje - těleso na konci pružiny, ladička, světlo majáku, kyvadlo, struna kytary či piana. Pavouk cítí vibrace pavučiny s lapenou kořistí. Auto vibruje, když jede po nerovném povrchu, stavby a mosty vibrují při přejezdu těžkého auta či při silném větru. Neméně významné oscilace jsou v elektrotechnice u rádia, televize, monitorů a dalších elektrických zařízení. Atomy v molekulách pevných látek kmitají okolo relativně pevné polohy. Dále se budeme zabývat idealizovaným kmitáním. Budeme rozlišovat kmitání tlumené a netlumené.

2.1 Teorie

Kmitáním (oscilací) nazýváme pohyb hmotného bodu do konečné vzdálenosti u_{m} okolo rovnovážné polohy (obr. 2.1). Volné kmitání je takové kmitání, které není neustále buzeno vnější silou. Pokud je pohyb bodu pravidelný, jedná se o děj periodický. Zvláštním často se vyskytujícím periodickým pohybem je pohyb harmonický, který můžeme popsat goniometrickou funkcí kosinus (sinus).



obr. 2.1 Kmitání hmotného bodu.

Výchylkou harmonického pohybu hmotného bodu nazýváme vzdálenost tohoto bodu od rovnovážné polohy. Výchylku u harmonického pohybu můžeme jako funkci času t popsat rovnicí

$$u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \ , \qquad (2.1)$$

kde u_m je amplituda (maximální výchylka), $\Theta = \omega \cdot t + \varphi$ je fáze, ω je úhlová frekvence a φ je počáteční fáze. Kmitem považujeme pohyb z maximální výchylky u_m přes rovnovážnou polohu do minimální výchylky $-u_m$ a zpět do maximální výchylky u_m. Čas trvání jednoho kmitu udává perioda T. Kyv je polovina kmitu. Frekvencí f pak nazýváme počet kmitů za jednotku času.

Protože funkce kosinus a sinus se dají vyjádřit analogickým způsobem, může být výchylka bodu dle (2.1) vyjádřena

$$u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = u_m \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \varphi - \frac{\pi}{2}\right) = u_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_s) \ . \qquad (2.2)$$

Vztah mezi periodou T [s] a frekvencí f [Hz] je dán rovnicí

$$f = \frac{1}{T} \ \text{a tedy} \ T = \frac{1}{f} \ . \qquad (2.3)$$

Protože výchylka harmonického pohybu se opakuje po jednom kmitu platí $u(t) = u(t+T)$ a tedy po dosazení do (2.1) dostaneme

$$u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = u_m \cdot \cos[\omega \cdot (t+T) + \varphi] \ . \qquad (2.4)$$

Protože funkce kosinus má periodu $2\cdot\pi$, pro úhlovou frekvenci ω [s^{-1}] platí

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f \ \text{a tedy} \ \omega = \frac{2\cdot\pi}{T} \ . \qquad (2.5)$$

Rychlost $v(t)$ tělesa vykonávající harmonický pohyb je dána vztahem

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = -u_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -v_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \ , \qquad (2.6)$$

kde v_m je amplituda rychlosti (maximální rychlost) [m·s^{-1}]. Obdobně jako rychlost vyjádříme zrychlení harmonického pohybu vztahem

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} = -u_m \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -a_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$$
$$a(t) = -\omega^2 \cdot u(t) \ , \qquad (2.7)$$

kde a_m je amplituda zrychlení (maximální zrychlení) [m·s^{-2}].

Kontrolní otázky

Jaký je rozdíl mezi pojmy fáze a počáteční fáze?

Jaký je rozdíl mezi frekvencí a úhlovou frekvencí?

Kolik kyvů obsahuje jeden kmit?

Příklad 2.1

Hmotný bod je zavěšen na nehmotné niti. Při vychýlení z rovnovážné polohy začne kmitat tak, že se do počáteční polohy dostane za 2 s. Předpokládejme, že kmitání je harmonické. Jaká je perioda kmitání, frekvence a úhlová frekvence?

Řešení

Protože kmit trvá dobu jedné periody je $T = 2$ s.

Frekvenci kmitů f vypočteme z (2.3)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\,\mathrm{s}} = 0{,}5\,\mathrm{Hz}\,.$$

Rovnice (2.5) umožňuje vyjádřit úhlovou frekvenci

$$\omega = \frac{2\cdot\pi}{T} = \frac{2\cdot\pi}{(2\,\mathrm{s})} = \pi\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1} \;\; \textit{resp.} \;\; \omega = \pi\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Perioda kmitů je 2 s, frekvence je 0,5 Hz a úhlová frekvence je $\pi\,s^{-1}$.

Příklad 2.2

Vypočtěte periodu, rychlost a zrychlení pohybu hmotného bodu, který je popsán rovnicí $u(t) = (0{,}06\,\mathrm{m})\cdot\cos\left[\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{2}{3}\cdot\pi\right]$.

Řešení

Rychlost hmotného bodu vypočteme derivací výchylky podle času

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = -(0{,}06\,\mathrm{m})\cdot\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot\sin\left[\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{2}{3}\cdot\pi\right]$$

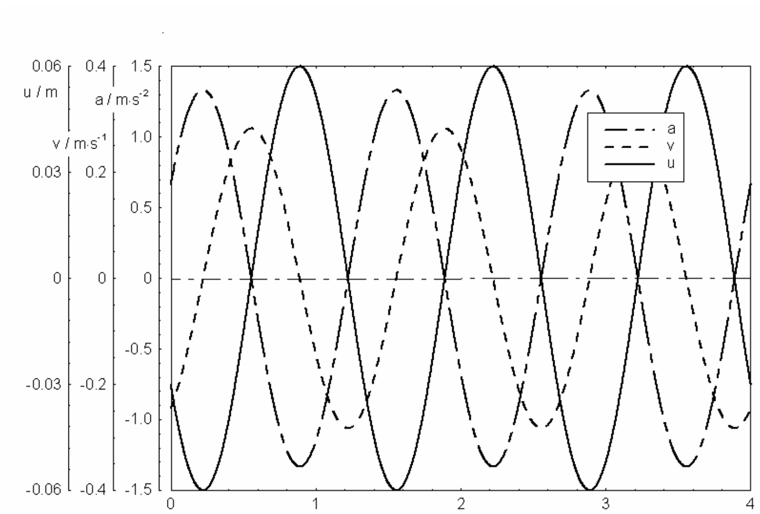
$$v(t) = -\left(0{,}09\cdot\pi\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot\sin\left[\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{2}{3}\cdot\pi\right]$$

a zrychlení derivací rychlosti

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -\left(0{,}09\cdot\pi\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot\cos\left[\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{2}{3}\cdot\pi\right]$$

$$a(t) = -\left(0{,}135\cdot\pi^2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)\cdot\sin\left[\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{2}{3}\cdot\pi\right].$$

Perioda kmitů je z (2.5) $T = \frac{2\cdot\pi}{\omega} = \frac{2\cdot\pi}{\left(1{,}5\cdot\pi\,\mathrm{s}^{-1}\right)} = \frac{4}{3}\,\mathrm{s} \cong 1{,}3\overline{3}\,\mathrm{s}\,.$



obr. 2.2 Průběh výchylky u, rychlosti v a zrychlení a ve 3 periodách.

Příklad 2.3

Těleso koná harmonické kmity, jejichž perioda je 6 s, na počátku má maximální výchylku. Za jakou dobu od počátku pohybu je výchylka rovna polovině amplitudy výchylky?

Řešení

V souladu s textem si označme T = 2 s. Jelikož počáteční výchylka je maximální dle (2.1) bude $\varphi = 0$*, protože*

$$u(0\,\mathrm{s}) = u_m = u_m \cdot \cos[\omega \cdot (0\,\mathrm{s}) + \varphi] = u_m \cdot \cos(\varphi) \text{ tedy } \cos(\varphi) = 1 .$$

V hledaném okamžiku t_h *bude výchylka* $u(t_h) = \frac{u_m}{2}$*, pak dosazením do (2.1)*

dostaneme $u(t_h) = \frac{u_m}{2} = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t_h)$.

Odtud s použitím rovnice (2.5) $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ *získáme rovnici*

$$\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t_h\right) = \frac{1}{2} \text{ tj. } t_h = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{T}{2 \cdot \pi} = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{(6\,\mathrm{s})}{2 \cdot \pi} = 1\,\mathrm{s} .$$

Poloviční amplitudy dosáhne kmitání v době 1 s od počátku.

2.2 Autotest

A 1 Napište vztah pro výchylku harmonického kmitavého pohybu a uveďte význam jednotlivých veličin.

A 2 Uveďte rozdíl mezi fází a počáteční fází.

A 3 Jak se liší frekvence a úhlová frekvence?

A 4 Lze tentýž harmonický kmitavý pohyb popsat funkcí kosinus i sinus?

2.3 Shrnutí

Výchylka kmitavého harmonického pohybu je

$$u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \; .$$

Perioda, frekvence a úhlová frekvence kmitání jsou ve vztahu

$$T = \frac{1}{f} \text{ a } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \; .$$

Rychlost a zrychlení kmitavého harmonického pohybu je

$$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = -v_m \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2u(t)}{dt^2} = -a_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = -u(t) \cdot \omega^2 \; .$$

3 Lineární harmonický oscilátor

3.1 Teorie

Jednoduchou formou periodického pohybu je pohyb tělesa, které je nahrazeno hmotným bodem uchyceným na konci vinuté pružiny (obr. 3.1). Elastická síla F_p [N] působící na pružinu je dána vztahem

$$F_p = -k \cdot u\,, \qquad (3.1)$$

kde k je tuhost pružiny [$N \cdot m^{-1}$] a u je výchylka z rovnovážné polohy [m]. Poddajnost c [$m \cdot N^{-1}$] je převrácená hodnota tuhosti

$$c = \frac{1}{k}\,. \qquad (3.2)$$

Použitím Newtonova pohybového zákona dostaneme rovnici

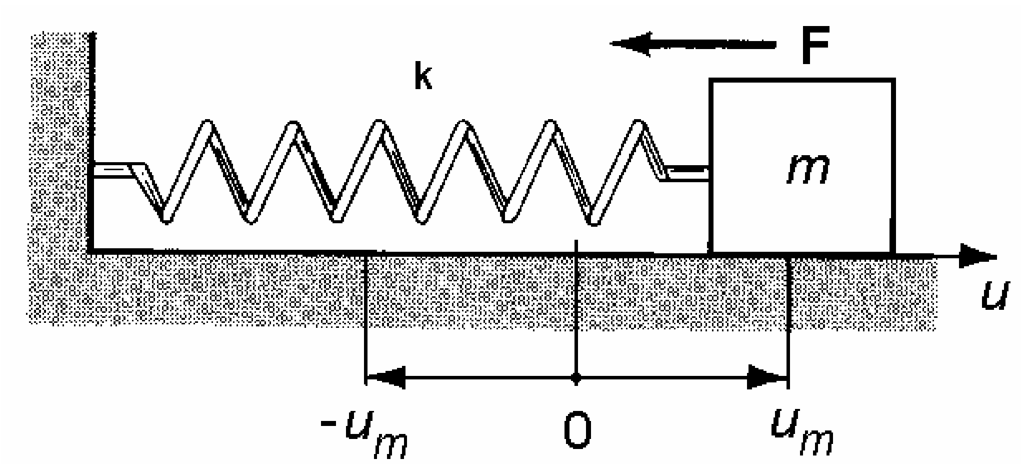
$$F_p = m \cdot a = m \cdot \frac{d^2u}{dt^2}\,, \qquad (3.3)$$

kde a je zrychlení [$m \cdot s^{-2}$], m hmotnost hmotného bodu [kg]. Spojením rovnic (3.1) a (3.3) vznikne homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty

$$m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} + k \cdot u = 0 \text{ resp. } \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot u = 0\,, \qquad (3.4)$$

která je analogická s rovnicí

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 \cdot u = 0\,. \qquad (3.5)$$



obr. 3.1 Lineární harmonický oscilátor.

Rovnice (3.5) je rovnicí pro řešení netlumeného kmitání. Porovnáním rovnic (3.4) a (3.5) dostaneme úhlovou frekvenci

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \; . \qquad (3.6)$$

Výchylku pohybu dostaneme řešením rovnice (3.4) ve tvaru

$$u(t) = u_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) \text{ resp. } u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) \; , \qquad (3.7)$$

kde u_m je amplituda [m], φ je počáteční fáze [rad], ω je úhlová frekvence [s^{-1}] a t je čas [s].

Rychlost kmitavého pohybu pružiny dostaneme derivací výchylky (2.6) dle času

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} = -u_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) = -v_m \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) \qquad (3.8)$$

a zrychlení (2.7) derivací rychlosti dle času

$$a(t) = \frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -u_m \cdot \frac{k}{m} \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right) = -a_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t + \varphi\right)$$
$$\text{tj. } a(t) = -\frac{k}{m} \cdot u(t) \; , \qquad (3.9)$$

Kontrolní otázky

?

Které parametry (veličiny) ovlivňují frekvenci kmitání lineárního netlumeného harmonického oscilátoru?

Jaká je rychlost a zrychlení v okamžicích, kdy je výchylka maximální, nulová či minimální?

Příklad 3.1

Pružina se při zatížení 0,3 kg stlačí o 150 mm. Pružinu jsme s tímto závažím vychýlili o 100 mm z rovnovážné polohy a pustili. Určete tuhost pružiny, úhlovou frekvenci, maximální rychlost a maximální zrychlení.

Řešení

V souladu s obr. 3.1 označme všechny použité veličiny v základních jednotkách SI – $u_l = 0{,}15$ m, $m = 0{,}3$ kg, $u_m = 0{,}1$ m. Tíhové zrychlení budeme uvažovat $g = 9{,}81\ m \cdot s^{-2}$.

Tuhost pružiny vypočteme z (3.1)

$$k = \frac{F}{u} = \frac{m \cdot g}{u_1} = \frac{(0{,}3\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}})}{(0{,}15\,\mathrm{m})} = 19{,}6\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}.$$

Úhlovou frekvenci získáme z (3.7)

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(19{,}6\,\mathrm{N \cdot m^{-1}})}{(0{,}3\,\mathrm{kg})}} = 8{,}1\,\mathrm{s^{-1}}.$$

Rovnice (2.6) nám umožňuje vypočítat maximální rychlost

$$v_m = u_m \cdot \omega = (0{,}1\,\mathrm{m}) \cdot (8{,}1\,\mathrm{s^{-1}}) = 0{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

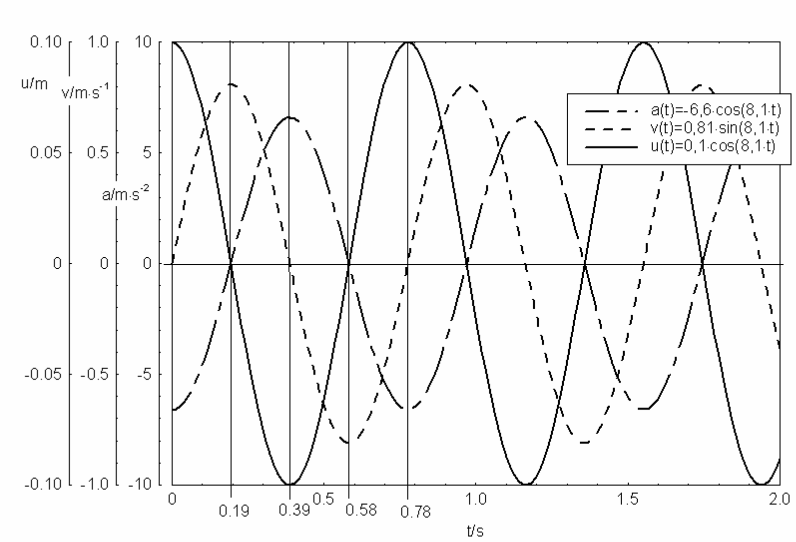
Maximální zrychlení vypočteme z (2.7)

$$a_m = u_m \cdot \omega^2 = (0{,}1\,\mathrm{m}) \cdot (8{,}1\,\mathrm{s^{-1}})^2 = 6{,}6\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Tuhost pružiny je 19,6 N·m^{-1}, úhlová frekvence 8,1 s^{-1}, maximální rychlost 0,81 m·s^{-1} a maximální zrychlení 6,6 m·s^{-2}.

Na obr. 3.2 jsou v grafu vyneseny průběhy výchylky u(t), rychlosti v(t) a zrychlení a(t). Každá křivka má vlastní svislou osu (u – výchylka, v - rychlost, a - zrychlení). Perioda kmitání z (2.5) je

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{(8{,}1\,\mathrm{s^{-1}})} \cong 0{,}78\,\mathrm{s}.$$



obr. 3.2 Průběh výchylky, rychlosti a zrychlení

V grafu jsou navíc vyznačeny časové okamžiky $\frac{T}{4} \cong 0{,}19\,\mathrm{s}$, $\frac{T}{2} \cong 0{,}39\,\mathrm{s}$,

$\frac{3}{4} \cdot T \cong 0{,}58\,\mathrm{s}$ *a* $T \cong 0{,}78\,\mathrm{s}$.

Příklad 3.2

Těleso o hmotnosti 1,5 kg je zavěšeno na pružině o tuhosti 600 N·m^{-1}. V čase t = 0 s byla pružina napnuta a puštěna. V čase 30 ms byla rychlost pohybu tělesa 35 mm·s^{-1}. Určete amplitudu kmitání a výchylku v uvedeném čase.

Řešení

V souladu s obr. 3.1 označme všechny použité veličiny v základních jednotkách SI – m = 1,5 kg, k = 600 N·m^{-1}, t_1 = 0,03 s, v_1=v(t_1)= 0,1 m·s^{-1}. Protože v počátečním stavu byla pružina napnuta maximální amplitudou dostaneme počáteční fázi dle (3.7) φ = 0.

Rychlost pohybu tělesa je dána rovnicí (3.8)

$$v(t) = -u_m \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right) \quad \textit{a amplituda} \quad u_m = -\frac{v_1}{\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_1\right)} .$$

$$u_m = -\frac{\left(0{,}1\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}\right)}{\sqrt{\frac{\left(600\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\right)}{\left(1{,}5\,\mathrm{kg}\right)}} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{\left(600\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\right)}{\left(1{,}5\,\mathrm{kg}\right)}} \cdot \left(0{,}03\,\mathrm{s}\right)\right]} \cong 8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}..$$

Výchylka v čase t_1 = 0,03 s bude dle (3.7)

$$u(t_1) = u_m \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t_1 + \varphi\right)$$

$$u(0{,}03) = \left(8{,}85 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\right) \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{\left(600\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}\right)}{\left(1{,}5\,\mathrm{kg}\right)}} \cdot \left(0{,}03\,\mathrm{s}\right)\right] \cong 7{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}$$

Amplituda kmitání je 8,85 mm a výchylka v čase 30 ms je 7,3 mm.

3.2 Autotest

A 5 Jak určíte tuhost pružiny?

3.3 Shrnutí

Síla od pružiny je

$$F_p = -k \cdot u \ .$$

Diferenciální rovnice vyjadřující výchylku harmonického netlumeného kmitání je

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \omega^2 \cdot u = 0 \ .$$

Úhlová frekvence lineárního harmonického oscilátoru tvořeného pružinou a hmotným bodem

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ .$$

4 Energie harmonických kmitů

4.1 Teorie

Pro mechanickou energii harmonického lineárního netlumeného oscilátoru platí zákon zachování mechanické energie

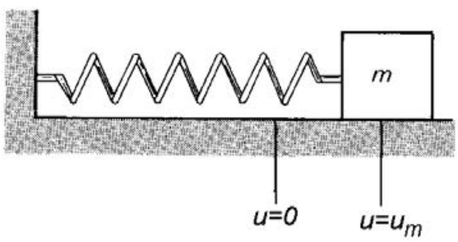
$$E = E_{PP} + E_K \ , \qquad (4.1)$$

kde E_{PP} je potenciální energie pružiny [J] a E_K je kinetická energie [J]. Potenciální energie pružiny je dána rovnicí

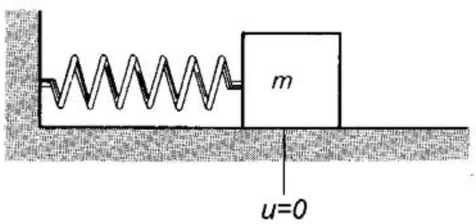
$$E_{PP} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 \qquad (4.2)$$

a kinetická energie rovnicí

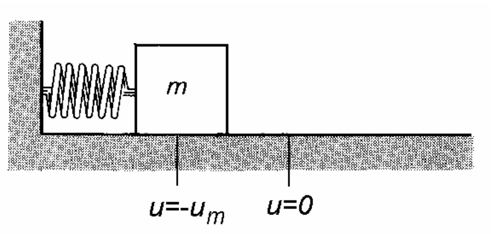
$$E_K = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \left(\frac{du}{dt} \right)^2 \ . \qquad (4.3)$$



$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2$$



$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_m^2$$



$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (-u)_m^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2$$

obr. 4.1 Energie lineárního harmonického oscilátoru ve vybraných polohách.

Dosazením rovnic (4.2) a (4.3) do rovnice (10.6) dostaneme

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \ \text{resp.} \ E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2(t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2(t) \ . \qquad (4.4)$$

Protože v krajních polohách, tj. maximální natažení či stlačení pružiny, je rychlost nulová, je celková energie rovna potenciální (elastické) energii pružiny. V rovnovážné poloze je naopak maximální rychlost a celková energie je rovna kinetické energii (obr. 4.1). Dostaneme rovnici

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_m^2 \ , \qquad (4.5)$$

ze které vyjádříme vztah mezi maximální výchylkou a maximální rychlostí, tj.

$$v_m^2 = \frac{k}{m} \cdot u_m^2 = \omega^2 \cdot u_m^2 \ . \qquad (4.6)$$

Vyjádřením závislosti rychlosti v na výchylce u z rovnic (4.5) a (4.6) dostaneme

$$v = v_m \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{u}{u_m}\right)^2} \ . \qquad (4.7)$$

Kontrolní otázky

Proč se závaží upevněné na pružině pohybuje stejně (při stejné maximální výchylce z rovnovážné polohy), ať je umístěno vodorovně (obr. 3.1) nebo pověšeno?

Příklad 4.1

Lineární harmonický oscilátor (obr. 3.1) obsahuje těleso o hmotnosti 0,3 kg a pružinu, která se při zatížení tímto závažím stlačí o 0,15 m. Pružinu jsme s tímto závažím vychýlili o 100 mm z rovnovážné polohy a pustili. Určete průběh kinetické a potenciální energie.

Řešení

V souladu s obr. 3.1 označme všechny použité veličiny v základních jednotkách SI – $u_1 = 0{,}15$ m, $m = 0{,}3$ kg, $u_m = 0{,}1$ m. Tíhové zrychlení budeme uvažovat $g = 9{,}81\ m{\cdot}s^{-2}$.

Tuhost pružiny z (3.1) je $k = 19{,}6\ N{\cdot}m^{-1}$ a úhlová frekvence z (3.7) je $\omega = 8{,}1\ s^{-1}$.

Závaží bude kmitat dle (2.1)

$$u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) = (0{,}1\,\mathrm{m}) \cdot \cos\left[\left(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$$

s rychlostí dle (2.6)

$$v(t) = -u_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) = -(0{,}1\,\mathrm{m}) \cdot \left(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}\right) \cdot \sin\left[\left(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$$
$$v(t) = -\left(0{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right) \cdot \sin\left[\left(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$$

Kinetická energie je dána (4.3)

$$E_K(t) = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [-u_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)]^2$$

$$E_K(t) = \frac{1}{2} \cdot (0{,}3\,\mathrm{kg}) \cdot \{-(0{,}81\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}) \cdot \sin[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]\}^2$$

$$E_K(t) = (0{,}098\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}) \cdot \sin^2[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]$$

Potenciální energie pružiny vychází z (4.2)

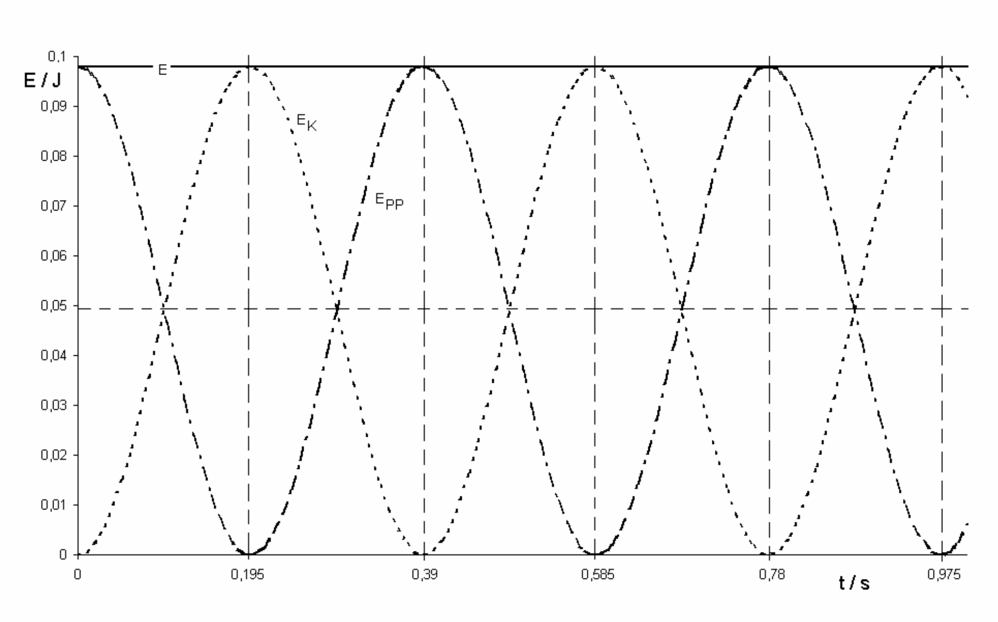
$$E_{PP}(t) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot [u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)]^2$$

$$E_{PP}(t) = \frac{1}{2} \cdot (19{,}6\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}) \cdot \{(0{,}1\,\mathrm{m}) \cdot \cos[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]\}^2$$

$$E_{PP}(t) = (0{,}098 \cdot \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}) \cdot \cos^2[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]$$

Celkovou energii můžeme dle (4.5) vypočítat např.

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2 = \frac{1}{2} \cdot (19{,}6\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^{-1}) \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 = 0{,}098\,\mathrm{J}$$



obr. 4.2 Průběh celkové energie E, kinetické energie E_K a potenciální energie E_{PP} v závislosti na čase (popis vodorovné osy je ve význačných bodech tj. $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$ a $\frac{4}{4}$ periody)

Průběh kinetické energie lineárního harmonického oscilátoru v závislosti na čase je dán rovnicí $E_K(t) = (0{,}098\,\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-2}) \cdot \sin^2[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]$ *a průběh potenciální energie* $E_{PP}(t) = (0{,}098\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m}) \cdot \cos^2[(8{,}1\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot t]$. *Celková energie je konstantní E = 0,098 J.*

Příklad 4.2

Těžiště tělesa koná harmonický pohyb popsaný rovnicí $u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t)$. *Určete poměr kinetické a potenciální energie a poměr potenciální energie k celkové energii v časové okamžiku* $\frac{1}{6}$ *periody.*

Řešení

V souladu s textem označme všechny použité veličiny – $t_1 = \frac{T}{6}$.

Poměr kinetické (4.3) a potenciální (4.2) energie s použitím rovnice pro výchylku (2.1) a rychlost(2.6) vyjádříme

$$\frac{E_K(t)}{E_{PP}(t)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot m \cdot [-u_m \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)]^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot [u_m \cdot \cos(\omega \cdot t)]^2} = \frac{m}{k} \cdot \omega^2 \cdot \operatorname{tg}^2(\omega \cdot t).$$

Dále použijeme rovnice (3.6) $\omega^2 = \frac{k}{m}$ *a (2.5)* $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$ *a dostaneme*

$$\frac{E_K(t)}{E_{PP}(t)} = \operatorname{tg}^2(\omega \cdot t) = \operatorname{tg}^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) = \operatorname{tg}^2\left[\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \left(\frac{T}{6}\right)\right] = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 3.$$

Poměr potenciální a celkové energie je dán poměrem rovnic (4.2) a (4.5)

$$\frac{E_{PP}}{E} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2} = \left[\frac{u_m \cdot \cos(\omega \cdot t)}{u_m}\right]^2 = \cos^2\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right)$$

$$\frac{E_{PP}}{E} = \cos^2\left[\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot \left(\frac{T}{6}\right)\right] = \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0{,}25$$

V čase $\frac{1}{6}$ *periody je poměr kinetické a potenciální energie 3:1 a 25 % potenciální energie z celkové.*

4.2 Autotest

A 6 Jaká je maximální energie při harmonickém netlumeném kmitání?

4.3 Shrnutí

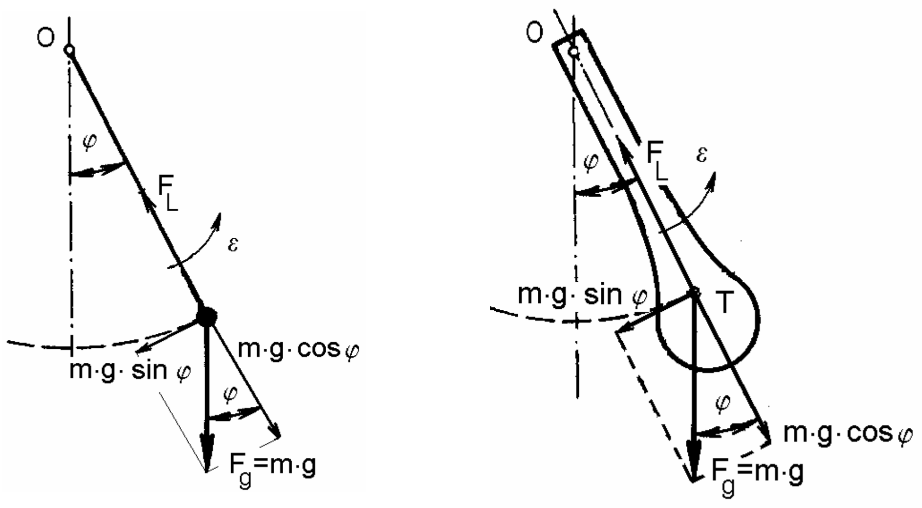
Celková energie harmonických kmitů je konstantní a v průběhu kmitání se mění část kinetické energie v potenciální energii pružiny a naopak

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot u^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 .$$

5 Matematické a fyzické kyvadlo

5.1 Teorie

Jednoduché kyvadlo (matematické) je tvořeno hmotným bodem zavěšeným na nehmotné niti (obr. 5.1 vlevo). Fyzické kyvadlo tvoří těleso, které se může v homogenním tíhovém poli otáčet kolem osy, která neprochází těžištěm (obr. 5.1 vpravo). Pro další výpočty budeme uvažovat pohyb bez tření a odporových sil. Tíhové zrychlení je konstantní.



obr. 5.1 Rozklad sil u matematického a fyzického kyvadla.

Síla ve směru pohybu u matematického kyvadla (tečny ke kružnici tvořící dráhu kyvadla) F_τ je dána součinem hmotnosti m a tečného zrychlení a_τ dle rovnice

$$F_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot l \cdot \varepsilon = m \cdot l \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m \cdot g \cdot \sin\varphi \ . \qquad (5.1)$$

Symbol g označuje tíhové zrychlení, jehož hodnotu obvykle uvažujeme 9,81 m·s^{2}. Rozklad sil je patrný z obr. 5.1 vlevo. Poznamenejme, že ve směru normály je síla v niti F_L rovna složce tíhového zrychlení do směru normály tj.

$$F_L = m \cdot g \cdot \cos\varphi \ . \qquad (5.2)$$

Rovnici (5.1) můžeme upravit do diferenciální rovnice druhého řádu

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \sin\varphi = 0 \ . \qquad (5.3)$$

Pro malé výchylky (do 5^{o}) můžeme uvažovat $\sin\varphi \cong \varphi$. Úhel φ je nutné dosazovat v radiánech. Aplikací na rovnici (5.3) dostaneme homogenní lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l} \cdot \varphi = 0 \ . \qquad (5.4)$$

Porovnáním s rovnicí (3.4) dostaneme úhlovou frekvenci kmitání ω a z ní periodu kmitání T

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad \text{a} \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (5.5)$$

Dle rovnice (5.5) je perioda kmitů T [s] určena délkou závěsu l [m] a velikostí tíhového zrychlení g [m/s^2], tedy nezávisí na hmotnosti tělesa m [kg].

Moment síly M [N·m] u fyzického kyvadla je roven součinu momentu setrvačnosti tělesa J [kg·m^2] a úhlového zrychlení ε [s^{-1}] (dle obr. 5.1 vpravo)

$$M = J \cdot \varepsilon = J \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -F_g \cdot \sin\varphi \cdot b = -m \cdot g \cdot b \cdot \sin\varphi \ , \qquad (5.6)$$

kde b [m] je vzdálenost mezi těžištěm T a osou otáčení O (obr. 5.1 vpravo)

Úpravou rovnice (5.6) dostaneme lineární homogenní diferenciální rovnici druhého řádu (a pro malé úhly, kdy $\sin\varphi \cong \varphi$)

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot b}{J} \cdot \sin\varphi = 0 \quad \text{resp.} \quad \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{m \cdot g \cdot b}{J} \cdot \varphi = 0 \qquad (5.7)$$

Porovnáním s rovnicí (3.5) dostaneme pro úhlovou frekvenci a periodu fyzického kyvadla vztah

$$\omega = \sqrt{\frac{m \cdot g \cdot b}{J}} \quad \text{a} \quad T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot b}} \qquad (5.8)$$

Použijeme-li pro výpočet momentu setrvačnosti tělesa J [kg·m^2] hmotnost fyzického kyvadla m [kg] a redukovanou délku L_R [m]

$$J = m \cdot L_R^2 \qquad (5.9)$$

dostaneme periodu kmitů ve tvaru

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot L_R^2}{m \cdot g \cdot b}} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{L_R}{\sqrt{g \cdot b}} \qquad (5.10)$$

Poznamenejme, že redukovaná délka kyvadla je délka, kterou by mělo matematické kyvadlo se stejnou hmotností a se stejnou dobou kmitu jako fyzické kyvadlo s uvedeným momentem setrvačnosti.

Kontrolní otázky

Jakým způsobem nahradíme fyzické kyvadlo matematickým?

Jak velké mohou být výchylky u fyzického kyvadla, abychom pro výpočet mohli použít rovnici (5.8)?

Závisí perioda kmitání matematického kyvadla na hmotnosti?

Příklad 5.1

Hmotný bod o hmotnosti 0,2 kg zavěšený na nehmotné niti délky 0,9 m vychýlíme o 1^o a pustíme. S jakou periodou bude bod kmitat okolo rovnovážné polohy?

Řešení

V souladu s obr. 5.1 označme všechny použité veličiny v základních jednotkách SI – m = 0,2 kg, l = 0,9 m. Tíhové zrychlení budeme uvažovat $g = 9{,}81\ m\cdot s^{-2}$.

Dle(5.5) vypočteme periodu kmitů

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{(0{,}9\ \mathrm{m})}{(9{,}81\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2})}} = 1{,}9\ \mathrm{s}$$

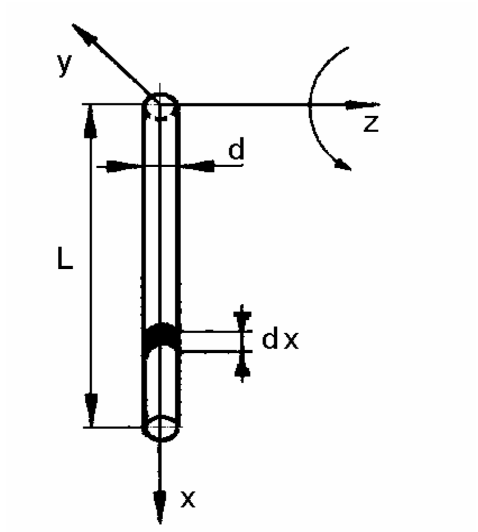
Bod bude kmitat s periodou 1,9 s.

Příklad 5.2

Homogenní tyč délky 1,2 m vykonává malé kmity ve svislé rovině kolem osy, která prochází jedním koncem. Vypočtěte periodu kmitů a redukovanou délku. Tíhové zrychlení uvažujme $9{,}81\ m\cdot s^{-2}$.

Řešení

V souladu s textem, soustavou SI a obr. 5.2 označme – L = b = 1,2 m, $g = 9{,}81\ m\cdot s^{-2}$.



obr. 5.2 Kmitání tyče

Pro výpočet použijeme vztah (5.8)

$$T = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{J}{m\cdot g\cdot b}} = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{\frac{J}{m\cdot g\cdot L}}\ .$$

Moment setrvačnosti vypočteme z definičního vztahu a dle obr. 5.2

$$J = \int x^2 \cdot \mathrm{d}m = \frac{m}{L} \cdot \int_0^L x^2 \cdot \mathrm{d}x = \frac{m}{L} \cdot \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{m \cdot L^2}{3}.$$ *Zde* $\frac{m}{L}$ *je délková hustota.*

Dosazením do předchozího vztahu pro periodu fyzického kyvadla dostaneme

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{m \cdot L^2}{3}}{m \cdot g \cdot L}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{L}{3 \cdot g}} = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{(1{,}2\ \mathrm{m})}{3 \cdot (9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}})}} = 1{,}27\ \mathrm{s}.$$

Redukovaná délka kyvadla bude dle (5.9)

$$L_R = \sqrt{\frac{J}{m}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{m \cdot L^2}{3}\right)}{m}} = \frac{L}{\sqrt{3}} = \frac{(1{,}2\ \mathrm{m})}{\sqrt{3}} = 0{,}69\ \mathrm{m}.$$

Perioda kmitů tyče je 1,27 s a redukovaná délka 0,69 m.

5.2 Autotest

A 7 Jaká podmínka musí být splněna, aby matematické nebo fyzické kyvadlo konalo harmonické kmity?

A 8 Lze pomocí matematického kyvadla měřit tíhové zrychlení?

A 9 Lze pomocí vztahu pro fyzické kyvadlo vypočítat periodu matematického kyvadla?

5.3 Shrnutí

Matematické a fyzické kyvadlo kmitají harmonickým pohybem v případě, že výchylka kmitů je malá (do 5°).

Periodu kmitů matematického kyvadla (hmotný bod zavěšen na nehmotné niti) můžeme vypočítat

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}},$$

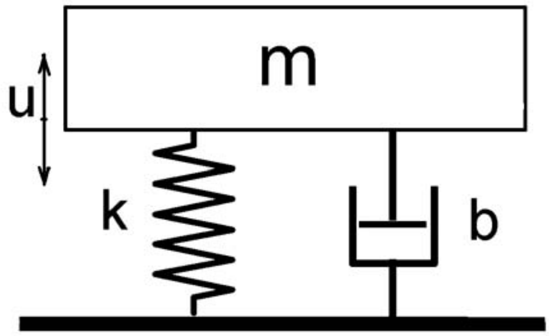
u fyzického kyvadla

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m \cdot g \cdot b}}.$$

6 Tlumené kmity

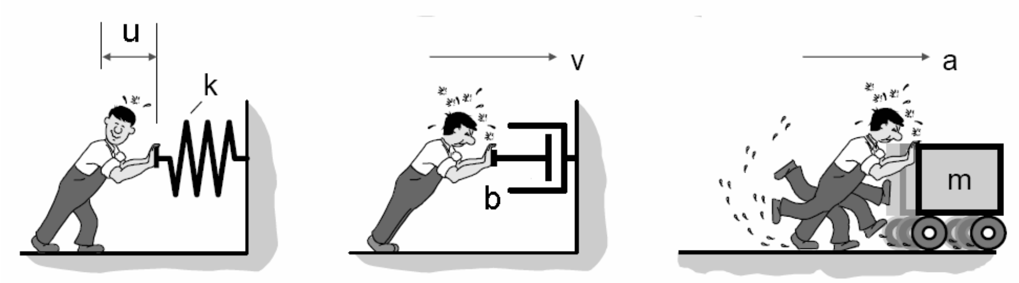
6.1 Teorie

Při kmitavém pohybu skutečných těles působí síly prostředí proti pohybu tělesa a vzniká tzv. tlumené kmitání. Pro jednoduchost budeme uvažovat mechanickou soustavu (obr. 6.1) sestávající se z tělesa *m* upevněného na pružině o tuhosti *k* (netlumené kmitání) a tlumič s koeficientem tlumení *b*.



obr. 6.1 Schéma tlumené mechanické soustavy.

Vliv jednotlivých prvků soustavy z obr. 6.1 na pohybové veličiny je ukázán na obr. 6.2.



obr. 6.2 Mechanická soustava složená z pružiny, tlumiče a hmoty.

Dostaneme soustavu, na kterou budou při kmitání kromě tíhové síly působit síla od pružiny dle (3.1) a síla tlumení, která je obvykle závislá na rychlosti *v* a koeficient tlumení *b* [$N \cdot s \cdot m^{-1}$] dle

$$F_b = -b \cdot v = -b \cdot \frac{du}{dt} \quad . \tag{6.1}$$

Z pohybové rovnice musí platit, že

$$F = F_p + F_b = -k \cdot u - b \cdot v = m \cdot a_u \quad . \tag{6.2}$$

Úpravou (6.2) dostaneme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{k}{m} \cdot u = 0 \;, \qquad (6.3)$$

což je homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty. Tuto diferenciální rovnici (6.3) můžeme upravit na tvar

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = 0 \,, \qquad (6.4)$$

kde součinitel tlumení $\delta\,[\mathrm{s}^{-1}]$ je

$$\delta = \frac{b}{2 \cdot m} \qquad (6.5)$$

a vlastní úhlová frekvence ω_0 $[\mathrm{s}^{-1}]$ je dle (3.6)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \;. \qquad (6.6)$$

Homogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty má obecné řešení ve tvaru

$$u(t) = \sum_k C_k \cdot \exp(\alpha_k \cdot t) \;, \qquad (6.7)$$

kde koeficienty α dostaneme v našem případě (homogenní diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty) z řešení kvadratické rovnice

$$\alpha^2 + 2 \cdot \delta \cdot \alpha + \omega_0^2 = 0 \;, \qquad (6.8)$$

tedy

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \qquad (6.9)$$

Při řešení tlumeného kmitání mohou nastat tři případy

- $\delta > \omega_0 \rightarrow$ kdy je velké tlumení a malá hodnota vlastní frekvence – pohyb aperiodický nebo-li s ***nadkritickým*** tlumením. Řešením je rovnice

$$u(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 \cdot e^{+\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 \cdot e^{-\left(\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}\right)t} \right) \;, \qquad (6.10)$$

- $\delta = \omega_0 \rightarrow$ jedná se o mezní případ aperiodického pohybu tzv. s ***kritickým*** tlumením. Řešení je dáno rovnicí

$$u(t) = e^{-\delta \cdot t} \cdot \left(C_1 + C_2 \cdot t \right) \;, \qquad (6.11)$$

- $\delta < \omega_0 \rightarrow$ kdy kmitající soustava má relativně malé tlumení tzv. ***podkritické***. Výsledkem řešení diferenciální rovnice jsou komplexní, které lze převést na součin harmonické funkce a exponenciálního tlumení

$$u(t) = U_h \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \cdot t + \varphi\right) = U_h \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_t \cdot t + \varphi) \ . \qquad (\ 6.12)$$

Z rovnice (6.12) vyplývá, že úhlová frekvence tlumeného kmitání ω_t je menší než úhlová frekvence netlumeného kmitání ω_0. Platí tedy

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2 \cdot m}\right)^2} \ . \qquad (\ 6.13)$$

Rovnice (6.12) ukazuje, že amplituda u_i se s časem exponenciálně zmenšuje. Tedy pro každou následující amplitudu platí

$$\lambda = \frac{U(t)}{U(t+T_t)} = \frac{u_0 \cdot e^{-\delta \cdot t}}{u_0 \cdot e^{-\delta \cdot (t+T_t)}} = \exp(\delta \cdot T_t) \qquad (\ 6.14)$$

a tento poměr λ se nazývá útlum. Logaritmováním rovnice (6.14) dostaneme hodnotu nazvanou logaritmický dekrement útlumu

$$\Lambda = \ln \lambda = \delta \cdot T_t \ . \qquad (\ 6.15)$$

Kontrolní otázky

V jakém případě tlumení budou výsledným pohybem harmonické kmity?

Mění tlumení frekvenci tlumených kmitů?

Příklad 6.1

Perioda tlumených kmitů je 5 s. Logaritmický dekrement útlumu je 0,8. Maximální amplituda v čase 0 s byla 0,2 m. Napište rovnici tlumených kmitů a nakreslete časové rozvinutí pohybu v rozmezí čtyř period.

Řešení

Označme všechny použité veličiny v základních jednotkách SI – T_t = 5 s, Λ = 0,8. U_k = 0,2 m.

Dle (6.15) určíme součinitel tlumení

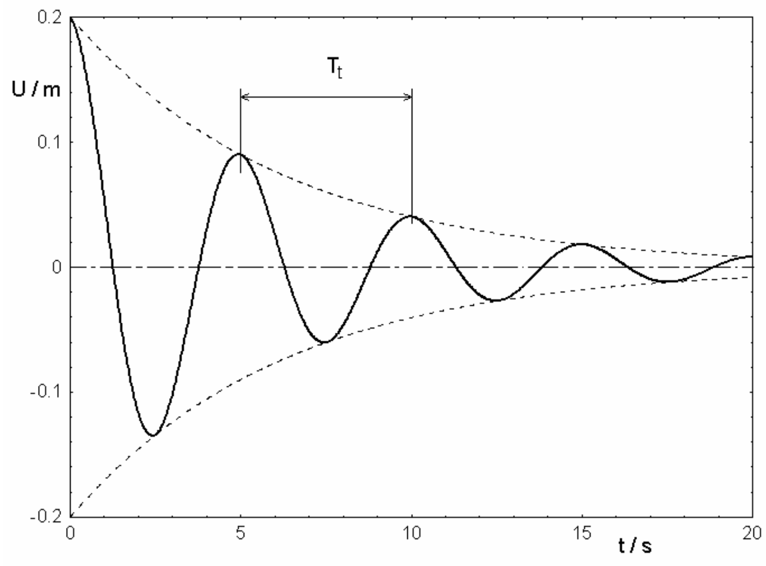
$$\delta = \frac{\Lambda}{T_t} = \frac{0{,}8}{(5\,\mathrm{s})} = 0{,}16\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Úhlová frekvence tlumených kmitů bude dle (2.5)

$$\omega_t = \frac{2 \cdot \pi}{T_t} = \frac{2 \cdot \pi}{(5\,\mathrm{s})} \cong 1{,}26\,\mathrm{s}^{-1}$$

Výchylka kmitů bude vypočítána z rovnice (6.12)

$$u(t) = U_h \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_t \cdot t + \varphi) = (0{,}2\,\mathrm{m}) \cdot \mathrm{e}^{-(0{,}16\,\mathrm{s}^{-1})t} \cdot \cos\left[\left(1{,}26\,\mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$$



obr. 6.3 Časový průběh výchylky tlumených kmitů.

Výsledný pohyb je zobrazen na obr. 6.3 a je dán rovnicí tlumeného kmitání $u(t) = (0{,}2\,\mathrm{m})\cdot\exp\left[-\left(0{,}16\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t\right]\cdot\cos\left[\left(1{,}25\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t\right]$

6.2 Autotest

A 10 Jaký je průběh výchylky tlumených harmonických kmitů na čase?

6.3 Shrnutí

Výchylka tlumeného harmonického kmitání je popsána součinem exponenciální funkce (tlumení) a harmonické funkce (kosinus)

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2\cdot\delta\cdot\frac{du}{dt} + \omega_0^2\cdot u = 0 \ .$$

Harmonické tlumené kmity jsou v případě, že $\delta < \omega_0$. Úhlová frekvence tlumeného kmitání je

$$\omega_t = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ .$$

Logaritmický dekrement útlumu je logaritmus útlumu, tj. poměru dvou následujících amplitud

$$\Lambda = \ln\lambda = \delta\cdot T_t$$

7 Vynucené kmity

7.1 Teorie

Kmitá-li oscilátor v prostředí, kde se vyskytují odporové síly, jsou jeho kmity tlumené. Abychom udrželi oscilátor kmitat, musíme na něj působit vnější periodickou silou F_q

$$F_q = F_Q \cdot \cos(\Omega \cdot t) \ , \tag{7.1}$$

kde F_Q je amplituda budící síly [N], Ω je úhlový kmitočet budící síly [s^{-1}].

Pohybová rovnice pak dostane tvar

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}_p + \vec{F}_b + \vec{F}_q \ , \tag{7.2}$$

tedy

$$m \cdot \frac{d^2u}{dt^2} = -k \cdot u - b \cdot \frac{du}{dt} + F_Q \cdot \cos(\Omega \cdot t) \ . \tag{7.3}$$

Tuto rovnic se upravíme na tvar

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{b}{m} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{k}{m} \cdot u = \frac{F_Q}{m} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \tag{7.4}$$

resp.

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2 \cdot \delta \cdot \frac{du}{dt} + \omega_0^2 \cdot u = \frac{F_Q}{m} \cdot \cos(\Omega \cdot t) \ . \tag{7.5}$$

Řešení nehomogenní lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty (7.5) se skládá ze součtu řešení homogenní rovnice (6.7) a tzv. partikulárního řešení. Celkové řešení budeme předpokládat ve tvaru

$$u(t) = U_h \cdot \exp(-\delta \cdot t) \cdot \cos(\omega_t \cdot t + \varphi) + U_p \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_p) \ . \tag{7.6}$$

Další postup řešení provedeme jen zjednodušeně. Partikulární řešení rovnice (7.5) předpokládáme ve tvaru

$$u_p(t) = U_p \cdot \cos(\Omega \cdot t + \varphi_p) \ . \tag{7.7}$$

Dále vypočteme rychlost $\frac{du_p}{dt}$ a zrychlení $\frac{d^2u_p}{dt^2}$ a dosadíme do rovnice (7.5). Protože výsledná rovnice musí platit pro jakýkoliv čas, pak s výhodou použijeme např. dvou podmínek $\Omega \cdot t + \varphi_p = 0$ a. $\Omega \cdot t + \varphi_p = \frac{\pi}{2}$. Dostaneme dvě rovnice, ze kterých vyřešíme neznámou amplitudu U_p a fázi φ_p.

Výsledná amplituda partikulárního řešení bude

$$U_p = \frac{\frac{F_Q}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4 \cdot \delta^2 \cdot \Omega^2}} \tag{7.8}$$

a fáze

$$\operatorname{tg} \varphi_p = -\frac{2 \cdot \delta \cdot \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \quad . \tag{7.9}$$

Z rozboru rovnice (7.8) plyne, že

- amplituda vynucených kmitů je přímo úměrná amplitudě buzení F_Q a nepřímo úměrná hmotnosti m,

- amplituda vynucených kmitů roste se zmenšujícím se rozdílem frekvence budící síly a vlastní frekvence oscilátoru,

- abychom dostali maximální amplitudu, musíme frekvenci budící síly posunout na takovou hodnotu, aby jmenovatel rovnice (7.8) byl co nejmenší, resp. $\frac{dU_p}{d\Omega} = 0$. Jmenovatel má nejmenší hodnotu v případě, že jeho derivace dle Ω je rovna nule

$$\Omega \cdot \left(\Omega^2 - \omega_0^2 + 2 \cdot \delta^2\right) = 0 \quad . \tag{7.10}$$

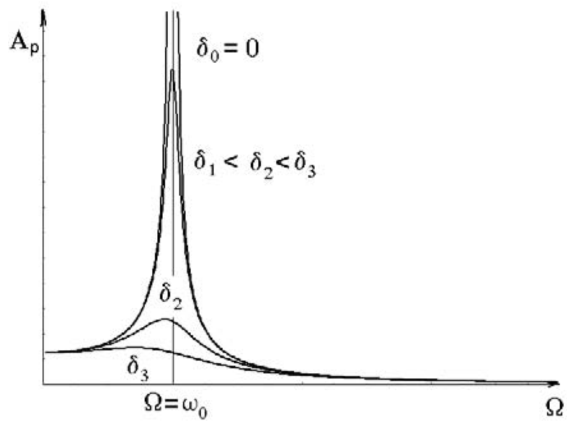
Hledaná úhlová frekvence buzených kmitů má pak hodnotu

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2} \tag{7.11}$$

a nazývá se rezonanční úhlovou frekvencí.

Úpravou (7.11) s pomocí (2.5) dostaneme pro rezonanční frekvenci f_r vztah

$$f_r = \sqrt{f_0^2 - \frac{\delta^2}{2 \cdot \pi^2}} \quad . \tag{7.12}$$



obr. 7.1 Rezonance vynuceného tlumeného kmitání.

Dosazením rovnice (7.11) do rovnice (7.8) dostaneme maximální amplitudu

$$U_{pr} = \frac{F_Q}{2\cdot m\cdot \delta \cdot \sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\cdot \delta^2\right)}} = \frac{F_Q}{2\cdot m\cdot \delta \cdot \Omega_r} \qquad (7.13)$$

V případě, že se jedná o netlumené kmitání, tj. $\delta = 0$, pak amplituda se blíží k nekonečnu $U_{pr} \rightarrow \infty$. Poznamenejme, že dle rovnic (7.8) a (7.9) není obecně budící síla ve fázi s výchylkou.

Kontrolní otázky

Proč je důležitá znalost vlastní frekvence systému, když jej budíme vnější harmonickou silou?

Příklad 7.1

Hmotný bod o hmotnosti 100 g se pohybuje vynucenými harmonickými kmity. Kruhová frekvence vlastních kmitů je 20 s^{-1}, součinitel útlumu je 3 s^{-1} a amplituda budící síly je 10 N. Při jaké rezonanční frekvenci je maximální amplituda a jakou má hodnotu?

Řešení

V souladu s předchozím textem a soustavou SI označme – hmotnost $m = 0{,}1$ kg, úhlová frekvence vlastních kmitů $\omega_0 = 20\ s^{-1}$, součinitel útlumu $\delta = 3\ s^{-1}$ a amplituda budící síly $F_Q = 10$ N.

Amplitudu kmitů můžeme vypočítat z rovnice (7.8).

$$U_p = \frac{\frac{F_Q}{m}}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\Omega^2}}$$

Abychom nalezli maximální výchylku, musíme nalézt nejvyšší hodnotu jmenovatele. Tedy vypočítat derivaci jmenovatele dle hledané proměnné Ω a výsledek položit roven nule tj. nalézt extrém funkce

$$\frac{\mathrm{d}U_p}{\mathrm{d}\Omega} = 0, \textit{ resp. pro jmenovatel } \frac{\mathrm{d}\left[\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\Omega^2}\right]}{\mathrm{d}\Omega} = 0, \textit{ resp.}$$

$$\frac{\mathrm{d}\left[\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\cdot\delta^2\cdot\Omega^2\right]}{\mathrm{d}\Omega} = 2\cdot\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)\cdot(2\cdot\Omega) + 8\cdot\delta^2\cdot\Omega = 0$$

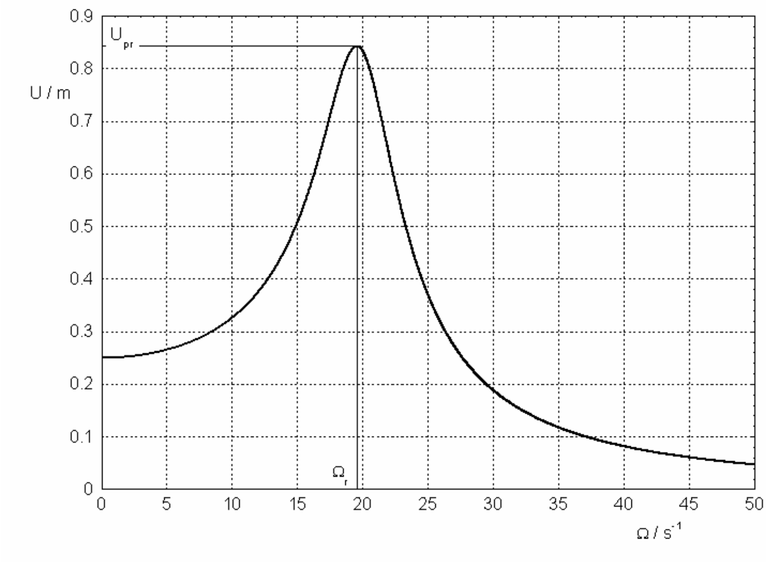
Hledaná rezonanční frekvence je v souladu s (7.11)

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\cdot\delta^2} = \sqrt{\left(20\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2 - 2\cdot\left(3\,\mathrm{s}^{-1}\right)^2} = 19{,}54\,\mathrm{s}^{-1}.$$

Po dosazení do (7.8)resp. (7.13) dostaneme

$$U_{pr} = \frac{F_Q}{2\cdot m\cdot\delta\cdot\sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\cdot\delta^2\right)}}$$

$$U_{pr} = \frac{(10\,\mathrm{N})}{2 \cdot (0{,}1\,\mathrm{kg}) \cdot (3\,\mathrm{s}^{-1}) \cdot \sqrt{(20\,\mathrm{s}^{-1})^2 - 2 \cdot (3\,\mathrm{s}^{-1})^2}} = 0{,}85\,\mathrm{m}.$$



obr. 7.2 Průběh amplitudy vynuceného tlumeného kmitání v závislosti na budící frekvenci.

Rezonanční frekvence tlumené kmitající soustavy s nuceným buzením je 19,54 s^{-1}, při které je amplituda 0,85 m. Průběh amplitudy kmitání na budící frekvenci je na obr. 7.2.

7.2 Autotest

A 11 Jaké podmínky musí být splněny, aby tlumený oscilátor s budící silou konal harmonické kmity?

A 12 Za jakých podmínek nastává rezonance?

A 13 Kdy je u tlumených vynucených kmitů maximální amplituda?

7.3 Shrnutí

Vlivem působení vnější harmonické síly na lineární tlumený harmonický oscilátor může vzniknout rezonance. Je to stav, kdy je úhlová frekvence buzených kmitů rovna $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2}$. Pokud není tlumení, pak v rezonanci $\Omega_r = \omega_0$ je teoreticky nekonečná amplituda kmitání.

8 Skládání kmitů

8.1 Teorie

Kmitavý pohyb hmotného bodu může být složen z několika jednoduchých kmitavých pohybů. V technické praxi se často vyskytují kmity, které vzniknou složením dvou nebo více harmonických pohybů. Tyto kmity jsou často ve stejné rovině (stejnosměrné) nebo v navzájem kolmých rovinách (kolmé).

Stejnosměrné kmitání si lze znázornit pohybem dvou těles (obr. 8.1), kdy hmotnost horního tělesa m_1 je mnohem menší než hmotnost spodního tělesa m_2. V tomto případě můžeme zanedbat ovlivnění pohybu většího tělesa tělesem menším. Těleso o hmotnosti m_2 kmitá harmonickým pohybem s výchylkou

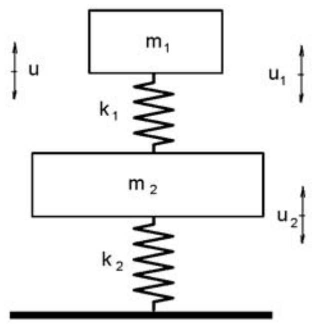
$$u_2(t) = U_2 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \ . \qquad (8.1)$$

Těleso o hmotnosti m_1 kmitá v systému spojeném s tělesem m_2 harmonickým pohybem s výchylkou

$$u_1(t) = U_1 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \ . \qquad (8.2)$$

Harmonický pohyb tělesa o hmotnosti m_1 vzhledem k nepohyblivé soustavě, tj. k uchycení je dán součtem výchylek

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) \qquad (8.3)$$

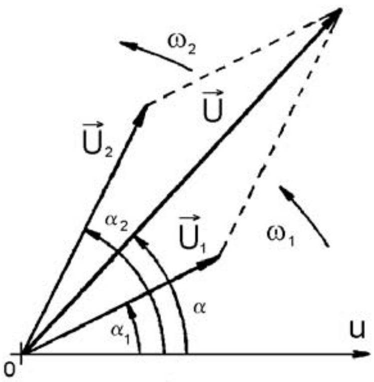


obr. 8.1 Harmonické kmitání dvou spřažených těles ($m_1 \ll m_2$)

Výsledný pohyb je možné zobrazit ve fázorovém diagramu na obr. 8.2. Vektory $\vec{U}_1$ a $\vec{U}_2$ se pohybují úhlovými rychlostmi ω_1 a ω_2. Výsledný vektor $\vec{U}$ je dán vektorovým součtem jednotlivých vektorů

$$\vec{U}(t) = \vec{U}_1(t) + \vec{U}_2(t) \ . \qquad (8.4)$$

Vektor $\vec{U}$ se otáčí nerovnoměrně a mění velikost, takže jeho průmět do osy u nemusí být harmonickou funkcí, tj. výsledný pohyb obecně nemusí být harmonický.



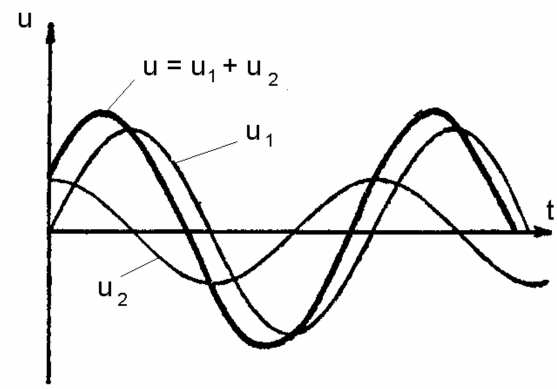
obr. 8.2 Fázorový diagram

V případě, že amplituda obou kmitů bude stejná $U_0=U_1=U_2$, můžeme součet dvou kosinových pohybů provést s využitím matematického vztahu

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\ . \qquad (8.5)$$

Výsledný harmonický pohyb bude dle rovnice (8.3) dán součtem rovnic (8.1) a (8.2)

$$u(t)=2\cdot U_0\cdot\cos\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)\cdot t+(\varphi_1+\varphi_2)}{2}\right]\cdot\cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)\cdot t+(\varphi_1-\varphi_2)}{2}\right]. \qquad (8.6)$$



obr. 8.3 Průběh dvou harmonických kmitů a jejich součtu

Ve zvláštním případě pohyb popsaný rovnicemi (8.1), (8.2) a (8.3) může být harmonický. Tento jev nastane, když vektory $\vec{U}_1$ a $\vec{U}_2$ ve fázorovém diagramu obr. 8.2 budou po určitém časovém okamžiku (periodě T) ve stejné poloze. Od tohoto okamžiku se pohyb bude opět opakovat. Během periody vykonal vektor $\vec{U}_1$ celistvý počet otáček n_1 a urazil úhlovou dráhu $\alpha_1=n_1\cdot 2\cdot\pi$ a vektor $\vec{U}_2$ vykonal celistvý počet otáček n_2 a urazil úhlovou dráhu $\alpha_2=n_2\cdot 2\cdot\pi$ (m a n jsou celá čísla). Protože vektor $\vec{U}_1$ se pohybuje úhlovou rychlostí ω_1 a vektor $\vec{U}_2$ rychlostí ω_2, platí

$$\omega_1 = n_1 \cdot \frac{2\cdot\pi}{T} \text{ a } \omega_2 = n_2 \cdot \frac{2\cdot\pi}{T} . \qquad (8.7)$$

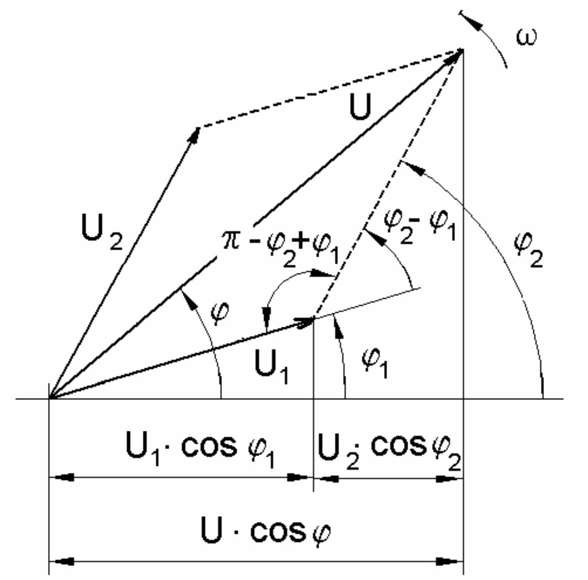
Odtud plyne

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} , \frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2} \text{ a } \frac{T_1}{T_2} = \frac{n_2}{n_1} . \qquad (8.8)$$

Složením většího počtu harmonických pohybů, jejichž frekvence jsou v poměru celých čísel, vznikne pohyb periodický.

Při skládání stejnosměrných kmitů o stejné frekvenci $\omega=\omega_1=\omega_2$ dostaneme výsledný pohyb dle rovnic (8.1), (8.2) a (8.3)

$$u(t) = U_1 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_1) + U_2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_2) = U \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi) . \qquad (8.9)$$



obr. 8.4 Fázorový diagram pro skládání kmitů se stejnou frekvencí

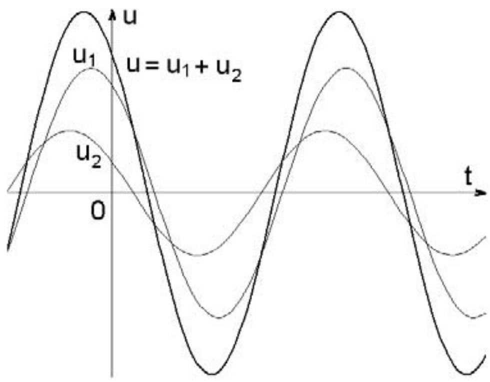
Dle fázorového diagramu (obr. 8.4) se pak všechny vektory budou pohybovat konstantní úhlovou rychlostí ω. Velikost výsledné amplitudy U bude dána rovnicí

$$U^2 = U_1^2 + U_2^2 + 2 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (8.10)$$

a počáteční fáze

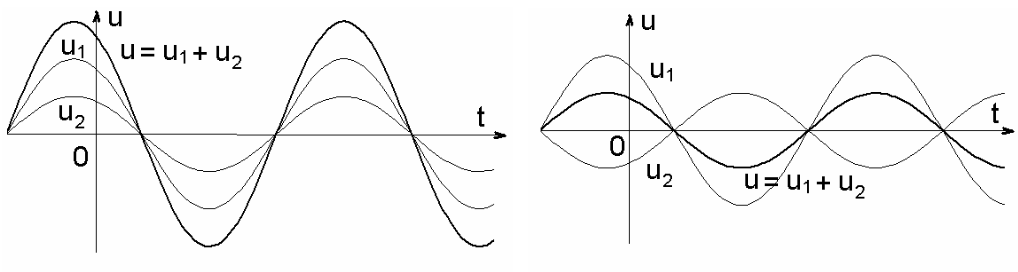
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{U_1 \cdot \sin\varphi_1 + U_2 \cdot \sin\varphi_2}{U_1 \cdot \cos\varphi_1 + U_2 \cdot \cos\varphi_2} . \qquad (8.11)$$

Složením dvou harmonických pohybů o stejné frekvenci f vznikne opět harmonický pohyb se stejnou frekvencí f. Velikost amplitudy výsledného pohybu bude záviset nejen na velikostech jednotlivých amplitud U_1 a U_2, ale také na počátečním fázovém posunu φ_1 a φ_2 dle rovnice (8.10).



obr. 8.5 Součet dvou harmonických vlnění o stejné frekvenci

Se změnou fázového posuvu (obr. 8.5) se amplituda mění v rozsahu $|U_1 - U_2| \leq U \leq U_1 + U_2$. První krajní případ $|U_1 - U_2| = U$ nastane, když rozdíl počátečních fází $|\varphi_2 - \varphi_1|$ bude roven π, 3·π, 5·π, 7·π, atd. Amplituda bude minimální a v případě, že amplitudy obou pohybů budou stejné $U_1 = U_2$, pak oscilátor je v klidu. Druhý krajní případ $U = U_1 + U_2$ lze sledovat, když rozdíl počátečních fází $|\varphi_2 - \varphi_1|$ bude roven 0, 2·π, 4·π, 6·π, atd. V tomto případě bude amplituda maximální. Oba význačné případy jsou na obr. 8.6.



obr. 8.6 Maximální (vlevo) a minimální (vpravo) amplituda při součtu dvou harmonických signálů o stejné frekvenci

Uvedený děj se často vyskytuje při šíření harmonických zvukových a jiných elastických vln, ale také světelných a elektromagnetických vln. Tento děj, kdy jsou harmonické děje o stejné frekvenci, ale s různou fází se nazývají interference.

Také se setkáváme s kmity, které jsou složeny ze dvou harmonických frekvencí, jejichž rozdíl je velmi malý, tj. $\omega_1 \cong \omega_2$. Pro jednoduchost předpokládejme, že amplitudy obou kmitů jsou stejné, tj. $U_1 = U_2 = U_0$. Protože se mění vzájemná fáze, můžeme nastavit počátek ve chvíli, kdy fáze obou kmitů jsou stejné. Pak výsledný pohyb bude dán rovnicí

$$u(t) = U_0 \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + U_0 \cdot \cos(\omega_2 \cdot t) \quad . \qquad (8.12)$$

Po matematické úpravě pomocí rovnice (8.5) dostaneme rovnici

$$u(t) = 2 \cdot U_0 \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1 - \omega_2) \cdot t}{2}\right] \quad . \qquad (8.13)$$

Obecně je to složitý časový průběh, ale v případě, že $\omega_1 \cong \omega_2$ pak se první člen mění s velkou úhlovou frekvencí

$$\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} = \omega_H \cong \omega_1 \cong \omega_2 \qquad (8.14)$$

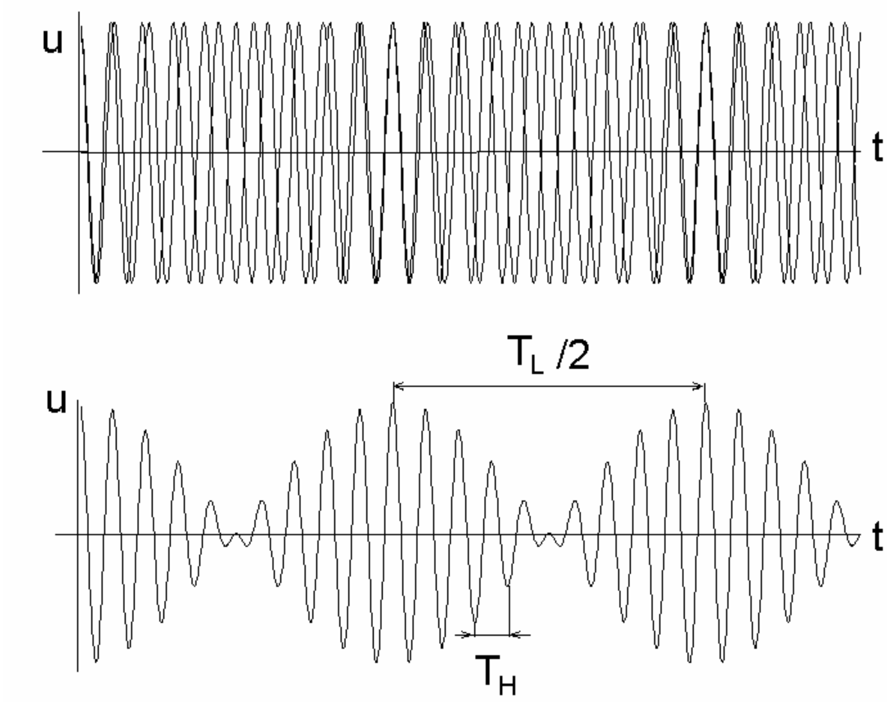
a druhý člen s malou úhlovou frekvencí

$$\frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} = \omega_L \ . \qquad (8.15)$$

Výsledné kmitání lze pak zapsat

$$u(t) = 2 \cdot U_0 \cdot \cos(\omega_L \cdot t) \cdot \cos(\omega_H \cdot t) = U_L(t) \cdot \cos(\omega_H \cdot t) \ . \qquad (8.16)$$

Toto kmitání lze považovat za kosinusové kmitání o úhlové frekvenci ω_L s amplitudou měnící se od nuly do $2 \cdot U_0$ s periodou $T_L = \frac{4 \cdot \pi}{(\omega_1 - \omega_2)}$.



obr. 8.7 Výchylka kmitání s přibližně stejnou úhlovou frekvencí (spodní graf ukazuje jejich součet)

Pokud nebude stejná amplituda kmitání $U_1 \neq U_2$, pak kmitání bude mít stejný charakter s výkmity $|U_1 - U_2| \leq u(t) \leq U_1 + U_2$. Jednotlivé kmity se zesilují, jsou-li ve stejné fázi, a navzájem se ruší při opačné fázi. Vzniká nárazové kmitání, které se v akustice nazývá rázy nebo zázněje. Maximální hodnota amplitudy se nazývá kmitna a minimální uzel.

Někdy se v technické praxi můžeme také setkat s ***navzájem kolmými*** nezávislými kmity. Kolmé kmity můžeme rozložit do os x a y pravoúhlé soustavy souřadnic. Kmity můžeme popsat rovnicemi

$$x = U_x \cdot \cos(\omega_x \cdot t + \varphi_x) \tag{8.17}$$

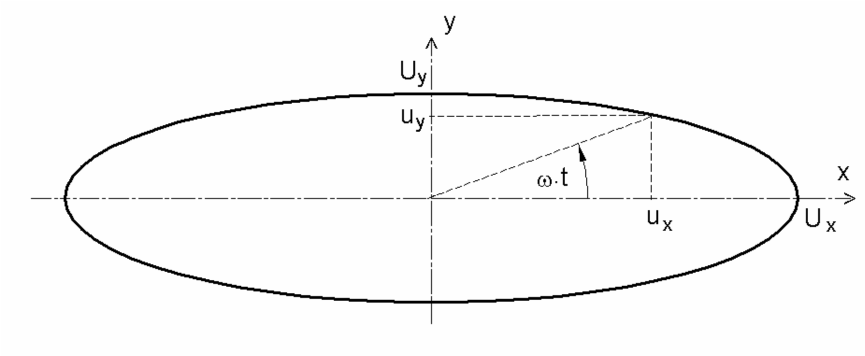
a

$$y = U_y \cdot \cos(\omega_y \cdot t + \varphi_y) \ . \tag{8.18}$$

Pro jednoduchost uvažujme stav, kdy kmity budou mít stejnou úhlovou frekvenci $\omega = \omega_x = \omega_y$ a pro počáteční fáze $\varphi_x = 0$ a $\varphi_y = \dfrac{\pi}{2}$ pak po dosazení do (8.17) a (8.18) dostaneme

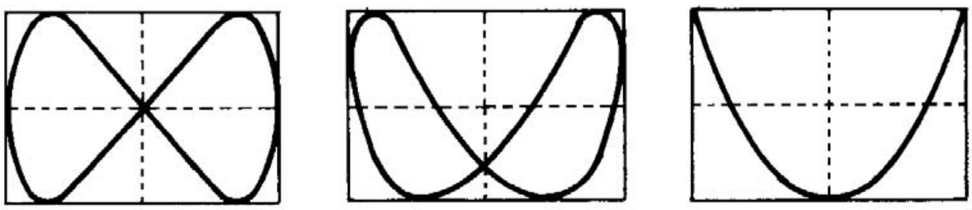
$$x = U_x \cdot \cos(\omega \cdot t) \text{ a } y = U_y \cdot \sin(\omega \cdot t) \ , \tag{8.19}$$

což je parametrická rovnice elipsy (obr. 8.8).



obr. 8.8 Součet kolmých kmitů stejné frekvence.

Výsledkem složení dvou kolmých kmitů různá frekvence je složité kmitání. Trajektorie výsledného pohybu může tvořit tzv. Lissajousovy obrazce (obr. 8.9) pokud je poměr frekvencí kmitů v poměru malých celých čísel. Tvar obrazce pak závisí na poměru frekvencí a na počátečních fázích.



obr. 8.9 Některé Lissajousovy obrazce

Obecně lze jakýkoliv periodický děj nahradit součtem až nekonečně mnoha harmonických funkcí sinus o různých amplitudách, frekvencích a počátečních fází.

$$u(t) = \int_0^\infty U \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot \mathrm{d}\omega \text{ příp. } u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k \cdot \sin(\omega_k \cdot t + \varphi_k) \ . \tag{8.20}$$

Teoreticky se touto otázkou zabývá Fourierova analýza.

Kontrolní otázky

Co znamená pojem rázy?

Jaká je maximální a minimální amplituda při skládání harmonických kmitů o přibližně stejné frekvenci?

Příklad 8.1

Dva rovnoběžné harmonické kmitavé pohyby o stejné maximální amplitudě a počáteční fázi kmitají s periodami 3 s a 3,1 s. Určete periodu výsledných kmitů a periodu rázů.

Řešení

Označme si periody kmitů $T_1 = 3\ s$ *a* $T_2 = 3{,}1\ s$, *maximální amplitudu* $U = U_1 = U_2$, *počáteční fázi* $\varphi = \varphi_1 = \varphi_2$.

Jednotlivé harmonické pohyby dle (8.1) budou

$u_1(t) = U \cdot \cos(\omega_1 \cdot t + \varphi)$ *a* $u_2(t) = U \cdot \cos(\omega_2 \cdot t + \varphi)$.

Výsledné kmitání bude dáno součtem jednotlivých výchylek dle (8.12)

$$u(t) = U \cdot \cos(\omega_1 \cdot t) + U \cdot \cos(\omega_2 \cdot t).$$

Tuto rovnici upravíme na tvar (8.13)

$$u(t) = 2 \cdot U \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2) \cdot t}{2}\right] \cdot \cos\left[\frac{(\omega_1 - \omega_2) \cdot t}{2}\right].$$

Úhlovou frekvenci výsledných kmitů dle (8.14) tj. $\omega_H = \dfrac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}$

a úhlovou frekvenci pomalejších kmitů dle (8.15) tedy $\omega_L = \dfrac{(\omega_1 - \omega_2)}{2}$.

jelikož úhlové frekvence dostaneme z (2.5) $\omega = \dfrac{2 \cdot \pi}{T}$ *dostaneme*

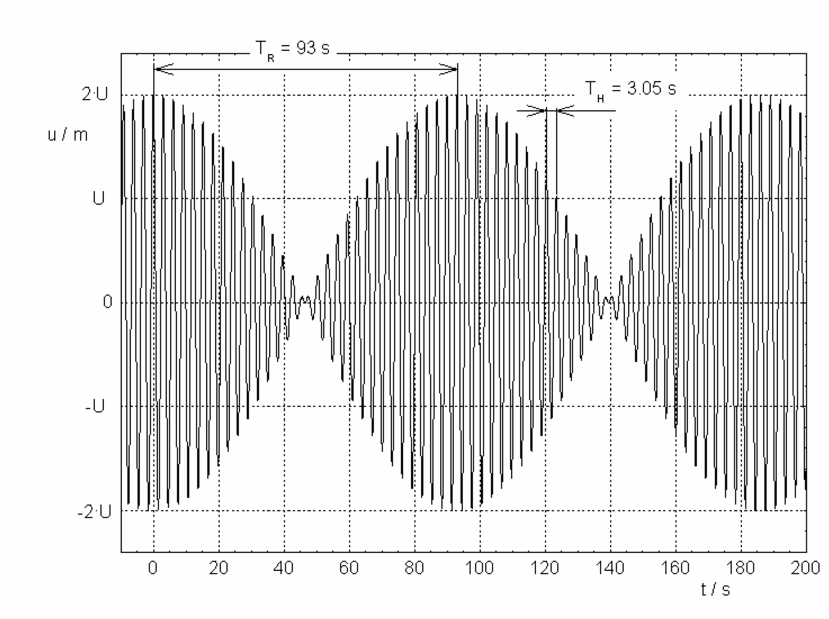
$$\omega_H = \frac{2 \cdot \pi}{T_H} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} = \frac{\left(\dfrac{2 \cdot \pi}{T_1} + \dfrac{2 \cdot \pi}{T_2}\right)}{2} \quad \textit{tedy}$$

$$T_H = \frac{2}{\dfrac{1}{T_1} + \dfrac{1}{T_2}} = \frac{2}{\dfrac{1}{(3\,\mathrm{s})} + \dfrac{1}{(3{,}1\,\mathrm{s})}} = 3{,}05\ \mathrm{s},$$

Úhlová frekvence pomalejších kmitů bude analogicky $T_L = \dfrac{2}{\dfrac{1}{T_1} - \dfrac{1}{T_2}}$.

Protože v průběhu této periody vzniknou dvě zesílení a zeslabení je perioda rázů rovna polovině této periody

$$T_R = \frac{T_L}{2} = \frac{1}{\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}} = \frac{1}{\frac{1}{(3\,\mathrm{s})} - \frac{1}{(3{,}1\,\mathrm{s})}} = 93\,\mathrm{s}\,.$$



obr. 8.10 Průběh vypočtených rázů

Perioda výsledných kmitů je 3,05 s a perioda rázů 93 s. Průběh kmitů je dán rovnicí $u(t) = 2 \cdot U \cdot \cos\left[\frac{t}{(3{,}05\,\mathrm{s})}\right] \cdot \cos\left[\frac{t}{(186\,\mathrm{s})}\right]$ *a zobrazen na obr. 8.10.*

8.2 Autotest

A 14 Jaký průběh výchylky mají kmity vzniklé složením dvou kmitů o přibližně stejné frekvenci?

A 15 Lze vyjádřit jakýkoliv periodický děj součtem harmonických funkcí?

8.3 Shrnutí

Výchylka harmonického kmitání, která vznikne složením harmonických kmitů, je dána součtem jejich výchylek. Ve zvláštních případech vzniká opět harmonické kmitání. Zvláštním případem je vznik rázů, které vznikají při součtu dvou stejnosměrných kmitání s málo odlišnou frekvencí. Obecně lze ke skládání stejnosměrných harmonických vlnění použít Fourierovu transformaci.

9 Vlnění a vlnová rovnice

9.1 Teorie

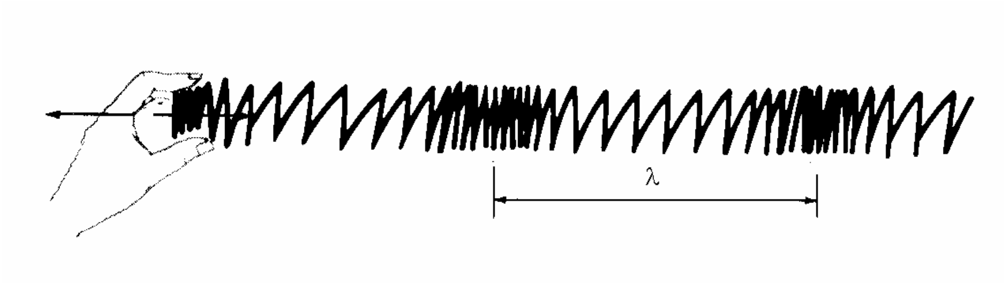
Přesun míče od jednoho hráče k druhému znamená přenos hmoty z místa na místo. Avšak předání instrukce řečí znamená přenos energie z místa na místo bez přesunu hmoty. Toto je základní myšlenka vlnění. Tedy šíření vlnění je přenos energie nikoli hmoty. Znalost kmitání a vlnění je důležitá i z hlediska stavebnictví. Velká amplituda vlnění (kmitání) mostu zapříčiněná nárazovým větrem byla důsledkem zničení tohoto mostu (obr. 9.1). Příčinou destrukce mostu byla rezonance. Při využití znalostí z oblasti vlnění a kmitání lze tyto rezonanční frekvence omezit příp. posunout do vhodnějších frekvenčních oblastí.

obr. 9.1 Tacoma Narrow Bridge při vichřici 7. listopadu 1940

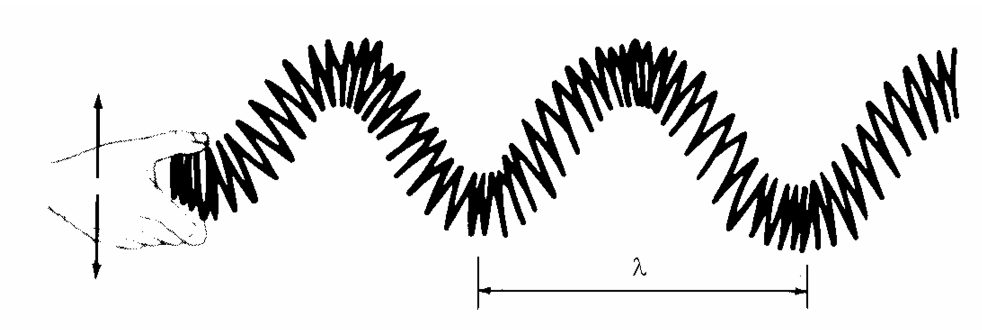
Pro popis vlnění uvažujme prostředí vyplněné částicemi. Tyto částice na sebe vzájemně působí. Změna polohy jedné částice způsobí změnu polohy ostatních částic. Začne-li částice kmitat, rozkmitají se i ostatní. V prostředí se šíří rozruch, avšak částice jen kmitají. Toto vlnění se může šířit v prostředí plynném, kapalném i pevném. Toto vlnění se nazývá *postupným*, neboť rozruch se šíří tzv. rychlostí vlnění. Konají-li částice prostředí kmity ve stejném směru, ve kterém se šíří vlnění (obr. 9.2), nazývá se toto vlnění *podélné* (longitudinální). S podélným vlněním se můžeme setkat ve všech třech skupenství látek. Jsou-li kmity částic kolmé na směr šíření vln (obr. 9.3), nazývá se vlnění *příčné* (transverzální). Vyskytuje se pouze v prostředích, kde působí pružné síly při vzájemném posunutí vrstev, tedy jen v pevných látkách. Pokud výchylky částic prostředí leží v jedné rovině, nazývá se příčné vlnění lineárně polarizované. Zvláštností ve volném prostoru jsou vlny *elektromagnetické*, které jsou pouze vlnami *příčnými* a šíří se i vakuem. Vlnění přenáší energii a hybnost. Významné jsou také *vlny hmoty*, kterými se projevují elementární částice. V dalším textu, pokud nebude uvedeno jinak, se budeme zabývat postupným vlněním.

Rychlost, kterou se šíří kmitavý rozruch v látce, se nazývá *fázová* rychlost vlnění. Označíme ji c [$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$]. Pojem grupová rychlost (rychlost šíření grupy vlnění) nebudeme zavádět, tedy pod pojmem rychlost vlnění budeme uvažovat fázovou rychlost vlnění.

Pro jednoduchost budeme uvažovat homogenní a izotropní prostředí. Zapneme zdroj vlnění (místo odkud se vlna šíří) a od něj se šíří vlnění (obr. 9.4). Plocha proložená všemi body, do nichž právě v daném okamžiku vlna dospěla, nazýváme *čelo* vlny. Plocha proložená všemi body, které v daném okamžiku jsou ve stejné fázi, se nazývá *vlnoplocha*. Čelo vlny je vlnoplocha nejvzdálenější od zdroje. Směry kolmé na vlnoplochy se nazývají *paprsky*. Na obr. 9.5, obr. 9.6, obr. 9.7 a obr. 9.8 je ukázka vzniku a šíření vlnění na hladině rybníka.

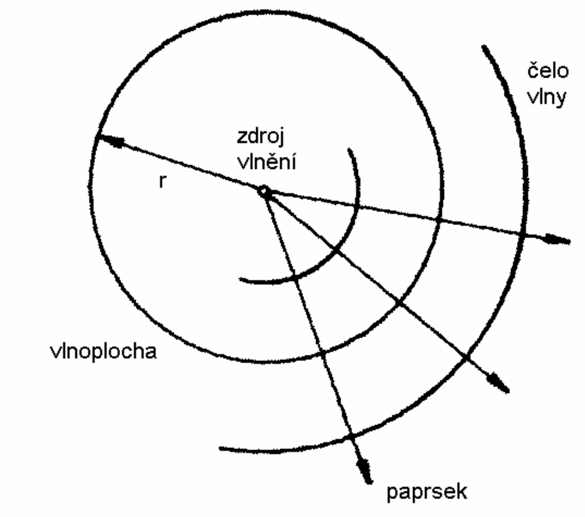


obr. 9.2 Podélné vlnění pružiny



obr. 9.3 Příčné vlnění pružiny

Uvažujeme-li zdroj vlnění bodový (prostředí homogenní a izotropní), pak jsou vlnoplochy *kulové*. V dostatečné vzdálenosti od zdroje je můžeme považovat za *rovinné*.



obr. 9.4 Kulová vlna

Vzdálenost ve směru šíření vlny mezi dvěma nejbližšími body, které kmitají se stejnou fází se nazývá *vlnová délka* a označíme ji λ [m] (obr. 9.2 a obr. 9.3). Tuto vzdálenost urazí vlnění za dobu jedné periody T [s]. Protože vlnění se šíří rychlostí c bude platit

$$\lambda = c \cdot T \ . \qquad (9.1)$$

Ze vztahů (2.3) a (2.5) platných pro kmitání dostaneme

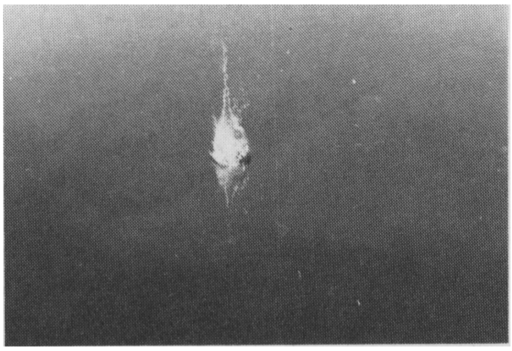
$$\lambda = \frac{c}{f} = c \cdot \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \ , \qquad (9.2)$$

kde f je frekvence [Hz] a ω je úhlová rychlost [s^{-1}].

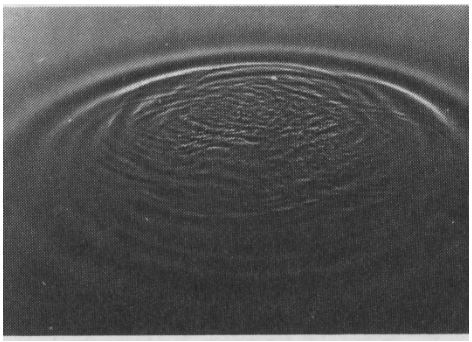
Zopakujme, že úhlová frekvence je dána vztahem

$$\boxed{\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot f \ , \qquad (9.3)}$$

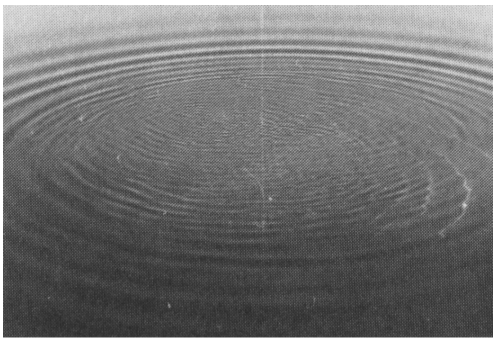
kde T je perioda [s] a f je frekvence [Hz].



obr. 9.5 Zdroj vlnění



obr. 9.6 Šíření vlnění



obr. 9.7 Pokračování šíření vlnění

obr. 9.8 Vlnění utlumeno

Na obr. 9.9 a obr. 9.10 je patrna rychlost šíření vlnění, směr postupu vlnění a výchylka jednoho bodu u jednoduché vlny.

V dalším se budeme nejprve zabývat harmonickou vlnou, jejíž výchylka u [m] je dána rovnicí

$$u(\vec{r}, t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - \vec{k}_{\lambda} \cdot \vec{r} + \varphi) \ , \qquad (9.4)$$

kde U je amplituda [m], ω je úhlová frekvence [s^{-1}], t je čas, $\vec{k}_{\lambda}$ je vlnové číslo (vlnočet) [m^{-1}], $\vec{r}$ je vektor polohy [m] a φ je počáteční fáze.

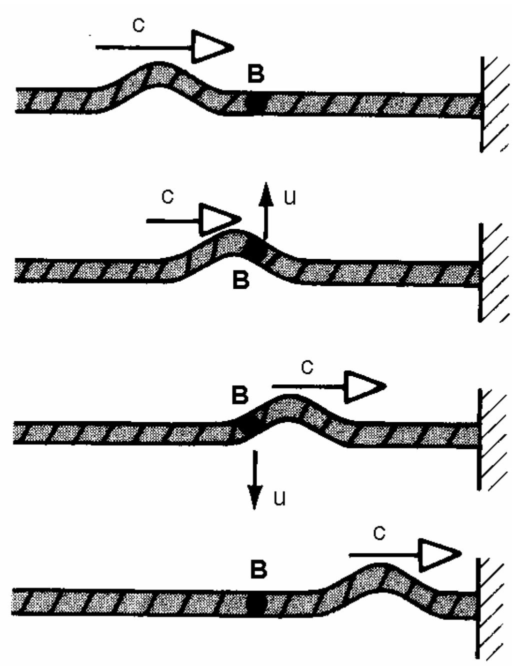
Vektor polohy můžeme rozepsat ve tvaru

$$\vec{r} = \vec{i} \cdot x + \vec{j} \cdot y + \vec{k} \cdot z \ , \qquad (9.5)$$

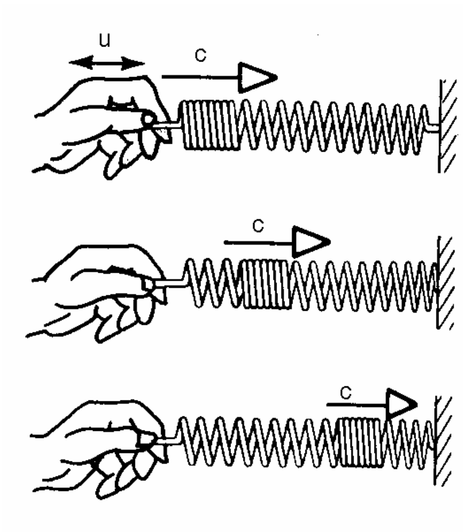
a vlnové číslo

$$\vec{k}_\lambda = \vec{i} \cdot k_x + \vec{j} \cdot k_y + \vec{k} \cdot k_z \ , \qquad (9.6)$$

kde $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$ jsou jednotkové vektory příslušející směrů jednotlivých os *x*, *y* a *z*.



obr. 9.9 Postup příčné vlny



obr. 9.10 Postup podélné vlny

Popis kulové vlny, u které amplituda klesá se vzdáleností a nezávisí na směru od zdroje, závisí pouze na vzdálenosti *r* od zdroje (obr. 9.4) a čase *t*

$$u(r,t) = \frac{U}{r} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot r + \varphi) \ . \qquad (9.7)$$

Rovnice výchylky harmonické vlny (9.4) si zjednodušíme pro případ rovinné vlny, se kterou budeme pro jednoduchost dále pracovat, tj. vlna se bude šířit podél osy x. Rovnice pak přejde na tvar

$$u(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \ . \qquad (9.8)$$

Vlnové číslo můžeme vyjádřit vztahem

$$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \ . \qquad (9.9)$$

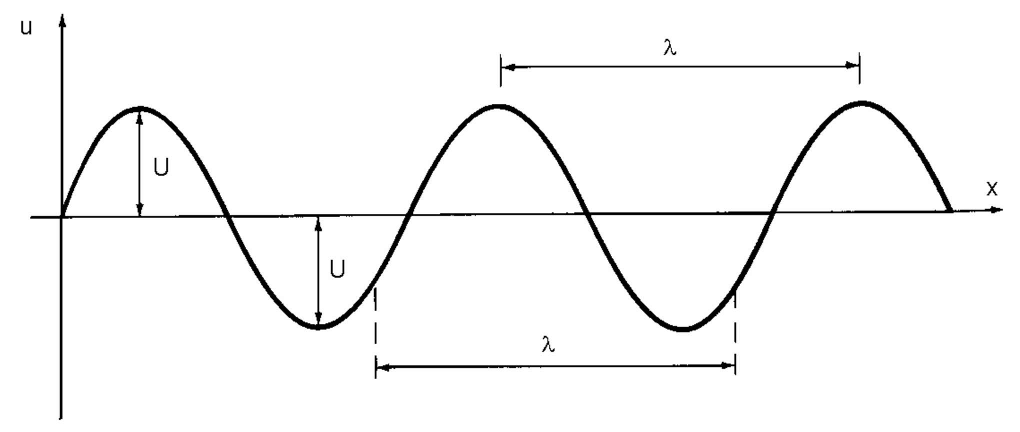
Při použití rovnice (9.2) dostaneme další vyjádření vlnového čísla

$$k = \frac{\omega}{c} \ . \qquad (9.10)$$

Pak rovnice (9.8) přejde na tvar

$$u(x,t) = U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right] . \qquad (9.11)$$

Na obr. 9.11 je nakreslena výchylka při šíření rovinné vlny s popisem význačných veličin.



obr. 9.11 Šíření rovinné vlny

Obecným matematickým popisem vlnění je vlnová rovnice

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (9.12)$$

V této parciální diferenciální rovnici představuje symbol ∇^2 Laplaceův operátor, definovaný

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} . \qquad (9.13)$$

Vlnovou rovnici tedy můžeme napsat ve tvaru

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} . \qquad (9.14)$$

Vlnová rovnice platí pro vlny v libovolném prostředí, v němž fázová rychlost c nezávisí na bližším charakteru vln. Rychlost šíření závisí pouze na vlastnostech prostředí.

Rychlost šíření vlnění je ve vztahu s vlnovým číslem

$$c = \frac{\omega}{k} , \qquad (9.15)$$

kde vlnové číslo k je

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} . \qquad (9.16)$$

Kontrolní otázky

Může se podélné vlnění šířit pevným prostředím?

Kterými prostředí se může šířit příčné vlnění?

Jaký je rozdíl mezi rychlostí částice a rychlostí vlnění?

Které parametry (veličiny) ovlivňují frekvenci kmitání lineárního netlumeného harmonického oscilátoru?

Příklad 9.1

Harmonickou rovinnou vlnu máme popsanou rovnicí

$$u(x,t) = \left(3{,}27\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\right)\cdot\sin\left[\left(72{,}1\ \mathrm{m}^{-1}\right)\cdot x - \left(2{,}72\ \mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t\right].$$

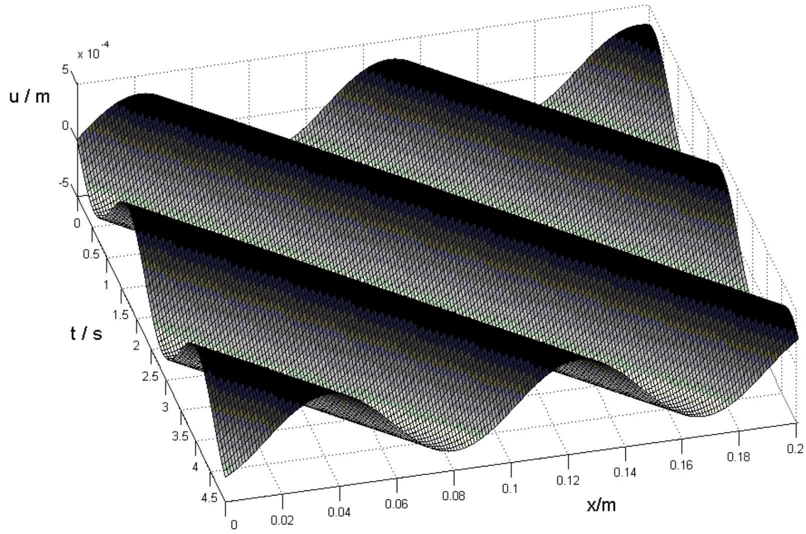
Určete nebo vypočtěte amplitudu, vlnovou délku, periodu, frekvenci a rychlost šíření vlnění.

Řešení

Porovnáním s rovnicí (9.8) příp. (9.11)

$$u(x,t) = U\cdot\sin(\omega\cdot t - k\cdot x + \varphi)$$

můžeme určit amplitudu $U = 3{,}27\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}$ *úhlovou frekvenci* $\omega = 2{,}72\ \mathrm{s}^{-1}$, *vlnočet* $k = 72{,}1\ \mathrm{m}^{-1}$ *a počáteční fázi* $\varphi = 0$.



obr. 9.12 Zobrazení výchylky rovinné vlny

Vlnovou délku dostaneme z vlnového čísla (9.9)

$$\lambda = \frac{2\cdot\pi}{k} = \frac{2\cdot\pi}{\left(72{,}1\ \mathrm{m}^{-1}\right)} = 87{,}1\cdot10^{-3}\ \mathrm{m},$$

periodu

$$T=\frac{2\cdot\pi}{\omega}=\frac{2\cdot\pi}{\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)}=2{,}31\,\mathrm{s},$$

frekvenci

$$f=\frac{1}{T}=\frac{\omega}{2\cdot\pi}=\frac{\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)}{2\cdot\pi}=0{,}43\,\mathrm{Hz}.$$

Rychlost šíření vlnění z rovnice (9.10)

$$c=\frac{\omega}{k}=\frac{\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)}{\left(72{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\right)}=37{,}3\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

Amplituda vlnění je 3,27 mm, vlnová délka 87,1 mm, perioda kmitání 2,31 s, frekvence 0,43 Hz a rychlost šíření vlnění 37,3·10^{-3} *m·s*$^{-1}$*. Průběh výchylky je zobrazen v grafu na* obr. 9.12*, kde u je výchylka (svislá osa), x je směr šíření vlnění (osa šikmo nahoru doprava) a t je čas (osa šikmo dolů). Počátek os je vlevo.*

Příklad 9.2

Harmonickou rovinnou vlnu máme popsanou rovnicí

$$u(x,t)=\left(3{,}27\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\right)\cdot\sin\left[\left(72{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\right)\cdot x-\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t\right].$$

Určete výchylku bodu na souřadnici 220 mm v čase 18 s.

Řešení

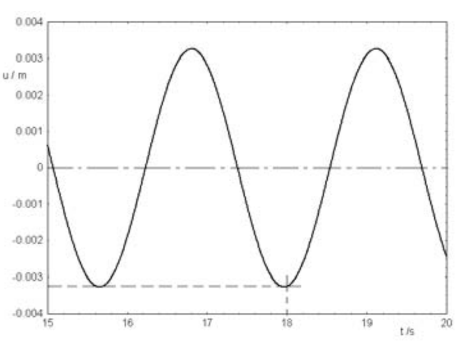
Označíme $x_1 = 0{,}22$ *m a* $t_1 = 18$ *s. Dosadíme do rovnice*

$$u(x_1,t_1)=\left(3{,}27\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\right)\cdot\sin\left[\left(72{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\right)\cdot x_1-\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot t_1\right],\ tj.$$

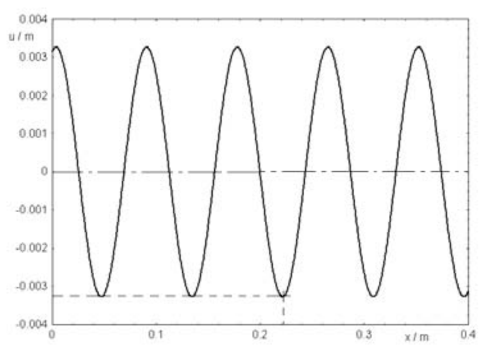
$$u[(0{,}22\,\mathrm{m}),(18\,\mathrm{s})]=\left(3{,}27\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}\right)\cdot\sin\left[\left(72{,}1\,\mathrm{m}^{-1}\right)\cdot(0{,}22\,\mathrm{m})-\left(2{,}72\,\mathrm{s}^{-1}\right)\cdot(18\,\mathrm{s})\right].$$

Nezapomeňte počítat funkci sinus v radiánech.

$$u[(0{,}22\,\mathrm{m}),(18\,\mathrm{s})]=-3{,}25\cdot10^{-3}\ \mathrm{m}.$$



obr. 9.13 Kmitání bodu o souřadnici 220 mm



obr. 9.14 Vlna v čase 18 s

Průběh vlnění je zobrazen na obr. 9.12. *Poloha bodu je zřetelná při řezech v poloze* obr. 9.13 *nebo čase* obr. 9.14. *Všimněme si, že v jednom obrázku je vodorovná osa čas* obr. 9.13, *ze které lze určit periodu, ale ve druhém je na vodorovné ose poloha* obr. 9.14, *kde lze odečíst vlnovou délku.*

Výsledná výchylka bodu na souřadnici 220 mm v čase 18 s je -3,25 mm.

Příklad 9.3

Harmonické kmity jsou buzeny zdrojem kmitání určeným vztahem $u(t) = (20\ \mathrm{m}) \cdot \sin\left[\left(2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$. *Ze zdroje se šíří rovinná vlna rychlostí* $300\ m{\cdot}s^{-1}$. *Napište rovnici vlnění.*

Řešení

Označíme rychlost $c = 300\ m{\cdot}s^{-1}$. *Porovnáním rovnice zdroje kmitání* $u(t) = (20\ \mathrm{m}) \cdot \sin\left[\left(2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t\right]$ *s rovnicí* $u(t) = U \cdot \sin[\omega \cdot t + \varphi]$ *dostaneme -*

amplituda $U = 20\ m$ *a úhlová frekvence* $\omega = 2{,}5{\cdot}\pi\ s^{-1}$. *Vlnové číslo určíme z rovnice* $k = \dfrac{\omega}{c} = \dfrac{\left(2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}\right)}{\left(300\ \mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\right)} = 8{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1}$. *Dosazením do rovnice (9.8) s nulovou počáteční fází dostaneme* $u(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$ *tedy*

$$u(x,t) = (20\ \mathrm{m}) \cdot \sin\left[\left(2{,}5\ \mathrm{s}^{-1}\right) \cdot t - \left(8{,}3 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^{-1}\right) \cdot x\right].$$

Příklad 9.4

Nalezněte tvar vlnové rovnice, jejímž řešením je rovinná vlna , která se šíří ve směru osy x dle rovnice

$$u = u(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$$

Řešení

Vypočteme parciální derivace funkce u podle jednotlivých proměnných

$$\frac{\partial u}{\partial t} = U \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -U \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = -\omega^2 \cdot u$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -U \cdot k \cdot \cos(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -U \cdot k^2 \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) = -k^2 \cdot u$$

tedy vyjádřením výchylky u z druhé parciální derivace dle času t a dosazením do druhé parciální diferenciální rovnice dle polohy x dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{k^2}{\omega^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

kde fázová rychlost c je dána vztahem

$$c = \frac{\omega}{k}.$$

Výsledná rovnice je

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, *která odpovídá rovnici (9.12) resp. (9.14)*

9.2 Autotest

A 16 Jaký je rozdíl mezi vlněním a kmitáním?

A 17 Jak se může vlnění šířit? (Jaké jsou druhy vlnění?)

A 18 Může se mechanické vlnění šířit ve vakuu?

A 19 Je možné popsat obecně šíření vlnění?

9.3 Shrnutí

Výchylka postupné harmonické rovinné vlny postupující podél osy x je dána rovnicí

$u(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi)$ nebo $u(x,t) = U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi\right]$.

Výchylka kulové vlny má obdobnou rovnici, pouze amplituda klesá se vzdáleností

$$u(r,t) = \frac{U}{r} \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot r + \varphi).$$

Vlnové číslo (vlnočet)

$k = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$ příp. $k = \frac{\omega}{c}$.

Úhlová frekvence

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = \frac{2 \cdot \pi}{T}.$$

Vlnová rovnice má tvar

$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ resp. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

10 Rychlost a intenzita vlnění

10.1 Teorie

Rychlost *postupné vlny* (obr. 10.1) představuje poměr $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$, který v limitě přejde na derivaci $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$. Tedy bod na křivce postupu vlny za dobu Δt urazí vzdálenost Δx. Tento bod musí mít neustále stejnou fázi. Z rovnice (9.8) dostaneme

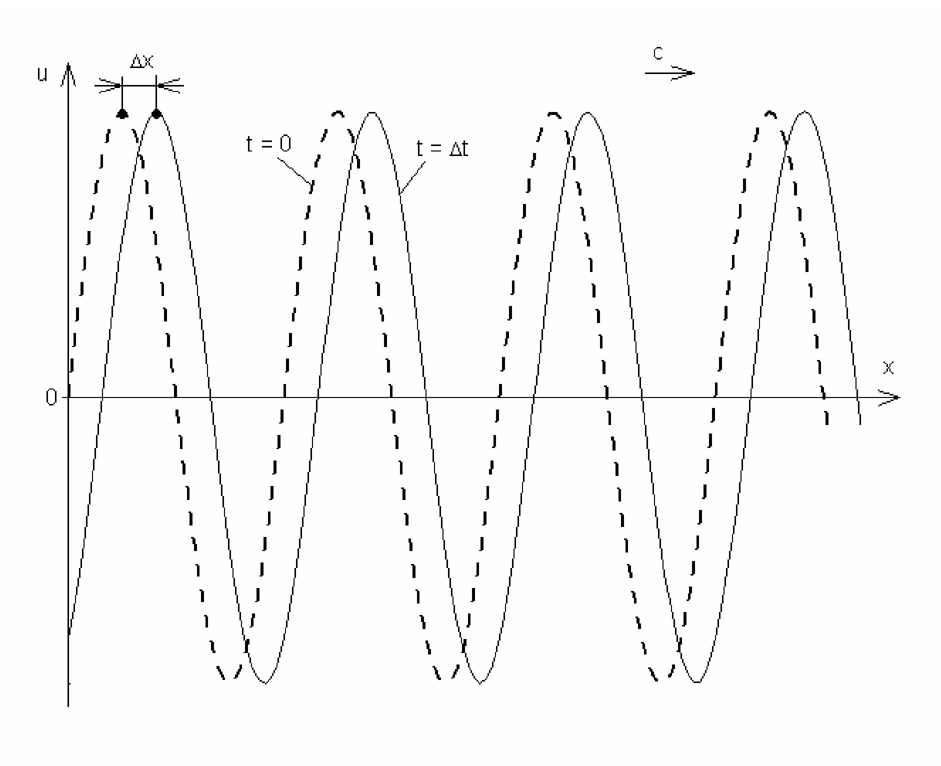
$$\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi = konst_1 \text{ , tj. } x = \frac{\omega \cdot t}{k} + konst \ . \qquad (10.1)$$

Derivací této rovnice dle času dostaneme rychlost šíření postupné vlny

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{k} = c \ . \qquad (10.2)$$

Využitím vztahů (9.3) a (9.9) dostaneme z (10.2)

$$c = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f \ . \qquad (10.3)$$



obr. 10.1 Postupná vlna ve dvou časových okamžicích

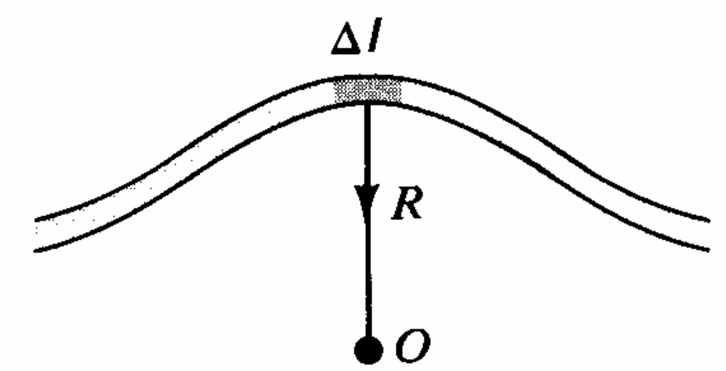
Rychlost šíření mechanického vlnění v pevných pružných látkách je obecně složitá úloha. Obecně vycházíme ze základní vlnové rovnice (9.12). Některé rychlosti šíření postupného vlnění jsou v kapitole 14 uvedeny bez odvození viz. tabulka 1.

Rychlost příčné vlny na struně odvodíme z obr. 10.2 a obr. 10.3. Radiální síla F_r na malém elementu Δl bude působit pod malým úhlem Θ, takže můžeme uvažovat $\sin\Theta \cong \Theta$,

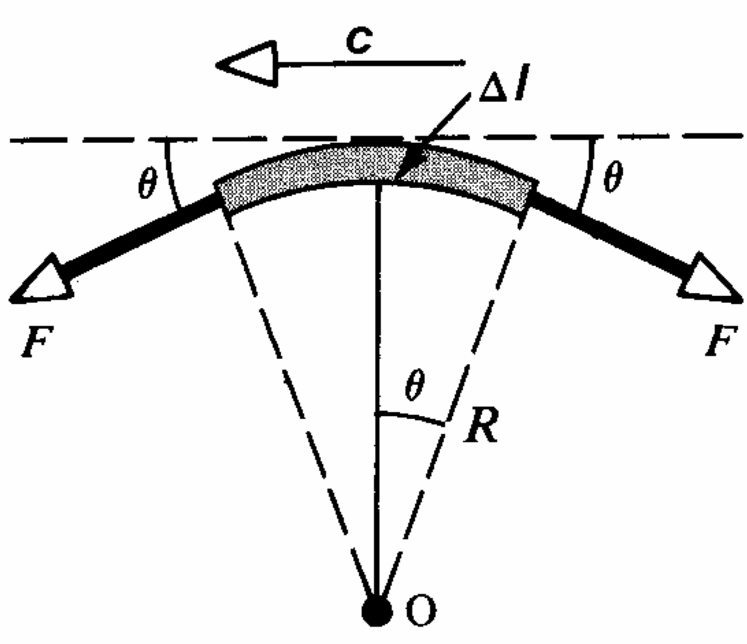
$$F_r = 2 \cdot F \cdot \sin\Theta \cong 2 \cdot F \cdot \Theta \ . \qquad (10.4)$$

Pro element můžeme uvažovat hmotnost $m = \mu \cdot \Delta l$, kde μ je plošná hustota (hmotnost na jednotku délky). Úsek $\Delta l = R \cdot 2 \cdot \Theta$ a tedy hmotnost bude $m = \mu \cdot R \cdot 2 \cdot \Theta$. Použitím Newtonova zákona dostaneme

$$F_r = m \cdot a_r = m \cdot \frac{c^2}{R} = \frac{2 \cdot \mu \cdot R \cdot \Theta \cdot c^2}{R} = 2 \cdot F \cdot \Theta \ . \qquad (10.5)$$



obr. 10.2 Šíření vlny na struně



obr. 10.3 Výřez elementu při šíření vlnění na struně

Vyjádřením rychlosti šíření vlnění c dostaneme vztah

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \ , \qquad (10.6)$$

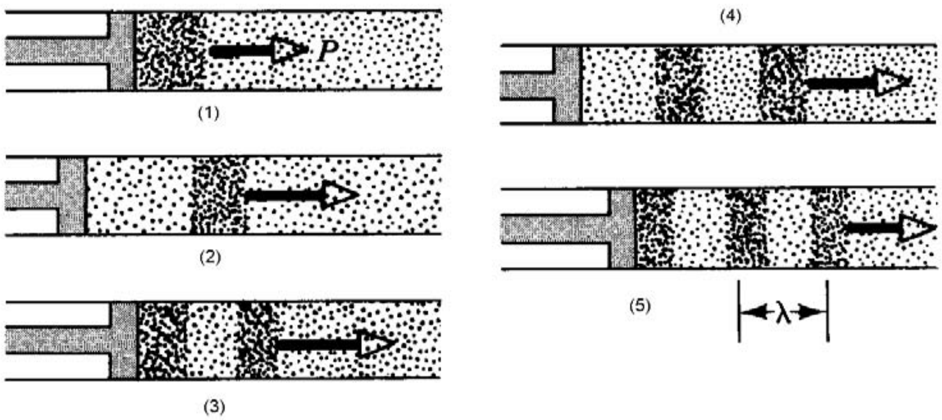
tedy rychlost šíření je odmocnina z podílu pružnosti a setrvačnosti.

Rychlost podélného vlnění v kapalinách a plynech je

$$c = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \ , \qquad (10.7)$$

kde K je modul objemové pružnosti [N·m^{-2}] a ρ je hustota [kg·m^{-3}]. Modul K je převrácenou hodnotou stlačitelnosti γ, je tedy funkcí objemu V a tlaku p.

$$K = \frac{1}{\gamma} = -V \cdot \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \ . \qquad (10.8)$$



obr. 10.4 Šíření podélného vlnění v plynu nebo kapalině

Vlněním se v prostoru přenáší energie. Nejdůležitější charakteristikou přenosu energie vlnou je ***intenzita*** vlnění v určitém místě prostoru [W·m^{-2}]. Tok energie Φ [W] je definován jako podíl energie E [J] přenesené za dobu t [s]

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} \ . \qquad (10.9)$$

Zářivý tok je roven výkonu. Intenzita je podíl elementárního toku energie prošlého elementární plochou

$$I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} \ . \qquad (10.10)$$

U rovinné vlny, která není absorbována prostředím, má stálou velikost. V případě harmonické vlny je celková energie kmitající částice (harmonického oscilátoru)

$$E = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \omega^2 \cdot U^2 \ . \qquad (10.11)$$

Časově průměrovaná hodnota *hustoty energie* w [J·m^{-3}] vyjadřuje kmitání spojitého prostředí hustoty ρ [kg·m^{-3}]

$$< w >= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot U^2 \ . \qquad (10.12)$$

Plochou jednotkové velikosti za jednotku času projde tedy energie $c \cdot w$ což odpovídá intenzitě vlnění

$$I = c \cdot w = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot U^2 \cdot c = 2 \cdot \pi^2 \cdot \rho \cdot f^2 \cdot U^2 \cdot c \ . \qquad (10.13)$$

Intenzita vlnění harmonické rovinné vlny tedy roste s hustotou prostředí ρ, rychlostí šíření vlnění c, se čtvercem frekvence f a amplitudy U.

Poznamenejme, že pokud je zdroj vlnění bodový, pak se energie vyzářená zdrojem za jednotku času rovnoměrně rozprostře na jednotlivé kulové vlnoplochy. Tedy intenzita energie ubývá úměrně čtverci vzdálenosti, tj.

$$I \approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot r^2} \ . \qquad (10.14)$$

Toto je zákon převrácených čtverců, který platí za stejných geometrických důvodů pro všechny druhy záření – energie je rozložena spojitě.

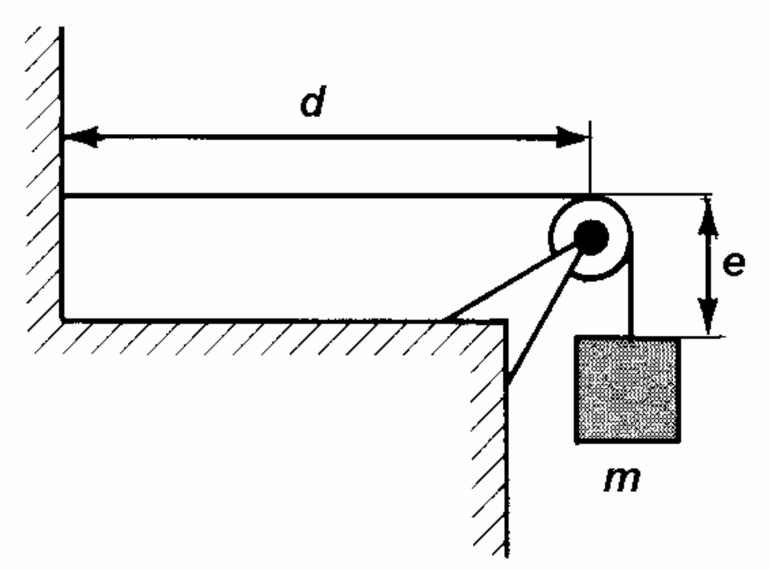
Kontrolní otázky

Jaký je rozdíl mezi rychlostí při kmitání bodu a rychlostí šíření vlnění?

Na čem závisí rychlost šíření vlnění ve struně?

Příklad 10.1

*Struna má hmotnost 0,3 kg a délku 6 m. Na struně je zavěšeno závaží o hmotnosti 2 kg (*obr. 10.5*). Určete rychlost šíření pulzu na struně a čas, za který se přemístí z jednoho konce na druhý. Tíhové zrychlení uvažujme 9,8 m·s^{-2}.*



obr. 10.5 Struna d = 5 m, e = 1 m se závažím m = 2 kg

Řešení

Označme použité veličiny $m_l = 0{,}3$ kg, $l = 6$ m, $m = 2$ kg, $d = 5$ m, $e = 1$ m, $g = 9{,}8\ m{\cdot}s^{-2}$.

Síla napínající strunu je

$$F = m \cdot g = (2\,\mathrm{kg}) \cdot (9{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}) = 19{,}6\,\mathrm{N}\,.$$

Rychlost šíření vlnění ve struně dle (10.6)

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{F}{\frac{m_l}{l}}} = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m_l}} = \sqrt{\frac{(19{,}6\,\mathrm{N}) \cdot (6\,\mathrm{m})}{(0{,}3\,\mathrm{kg})}} = 19{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}\,.$$

Doba, za kterou pulz urazí dráhu z jednoho pevného konce k upevnění na kladce je

$$t = \frac{d}{c} = \frac{5\,\mathrm{m}}{19{,}8\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-1}} = 0{,}25\,\mathrm{s}\,.$$

Pulz ve struně se pohybuje rychlostí 19,8 $m{\cdot}s^{-1}$ a vzdálenost mezi upevněnými konci urazí za 0,25 s.

10.2 Autotest

A 20 Na čem závisí rychlost šíření postupné vlny?

A 21 Co znamená pojem intenzita vlnění?

10.3 Shrnutí

Rychlost šíření $c = \dfrac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$

Intenzita vlnění $I = c \cdot w = \dfrac{1}{2} \cdot \rho \cdot \omega^2 \cdot U^2 \cdot c = 2 \cdot \pi^2 \cdot \rho \cdot f^2 \cdot U^2 \cdot c$

11 Interference vlnění

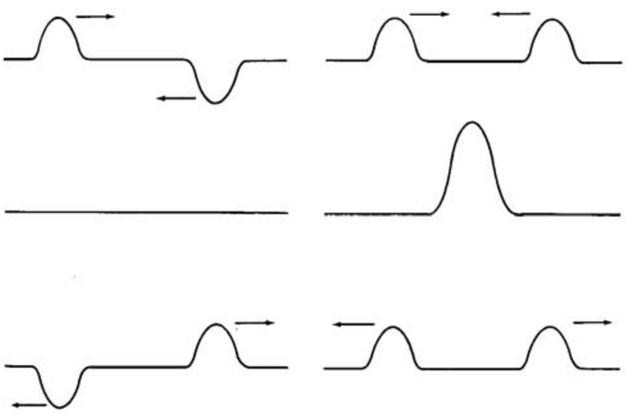
11.1 Teorie

Pokud se prostředím šíří více vln současně, postupuje každá vlna tak, jakoby se šířila sama. Vhodíme-li současně na klidnou vodní hladinu dva kaménky v určité vzdálenosti od sebe, uvidíme šíření vlnění ze dvou zdrojů (*obr. 11.1*). Vlny se šíří od každého místa dopadu a v určité oblasti se kříží a dále postupují jakoby se nepotkaly. Pro šíření vln platí zákon nezávislosti.

obr. 11.1 Interference vodních vln.

V oblasti prostředí, kde se setkávají vlny, je výsledná výchylka vektorovým součtem jednotlivých vlnění – platí princip superpozice.

Skládání harmonických vln, jejichž směry kmitání a frekvence kmitů jsou stejné a rozdíl fází se nemění, pak se tyto vlny nazývají koherentní. Superpozice koherentních vln se nazývá *interference*.

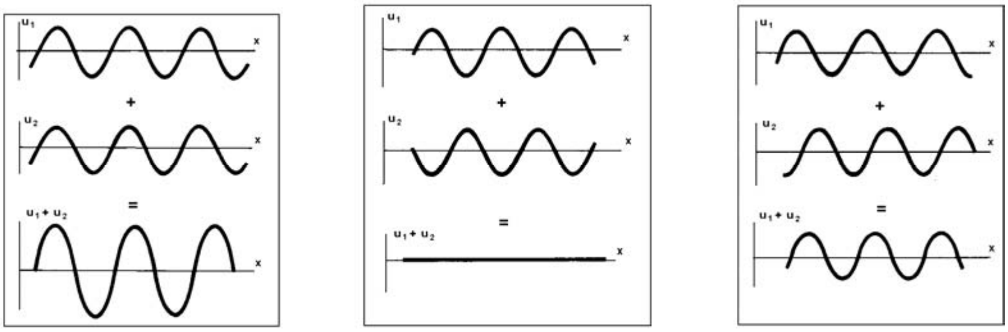


obr. 11.2 Šíření vlnění – vlevo destruktivní, vpravo konstruktivní

Dále pro jednoduchost se budeme zabývat šířením polarizovaného vlnění ve směru x-ové osy (koherentní). Pokud se šíří dvě vlny proti sobě, mohou v okamžiku křížení nastat dva typy interference (*obr. 11.2*) - *destruktivní* (*obr.*

11.2 vlevo), kdy výchylky vln se odčítají, a *konstruktivní* (*obr. 11.2* vpravo), kdy se výchylky sčítají.

Říkáme, že vlnění je ve fázi, jedná-li se o konstruktivní interferenci, a v protifázi nebo opačné fázi, je-li interference destruktivní.



obr. 11.3 Interference vlnění – vlevo konstruktivní, uprostřed destruktivní, vpravo částečně destruktivní

Pro interferenci dvou postupných vln ve směru osy x platí

$$u_s(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) \ . \qquad (11.1)$$

kde

$$u_1(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) \qquad (11.2)$$

a

$$u_2(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \ . \qquad (11.3)$$

Vlny dle (11.2) a (11.3) mají stejnou úhlovou frekvenci ω, tedy stejnou frekvenci f, stejný úhlový vlnočet k, tj. stejnou vlnovou délku λ, stejnou amplitudu U. Dle (9.10) se tedy šíří i stejnou rychlostí šíření c. Tyto vlny jsou posunuty o fázi φ. Na základě interference (11.1) dostaneme

$$u_s(x,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x) + U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot x + \varphi) \ . \qquad (11.4)$$

Matematickou úpravou s využitím matematického vztahu pro součet sinů

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \ , \qquad (11.5)$$

dostaneme

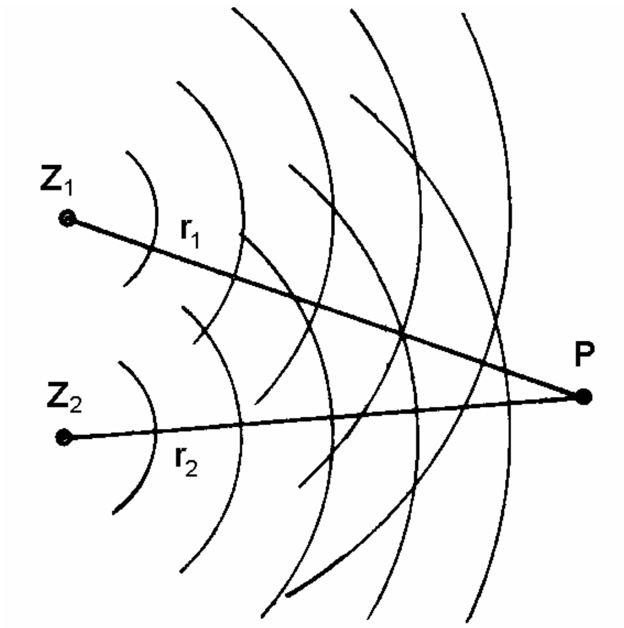
$$u_s(x,t) = \left[2 \cdot U \cdot \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right] \cdot \sin\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right) \ . \qquad (11.6)$$

tj.

$$u_s(x,t) = U_s \cdot \sin\left(\omega \cdot t - k \cdot x + \frac{\varphi}{2}\right) \ . \qquad (11.7)$$

Výsledné vlnění je opět harmonickou postupnou vlnou.

Dále rozebereme interferenci vlnění dvou bodových koherentních zdrojů Z_1 a Z_2 se stejnou amplitudou v libovolném bodě P dle



obr. 11.4 Interference vlnění – vlevo konstruktivní, uprostřed destruktivní, vpravo částečně destruktivní

Okamžitá výchylka generovaná zdrojem Z_1 je

$$u_1(r,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot r_1 + \varphi_1) \tag{11.8}$$

a zdrojem Z_2 je

$$u_2(r,t) = U \cdot \sin(\omega \cdot t - k \cdot r_2 + \varphi_2) \ . \tag{11.9}$$

Výsledná interference dle (11.1) s využitím (11.5) dostaneme

$$u_s = 2 \cdot U \cdot \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - k \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \tag{11.10}$$

Rovnice (11.10) je opět harmonickou vlnou. Amplituda výsledných kmitů je

$$U_s = 2 \cdot U \cdot \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \ . \tag{11.11}$$

Amplituda výsledných kmitů je harmonickou funkcí (kosinus), jejíž argument je vhodné vyjádřit jako n násobek π

$$k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = n \cdot \pi \ . \tag{11.12}$$

V případě, že n je celočíselné $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ nastává interferenční maximum (funkce kosinus je rovna jedné). V případě, že n je polovinové $n = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2} \cdots$, vzniká interferenční minimum (funkce kosinus má nulovou hodnotu).

Kontrolní otázky

Jaký je rozdíl mezi destruktivní a konstruktivní interferencí?

?

Příklad 11.1

Na struně postupují souhlasným směrem dvě identické harmonické vlny a interferují spolu. Amplitudy výchozích vln jsou 12 mm a jejich fázový rozdíl je 45°. Vypočtěte amplitudu výsledné vlny, vznikající interferencí obou výchozích vln.

Řešení

Označme použité veličiny $U = 12 \cdot 10^{-3}$ *m,* $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \pi/4$*,* $\Delta r = r_1 - r_2 \;\; 0$ *m.*

Využitím rovnice (11.11) dostaneme

$$U_s = 2 \cdot U \cdot \cos\left(k \cdot \frac{r_1 - r_2}{2} + \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) = 2 \cdot \left(12 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}\right) \cdot \cos\left(k \cdot \frac{(0\ \mathrm{m})}{2} + \frac{\frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$U_s = 0{,}022\ \mathrm{m}\,.$$

Amplituda výsledné vlny je $22 \cdot 10^{-3}$ *m.*

11.2 Autotest

A 22 Jaké vlnění vznikne interferencí dvou sinusových vln o stejné amplitudě a stejné vlnové délce postupující v napnuté struně souhlasným směrem?

A 23 Jaký je rozdíl mezi superpozicí a interferencí vlnění?

11.3 Shrnutí

Pro výchylky vln postupujících na téže struně se uplatňuje princip superpozice, tj. výchylky se sčítají nebo odčítají. Superpozice postupných harmonických vln, které se shodují ve směru šíření, amplitudě a frekvenci, tedy i vlnové délce, a liší se fázovým posunem, vzniká interferencí jediná vlna stejné frekvence

$$u_s = 2 \cdot U \cdot \cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) \cdot \sin\left(\omega \cdot t - k \cdot r + \frac{\Delta\varphi}{2}\right).$$

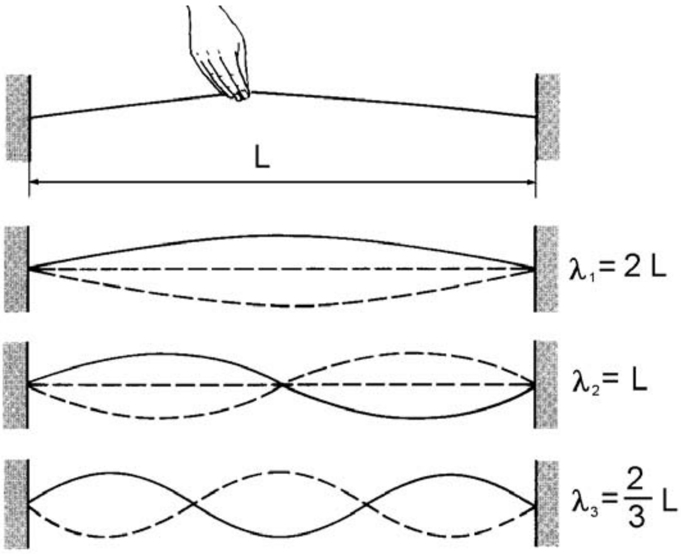
V případě $\Delta\varphi = 0$ jsou vlny ve fázi a interference je konstruktivní, je-li $\Delta\varphi = \pi$ jsou vlny v protifázi a interference je destruktivní.

12 Stojaté vlnění

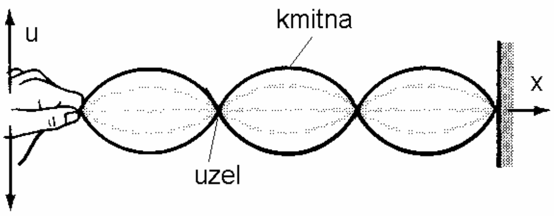
12.1 Teorie

Důležitým případem vlnění, které vznikne interferencí dvou postupných vlnění stejného kmitočtu a amplitudy, která se šíří proti sobě, je ***stojaté vlnění***.

V případě struny, která je uchycena na obou koncích, napnuta a puštěna vznikne stojaté vlnění (obr. 12.1). Vlivem interference odraženého vlnění vznikají v místech destruktivní interference *uzly* a v místech konstruktivní interference *kmitny* (obr. 12.2). Frekvence, které vznikají při šíření stojatého vlnění se nazývají *vlastní* nebo *rezonanční*.



obr. 12.1 Stojaté vlnění na struně s určením vlnové délky



obr. 12.2 Stojaté vlnění na struně se znázorněním kmiten a uzlů

Mějme stojaté vlnění, které je tvořeno součtem výchylky postupné vlny

$$u_1(x,t) = U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{12.1}$$

a odražené

$$u_2(x,t) = U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right], \tag{12.2}$$

tj. dle rovnice (11.1) dostaneme

$$u(x,t) = U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right] + U \cdot \sin\left[2 \cdot \pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)\right] . \qquad (12.3)$$

Úpravou rovnice (12.3) s využitím rovnice (11.5) dostaneme

$$u(x,t) = 2 \cdot U \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{2 \cdot \pi}{T} \cdot t\right) . \qquad (12.4)$$

Argument u funkce kosinus není závislý na čase, ale pouze na poloze. Proto můžeme výraz (12.5) pokládat za výslednou amplitudu

$$U_S(x) = 2 \cdot U \cdot \left|\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right)\right| . \qquad (12.5)$$

Nejvyšší amplituda $U_k = 2 \cdot U$ je za podmínky, kdy

$$\left|\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right)\right| = 1 . \qquad (12.6)$$

Podmínka (12.6) nastává pro polohu

$$x_k = \pm n \cdot \frac{\lambda}{2} \text{ pro } n = 0,1,2,\dots . \qquad (12.7)$$

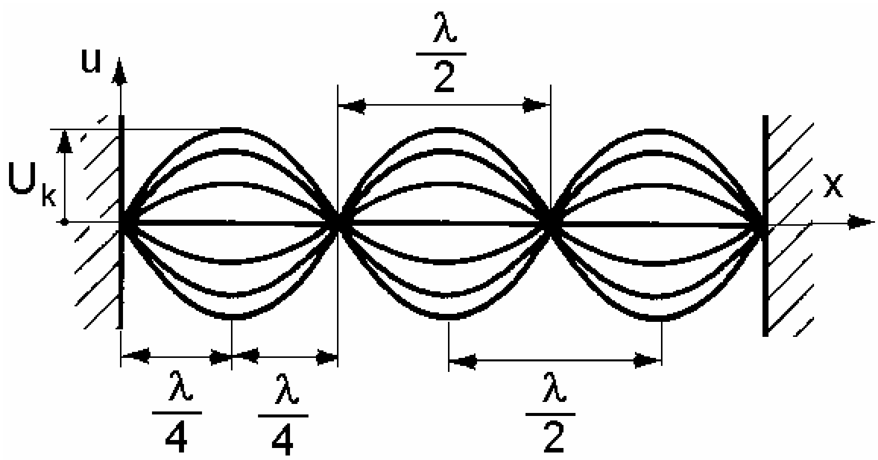
Tato místa se nazývají kmitny a jsou od sebe vzdálena o $\frac{\lambda}{2}$.

Uzly jsou místa, kde $U_u = 0$, tj. musí být splněna podmínka

$$\left|\cos\left(\frac{2 \cdot \pi}{\lambda} \cdot x\right)\right| = 0 . \qquad (12.8)$$

Tato podmínka (12.8) je splněna pro

$$x_u = \pm(2 \cdot n + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \text{ pro } n = 0,1,2,\dots . \qquad (12.9)$$



obr. 12.3 Vzdálenosti uzlů a kmiten u stojatého vlnění

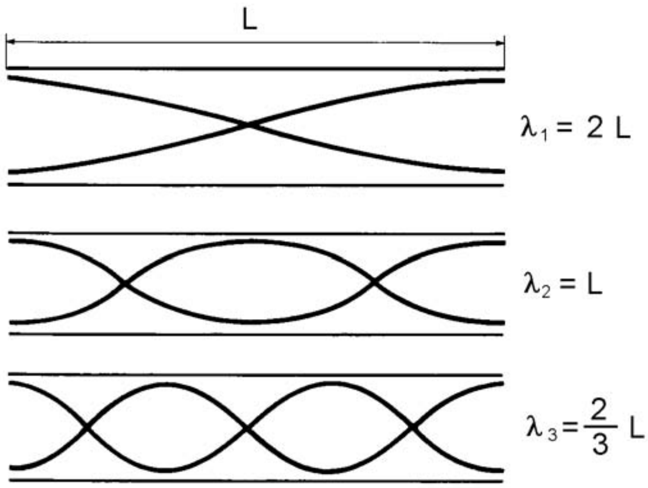
Vzdálenost dvou sousedních uzlů je opět $\frac{\lambda}{2}$. Vzdálenost uzlu a kmitny je $\frac{\lambda}{4}$ (obr. 12.3).

Z rovnice (10.3) dostaneme vlastní frekvence napnuté struny (v souladu s obr. 12.1)

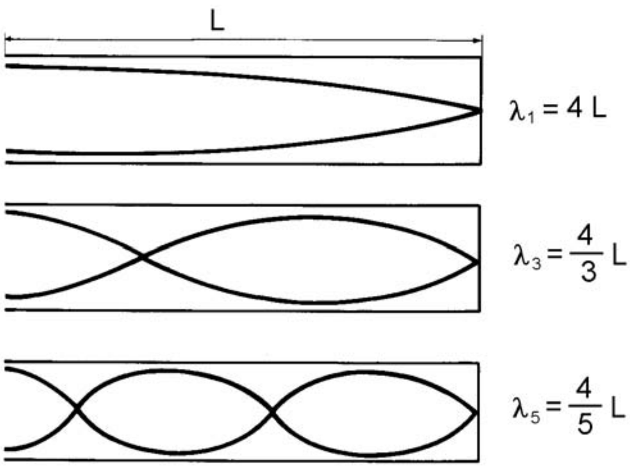
$$f_n = n \cdot \frac{c}{\lambda_n} n \cdot \frac{c}{2 \cdot L} \text{ pro } n = 1,2,3,\dots \qquad (12.10)$$

Frekvence vypočtené z rovnice (12.10) se nazývají harmonické (1. harmonická, 2. harmonická, ..., n-tá harmonická). Harmonické frekvence vyšší než první (základní) harmonická se nazývají vyšší harmonické. Poznamenejme, že uvedené vlnění je příčné.

Obdobně můžeme vyjádřit stojaté vlnění v otevřené píšťale, tedy trubicí, která má oba konce otevřené (i zde vzniká odraz). Zde se jedná o vlnění podélné. Mění se pouze tvar vlnění dle obr. 12.4. I její vlnové délky musí odpovídat délce trubice.



obr. 12.4 Stojaté vlnění vzduchu v píšťale s otevřenými konci



obr. 12.5 Stojaté vlnění vzduchu v píšťale s otevřeným a uzavřeným koncem

Kontrolní otázky

Kdy nastává stojaté vlnění?

Příklad 12.1

Stojaté vlnění vzniklo interferencí dvou vln s frekvencí 475 Hz. Vzdálenost sousedních uzlů je 1,5 m. Jaká je rychlost postupného vlnění v prostředí, ve kterém stojaté vlnění vzniklo?

Řešení

Označme $f = 500$ Hz, $d = 1{,}5$ m.

Vzdálenost dvou sousedních uzlů je $\frac{\lambda}{2}$ *tedy* $d = \frac{\lambda}{2}$. *Rychlost šíření postupného vlnění dle (10.3) je*

$$c = \lambda \cdot f = 2 \cdot d \cdot f = 2 \cdot (1{,}5\,\mathrm{m}) \cdot (500\,\mathrm{Hz}) = 1500\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Rychlost šíření vlnění je 1500 m/s.

12.2 Autotest

A 24 Jaká je vzdálenost dvou sousedních kmiten při stojatém vlnění?

A 25 Kdy vzniká na okraji stojatého vlnění uzel?

A 26 Mění se poloha uzlů příp. kmiten?

12.3 Shrnutí

Stojaté vlnění vzniká interferencí dvou identických sinusových vln postupujících v opačných směrech. V případě struny upevněné na obou koncích je vlnění popsáno

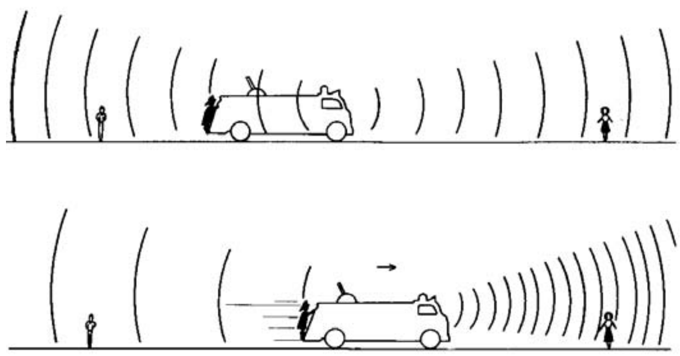
$$u(x,t) = 2 \cdot U \cdot \cos(k \cdot x) \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Uzel (kmitna) je poloha nulové (maximální) výchylky. Poloha kmiten a uzlů se nemění.

13 Dopplerův jev

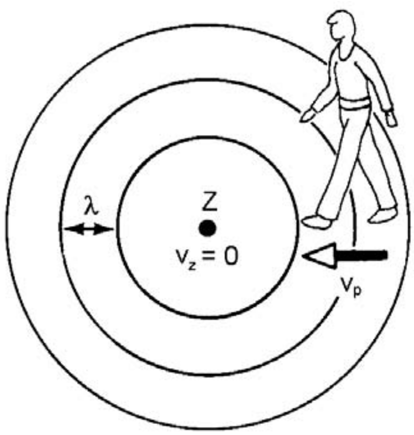
13.1 Teorie

Ze zkušenosti víme, že projede-li kolem nás houkající vozidlo (obr. 13.1), vnímáme tón houkačky jako vyšší, když se zdroj přibližuje (pozorovatel vpravo na obr. 13.1 dole), a jako nižší, jestliže se vzdaluje (pozorovatel vlevo na obr. 13.1 dole). Úkaz, že kmitočet přijímaného vlnění se mění dle pohybu pozorovatele nebo zdroje vzhledem k prostředí, se nazývá Dopplerův jev.



obr. 13.1 Šíření vlnění od vozidla s houkačkou v klidu (nahoře) a v pohybu (dole)

Pro jednoduchost budeme uvažovat pouze přímočarý pohyb ve směru pozorovatel – zdroj.



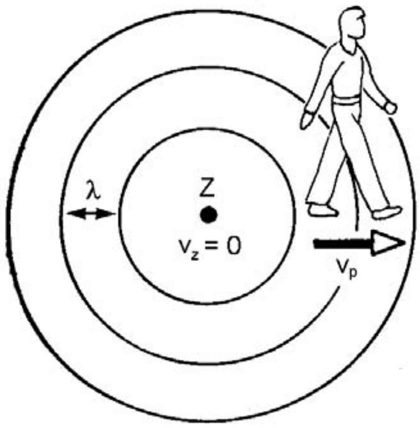
obr. 13.2 Dopplerův jev při zdroji v klidu a pohybu pozorovatele směrem ke zdroji

Nejprve uvažujme stav dle obr. 14.2 , kdy zdroj Z je v klidu a pozorovatel se pohybuje směrem ke zdroji rychlostí v_p. Frekvence, kterou zaznamená pozorovatel f', lze určit z frekvence vysílané zdrojem f a vlnové délky λ

$$f' = f + \Delta f = f + \frac{v_p}{\lambda}. \qquad (13.1)$$

Protože dle (9.2) je $\lambda = \frac{c}{f}$, kde c je rychlost šíření vlnění, dostaneme po úpravách

$$f' = f \cdot \left(\frac{c + v_p}{c} \right). \qquad (13.2)$$



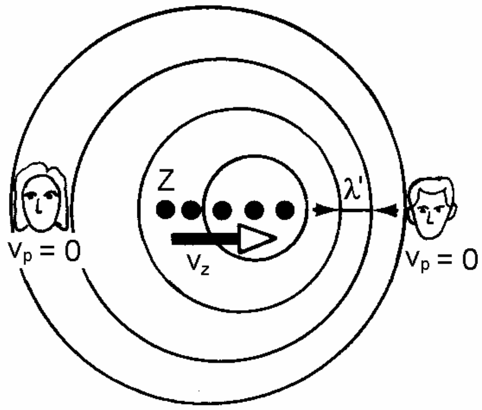
obr. 13.3 Dopplerův jev při zdroji v klidu a pohybu pozorovatele směrem od zdroje

V případě pohybu pozorovatele směrem od zdroje se změní znaménko před rychlostí pohybu pozorovatele a dostaneme

$$f' = f \cdot \left(\frac{c - v_p}{c} \right). \qquad (13.3)$$

Obecně můžeme rovnice (13.2) a (13.3) zobecnit do

$$f' = f \cdot \left(\frac{c \pm v_p}{c} \right). \qquad (13.4)$$



obr. 13.4 Dopplerův jev při pohybu zdroje s pozorovatelem v klidu (zdroj se pohybuje směrem od pozorovatele vlevo a směrem k pozorovateli vpravo)

V dalším případě se pozorovatel nepohybuje a pohybuje se zdroj. Uvažujme pohyb zdroje směrem k pozorovateli (obr. 13.4 pozorovatel vpravo). Výsledná vlnová délka λ' je kratší než vlnová délka vysílaná zdrojem λ, tedy

$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \lambda - \frac{v_z}{f}. \qquad (13.5)$$

S využitím (9.2), tj. $\lambda = \frac{c}{f}$, dostaneme

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \frac{v_z}{f}} = \frac{c}{\frac{c}{f} - \frac{v_z}{f}}. \qquad (13.6)$$

Úpravou rovnice (13.6) dostaneme pro pohyb zdroje směrem ke stojícímu pozorovateli

$$f' = f \cdot \left(\frac{c}{c - v_z} \right). \qquad (13.7)$$

Analogicky pro pohyb zdroje od pozorovatele dostaneme

$$f' = f \cdot \left(\frac{c}{c + v_z} \right). \qquad (13.8)$$

Zobecněním rovnic (13.7) a (13.8) dostaneme

$$f' = f \cdot \left(\frac{c}{c \mp v_z} \right). \qquad (13.9)$$

Pro obecný pohyb pozorovatele i zdroje (přímočarý) dostaneme frekvenci pozorovatele

$$f' = f \cdot \left(\frac{c \pm v_p}{c \mp v_z} \right), \qquad (13.10)$$

kde horní znaménka jsou pro pohyb směrem k sobě, tj. rychlost v_p [m·s^{-1}] ke zdroji, rychlost v_z [m·s^{-1}] k pozorovateli, f je frekvence zdroje [Hz] a c je rychlost šíření vlnění [m·s^{-1}].

S Dopplerovým jevem se můžeme také setkat u světla. Na rozdíl od zvuku (mechanických vln) se světlo šíří bez ohledu na prostředí. Předpokládáme-li rychlosti zdroje a pozorovatele podstatně menší než je rychlost světla dostaneme

$$f' \approx f \cdot \left(1 \pm \frac{u}{c_s} \right), \qquad (13.11)$$

kde c_s je rychlost světla, $u = |v_z \pm v_p|$ je relativní rychlost pohybu zdroje vzhledem k detektoru. Kladné znaménko v rovnici (13.11) je při přibližování se zdroje a detektoru a záporné naopak. V astronomii se častěji používá vlnová délka než frekvence, pak dostaneme

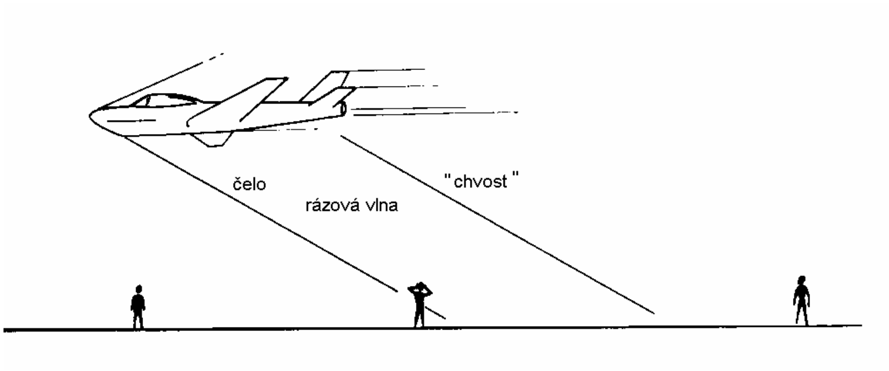
$$\lambda' \approx \lambda \cdot \left(1 \mp \frac{u}{c_s}\right). \qquad (13.12)$$

Rovnici (13.12) můžeme upravit

$$u = \frac{\lambda' - \lambda}{\lambda} \cdot c_s = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cdot c_s \text{ pro světlo při } u << c_s \,. \qquad (13.13)$$

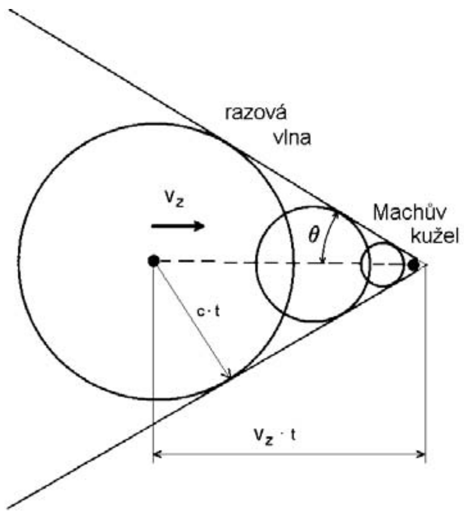
Pokud se vlnová délka zmenšuje, jedná se o "modrý posuv" a zdroj a detektor se přibližují, v opačném případě se jedná o "rudý posuv".

Pokud rychlost zdroje v_z je větší než rychlost šíření vlnění c, pak vzniká ***rázová vlna***. Často se s ní setkáme při přeletu letadla nadzvukovou rychlostí (obr. 13.5).



obr. 13.5 Rázová vlna vznikající při letu letadla nadzvukovou rychlostí

Pro rázovou vlnu již rovnice (13.10) neplatí. Vlivem šíření rázové vlny vzniká tzv. Machův kužel (viz. obr. 13.6). Rázová vlna je povrch tohoto kužele.



obr. 13.6 Rázová vlna

Poloviční úhel kužele Θ se nazývá Machův úhel, který vyhovuje vztahu (viz. obr. 13.6)

$$\sin\Theta = \frac{c \cdot t}{v_z \cdot t} = \frac{c}{v_z} \qquad (13.14)$$

Poměr $\frac{v_z}{c}$ se nazývá Machovo číslo, tj. udává jakým násobkem rychlosti zvuku se zdroj pohybuje.

Kontrolní otázky

Při pohybu zdroje směrem k pozorovateli bude frekvence zaznamenaná pozorovatelem vyšší nebo nižší než frekvence, kterou vysílá zdroj?

Příklad 13.1

Vlak se pohybuje rychlostí 40 m/s. Strojvůdce pustí píšťalu, která vydává tón na frekvenci 500 Hz. Určete frekvenci, kterou slyší pozorovatel ve chvíli, když vlak se od něj vzdaluje. Rychlost šíření zvuku uvažujme 343 m/s.

Řešení

Označme $v_z = 40\ m\cdot s^{-1}$, $f = 500\ Hz$ *a* $c = 343\ m\cdot s^{-1}$, $v_p = 0\ m\cdot s^{-1}$.

Jelikož se zdroj pohybuje od stojícího pozorovatele použijeme rovnici (13.8) příp. (13.10)

$$f' = f\cdot\left(\frac{c}{c+v_z}\right) = (500\,\mathrm{Hz})\cdot\left[\frac{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})+(40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}\right], \text{ resp.}$$

$$f' = f\cdot\left(\frac{c\pm v_p}{c\mp v_z}\right) = (500\,\mathrm{Hz})\cdot\left[\frac{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})+(0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})+(40\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}\right] = 448\,\mathrm{Hz}.$$

Pozorovatel bude vnímat frekvenci 448 Hz.

Příklad 13.2

Vozidlo ambulance jede po dálnici rychlostí 120 km/h. Její siréna vysílá zvuk o frekvenci 400 Hz. Jakou frekvenci vnímá řidič vozidla, které jede proti ambulanci rychlostí 90 km/h? Jakou frekvenci bude vnímat po minutí ambulance? (Rychlost zvuku uvažujme 343 m/s.)

Řešení

Označme $f = 400\ Hz$, $v_z = 120\ km/h \cong 33\ m\cdot s^{-1}$, $v_p = 90\ km/h \cong 25\ m\cdot s^{-1}$.

Pro oba případy použijeme rovnici (13.10), ale s vhodnými znaménky.

Pokud jedou vozidla proti sobě (zdroj i pozorovatel) dostaneme

$$f' = f\cdot\left(\frac{c+v_p}{c-v_z}\right) = (400\,\mathrm{Hz})\cdot\left[\frac{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})+(25\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}{(343\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})-(33\,\mathrm{m\cdot s^{-1}})}\right] \cong 475\,\mathrm{Hz}$$

a pokud se minou a vzdalují od sebe

$$f' = f \cdot \left(\frac{c - v_p}{c + v_z} \right) = (400\,\mathrm{Hz}) \cdot \left[\frac{(343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) - (25\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})}{(343\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}) + (33\,\mathrm{m \cdot s^{-1}})} \right] \cong 338\,\mathrm{Hz}\,.$$

Řidič vozidla jedoucího proti vozidlu ambulance uslyší zvuk o frekvenci 475 Hz. Až se minou bude řidič slyšet zvuk o frekvenci 338 Hz.

13.2 Autotest

A 27 Pokud se při Dopplerovu jevu zdroj i pozorovatel k sobě přibližují bude frekvence zvuku zaznamenaná pozorovatelem vyšší nebo nižší než je vysílaná?

A 28 Bude-li se v případě Dopplerova jevu pohybovat zdroj i pozorovatel stejným směrem, bude frekvence zvuku zaznamenaná pozorovatelem vyšší nebo nižší než frekvence, kterou vysílá zdroj?

13.3 Shrnutí

Pro obecný Dopplerův jev pro pohyb pozorovatele i zdroje (přímočarý) dostaneme frekvenci pozorovatele

$$f' = f \cdot \left(\frac{c \pm v_p}{c \mp v_z} \right),$$

kde rychlost pozorovatele s horním znaménkem ($+v_p$) je směr pohybu pozorovatele ke zdroji, rychlost pozorovatele se spodním znaménkem ($-v_p$) je směr pohybu pozorovatele od zdroje, ve jmenovateli je rychlost zdroje s horním znaménkem ($-v_z$) směr k pozorovateli, a se spodním znaménkem ($+v_z$) směr od pozorovatele.

Pokud je rychlost zdroje vyšší než rychlost šíření vlnění vzniká rázová vlna, která se popisuje Machovým číslem

$$M = \frac{v_z}{c},$$

které udává, jakým násobkem rychlosti vlnění se těleso pohybuje.

14 Přílohy

Příčná vlna na napjaté struně	$\sqrt{\frac{F}{\mu}}$
Podélná vlna v tenké tyči	$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$
Podélná vlna uvnitř pružného prostředí velkých rozměrů	$\sqrt{\frac{E \cdot (1-\nu)}{\rho \cdot (1+\nu) \cdot (1-2 \cdot \nu)}}$
Příčná vlna uvnitř pružného prostředí velkých rozměrů	$\sqrt{\frac{G}{\rho}}$
Vlna na povrchu kapaliny malé hloubky ($\lambda >> h$)	$\sqrt{g \cdot h}$
Vlna na povrchu kapaliny velké hloubky ($\lambda << h$)	$\sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi} + \frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi}{\rho \cdot \lambda}}$
Kapilární vlny - pro velmi malé vlnové délky určuje vlastnosti vlny povrchové napětí	$\sqrt{\frac{\sigma \cdot 2 \cdot \pi}{\rho \cdot \lambda}}$
Gravitační vlny - pro relativně velké vlny určuje vlastnosti vlny tíhová síla	$\sqrt{\frac{g \cdot \lambda}{2 \cdot \pi}}$
Podélné vlny uvnitř velkého prostoru vyplněného kapalinou	$\sqrt{\frac{1}{\rho \cdot \gamma}}$
Podélné vlny v plynech	$\sqrt{\frac{\chi \cdot p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\chi \cdot R \cdot T}{M}}$
Elektromagnetická vlna	$\frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}} = \frac{c_0}{n}$

tabulka 1 Přehled vybraných typů vln a jejich fázových rychlostí

c_0 - rychlost elektromagnetických vln ve vakuu, g - gravitační zrychlení,

h - hloubka kapaliny, n - index lomu prostředí, P - tlak, F - síla, T - teplota,

E - modul pružnosti v tahu, G - modul pružnosti ve smyku,

M - molova hmotnost, R - plynová konstanta, γ- stlačitelnost kapaliny,

ε_r - relativní permitivita, χ - Poissonova konstanta, λ - vlnová délka,

μ - hmotnost jednotkové délky struny, ν - Poissonovo číslo,

ε_r - relativní permeabilita, ρ - hustota prostředí, σ - povrchové napětí

15 Studijní prameny

15.1 Seznam použité literatury

[1] Horák Z., Krupka F. *Fyzika*, SNTL, Praha

[2] Šantavý I., Houška A., Liška M. *Fyzika II*. SNTL, Brno

[3] Šikula J., Liška M., Vašina P. *Fyzika II*. SNTL, Brno

[4] Halliday D., Resnick R., Walker J. *Fyzika*, VUTIM a PROMETHEUS, Brno 2000.

[5] Crawford F.S., *Berkeley physics course - Waves*,

15.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[6] Giancoli C. D. *Physics*, Prentice Hall, 1990

[7] Čížek, V. *Diskrétní Fourierova transformace a její použití*. SNTL Nakladatelství technické literatury, Praha 1981

15.3 Odkazy na další studijní zdroje a prameny

[8] http://fyzika.fce.vutbr.cz/

16 Klíč

A 1 Výchylka harmonického pohybu je $u(t) = u_m \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi)$, kde u je výchylka jako funkce času, u_m je maximální výchylka (amplituda), ω je úhlová frekvence, t je čas a φ je počáteční fáze.

A 2 Počáteční fáze je posunutí harmonické funkce v čase t=0 a fáze je celý argument u harmonické funkce $\Theta = \omega \cdot t + \varphi$.

A 3 Frekvence je počet kmitů za jednotku času, kdežto úhlová frekvence je $2 \cdot \pi$ násobek frekvence.

A 4 Harmonickou funkci lze popsat jak kosinovou tak i sinovou funkcí, pouze počáteční fáze bude mít odlišnou hodnotu.

A 5 Tuhost pružiny k určíme z prodloužení pružiny Δu při zatížení statickou silou ΔF dle rovnice $k = \dfrac{\Delta F}{\Delta u}$.

A 6 Celková energie při harmonickém tlumení je neustále stejná - $E = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_m^2 = \dfrac{1}{2} \cdot k \cdot u_m^2$ - závisí na tuhosti pružiny k a maximální výchylce u_m nebo na hmotnosti m a maximální rychlosti v_m.

A 7 Aby matematické nebo fyzické kyvadlo konalo harmonické kmity musí být výchylka kmitání malá, tj. aby platilo $\varphi \cong \sin \varphi$.

A 8 Pomocí matematického kyvadla lze měřit tíhové zrychlení z rovnice $g = \dfrac{4 \cdot \pi^2 \cdot l}{T^2}$. Změříme délku kyvadla a dobu kmitu (periodu).

A 9 Ano, využívá se k tomu momentu setrvačnosti tělesa $J = m \cdot l^2$, kde m je hmotnost a l je vzdálenost hmotného bodu od osy otáčení.

A 10 Průběh výchylky na čase je dán součinem harmonické a exponenciální funkce $u(t) = U_h \cdot e^{-\delta \cdot t} \cdot \cos(\omega_t \cdot t + \varphi)$, kde U_h je maximální amplituda, t je čas, δ je koeficient tlumení, ω_t je úhlová frekvence tlumených kmitů a φ je počáteční fáze.

A 11 Aby tlumený oscilátor s budící silou konal rezonanční kmity, musí úhlová frekvence budící síly vyhovovat rovnici $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2}$, kde ω_0 je vlastní frekvence netlumených kmitů a δ je koeficient tlumení.

A 12 Rezonance nastává ve okamžiku, kdy úhlová frekvence budící síly vyhovuje rovnici $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2 \cdot \delta^2}$, kde ω_0 je vlastní frekvence netlumených kmitů a δ je koeficient tlumení.

A 13 Maximální amplituda vynucených tlumených kmitů je ve chvíli, když budící frekvence se blíží k rezonanční frekvenci.

A 14 Kmity vzniklé složením dvou harmonických kmitů o přibližně stejné frekvenci mají charakter rázů.

A 15 Ano jakýkoliv periodický děj lze vyjádřit součtem harmonických složek (až nekonečně mnoho) o různých amplitudách (maximálních výchylkách), frekvencích a fázových posunutích.

A 16 Kmitání je funkcí jedné proměnné - čas. Výchylka je dána časovým okamžikem. Vlnění je popsáno funkcí dvou proměnných – času a polohy. Výchylka vlnění tedy závisí na šíření vlnění a kmitání bodu.

A 17 Základní vlnění je podélné a příčné.

A 18 Mechanické vlnění se nemůže šířit ve vakuu, protože k šíření potřebuje prostředí.

A 19 Ano, použitím vlnové rovnice – obsahující druhé parciální derivace a fázovou rychlost šíření.

A 20 Fázová rychlost postupné vlny závisí na vlnové délce a periodě resp. frekvenci kmitání.

A 21 Intenzita vlnění je důležitá veličina popisující přenos energie. Je to střední tok jednotkovou plochou kolmou k přenosu energie.

A 22 Vzniká sinusová vlna, která postupuje stejným směrem , jako obě výchozí vlny.

A 23 Superpozice vlnění popisuje výsledné vlnění vznikající v místě, kde se setkává více vln. Interference je zvláštní případ superpozice harmonických vln o stejných frekvencích a stálém rozdílu počátečních fází.

A 24 Vzdálenost dvou sousedních kmiten je polovina vlnové délky.

A 25 Uzel na hranici stojatého vlnění vzniká při upevněném konci nebo při přechodu mezi řidším a hustším prostředí.

A 26 Poloha uzlů a kmiten je u stojatého vlnění pevná. Mění se poze okamžitá velikost výchylky v kmitně.

A 27 Frekvence zvuku, kterou zaznamená pozorovatel, při přibližování se zdroje a pozorovatele směrem k sobě bude vyšší.

A 28 Velikost výsledné frekvence bude závislá na rychlosti zdroje a pozorovatele a na jejich vzájemné poloze (tj. jeli pozorovatel za zdrojem nebo před zdrojem).