VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ
FAKULTA STAVEBNÍ

Prof. RNDr. Zdeněk Chobola, CSc.,Ing. Vlasta Juránková,CSc.

FYZIKA

MODUL 4

MECHANIKA DEFORMOVATELNÝCH TĚLES

STUDIJNÍ OPORY
PRO STUDIJNÍ PROGRAMY S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

OBSAH

1 Úvod

1.1 Cíle

Cílem látky uvedené v tomto modulu je prohloubení znalostí v oblasti mechaniky deformovatelných těles. Jedná se zejména o problematiku pružnosti a pevnosti pevných látek a molekulárních jevů v kapalinách. Dále je studována hydrostatika a hydrodynamika.

1.2 Požadované znalosti

Předpokládají se znalosti látky fyziky z gymnázií, a to jak rozsahem pojmů, tak i řazením jednotlivých částí, z matematiky se předpokládá zvládání derivací a integrálního počtu.

1.3 Doba potřebná ke studiu

Modul je rozdělen do čtyř základních kapitol. Průměrná doba na zvládnutí první a druhé kapitoly je 6 hodin u každé . Zvládnutí třetí a čtvrté kapitoly je náročnější a vyžádá si asi 8 hodin. Celková doba na nastudování modulu tak představuje 28 hodin.

1.4 Klíčová slova

Pevná látka, pružnost, plastičnost, pevnost, ohyb, povrchové napětí, kapilarita, Pascalův zákon, hydrostatický tlak, Archimédův zákon, atmosférický tlak, rovnice kontinuity, Bernoulliova rovnice, viskozita.

2 Pružnost a pevnost pevných těles

2.1 Pružnost a plastičnost

V mechanice hmotného bodu a tuhého tělesa jsme předpokládali, že těleso se nemění působením sil, že je dokonale tuhé. Ve skutečnosti tomu tak není. Jestliže jsou výsledná síla a výsledný moment sil nulové, těleso může být v klidu, ale může přitom měnit svůj tvar - deformuje se, neboli se přetváří. Těleso se deformuje tak dlouho, až nastane rovnováha vnitřních sil v tělese se silami vnějšími.

Tělesa, která nabývají opět původního tvaru, když přestanou působit deformující síly, se nazývají **pružná**. Tělesa, která si udržují deformovaný tvar, se nazývají **nepružná** nebo **plastická** (tvárná). Rozdíl mezi pružnými a nepružnými látkami je jen kvantitativní, neexistují tělesa dokonale pružná. Pokud je deformující síla malá, jsou tělesa obvykle pružná, jakmile působí velké síly, stávají se nepružnými.

U některých látek můžeme pozorovat tzv. dopružování. Když začne působit síla, pak nabude těleso určité deformace hned, ustálený stav však nastane až po určité době. Když síla přestane působit, vrací se těleso nejprve rychle a pak pomaleji do původního stavu, to tedy znamená, že deformace závisí také na čase. Určitá deformace, tzv. remanentní deformace, zůstává trvale. Úkolem nauky o pružnosti je zjistit závislost mezi deformacemi a vnějšími silami, které nazýváme zatížení tělesa.

Vlivem deformace vzniknou v každém průřezu vnitřní síly, které míří proti síle působící na těleso. Jejich výslednice je rovna působící síle, je však opačného směru. Proto se zavádí pojem **napětí v materiálu**. Je to podíl vnitřní síly a plochy, na kterou tato síla působí. Působí-li síla kolmo k ploše, mluvíme o **napětí normálovém** a jde o **tah** nebo **tlak**, působí-li síla v ploše, mluvíme o **napětí tečném** a jde o **smyk**.

Kontrolní otázky

1. *Která tělesa jsou pružná?*
2. *Která tělesa jsou plastická?*
3. *Co je to napětí v materiálu?*

2.2 Pružnost a pevnost v tahu a tlaku

Působíme-li na tyč délky l a průřezu S silou F ve směru délky tyče, a to směrem ven z tělesa, tyč se prodlouží o délku Δl, která je přímo úměrná délce tyče a působící síle, nepřímo úměrná pak průřezu

$$\Delta l = k \frac{F}{S} l \ , \qquad (1.1)$$

V uvedeném vztahu se konstanta úměrnosti k nazývá **součinitel pružnosti v tahu** a převrácená hodnota $E = \frac{1}{k}$ **modul pružnosti v tahu** neboli **Youngův modul pružnosti v tahu**. Zákon vyjádřený vztahem (1.1) se nazývá **Hookův zákon**. Veličiny k a E závisí na materiálu a jeho teplotě. Existují slitiny, u kterých nejsou tyto veličiny v oboru obvyklých teplot na teplotě závislé.

Uvažujeme-li prodloužení na délkovou jednotku, mluvíme o **poměrném prodloužení** ε. Pro ně pak

platí

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S} \quad . \tag{1.2}$$

Protože působící síla je kolmá k průřezu, jde zde o **normálové napětí** σ.

$$\sigma = \frac{F}{S} \, . \tag{1.3}$$

Jednotkou σ je N.m^{-2} = Pa.

Dosazením (1.3) do (1.2) můžeme pro relativní prodloužení psát vztah

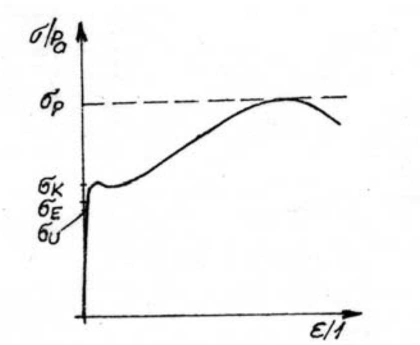
$$\varepsilon = \frac{1}{E}\sigma \quad , \tag{1.4}$$

z toho pak pro Youngův modul

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{\frac{\Delta l}{l}} \tag{1.5}$$

a pro $\Delta l = l$ je $E = \sigma$. Modul pružnosti v tahu E je tedy napětí, kterým by se těleso prodloužilo o svou délku. To je ovšem obvykle výsledek jen teoretický, protože u většiny látek nastává již dříve přerušení spojitosti materiálu. Protože ε je bezrozměrná veličina, je jednotkou modulu pružnosti v tahu pascal [Pa].

Úměrnost mezi prodloužením a působící silou vyjádřená Hookovým zákonem platí až do určité meze. Pro celý rozsah deformací až do přetržení tyče z měkké oceli je tato závislost uvedena na obr.1.1.



obr.1.1 Závislost napětí na relativním prodloužení

Napětí σ_U, které je ještě úměrné poměrnému prodloužení, nazýváme **mezí úměrnosti**. Zrušíme-li zatížení tyče, zmizí deformace a délka tyče se opět zkrátí na původní délku. Zatěžujeme-li dále do napětí σ_E, dosáhneme tzv. **meze pružnosti**, která se zpravidla příliš neliší od meze úměrnosti. Zatěžujeme-li materiál nad mez pružnosti, zjišťujeme po odtížení, že deformace nezmizí úplně, ale zůstává jistá trvalá (plastická) deformace. V technické praxi rozumíme mezí pružnosti takové napětí, při kterém zůstává trvalé prodloužení menší než 0,01% původní délky.

Nad mezí pružnosti leží tzv. **mez kluzu** nebo **mez průtažnosti** daná napětím σ_K. Tečna křivky v tomto bodě má téměř vodorovný směr. Tyč se prodlužuje, aniž se zatížení zvětšuje. Fyzikální vlastnosti materiálu se začínají značně měnit.

Pokračujeme-li ve zvyšování napětí, dosáhneme tzv. **meze pevnosti** σ_P a pak se tyč přetrhne. Tyč se poruší v místě, v němž se při dosažení meze pevnosti začne značně zužovat. Proto při tomto pochodu napětí na obr.1.1 klesá, neboť je vztaženo na původní nezměněný průřez.

Tažností materiálu nazýváme největší poměrné prodloužení zkušební tyče při přetržení. Při tahu i při tlaku se mění nejen délka, ale i příčné rozměry. Nastává tzv. **příčná kontrakce**. Pro ni platí vztah podobný jako pro protažení. Označíme-li příčný rozměr písmenem b, změní svoji velikost působením síly F o Δb. Relativní příčné zkrácení je

$$\eta = \frac{\Delta b}{b} = k_1 \frac{F}{S}, \tag{1.6}$$

kde k_1 je tzv. **součinitel příčné kontrakce**.

Poměr součinitele příčné kontrakce a součinitele pružnosti se nazývá Poissonův poměr nebo

Poissonovo číslo

$$\mu = \frac{k_1}{k} = k_1 E \ . \tag{1.7}$$

Uvedené vztahy jsou tím lépe splněny, čím je délka drátu či tyče větší a nejde-li o dráty o malém průřezu. Při kratších tyčích se uplatňuje vliv upevněných konců, při malých průřezech vliv povrchových vrstev materiálu.

Ztenčujeme-li kratší tyč, docházíme ke stejným vztahům pro stlačení, jako pro prodloužení. Modul pružnosti E má proto stejnou hodnotu pro stlačení, jako pro prodloužení. Beton, litina a některé horniny (žula) se však chovají za tlaku jinak, než za tahu. U nich také neplatí přesně Hookův zákon, ale musíme v závislosti pro relativní prodloužení ε psát napětí σ v n-té mocnině

$$\varepsilon = \frac{1}{E}\ \sigma^n \ . \tag{1.8}$$

Meze pružnosti v tlaku jsou obvykle stejné jako meze pružnosti v tahu. U litiny je však mez pružnosti v tlaku dvojnásobná. Meze pevnosti v tlaku jsou jiné než meze pevnosti v tahu.

Při stlačování delší tyče se při překročení určité kritické síly osa tyče vybočí ze své původní polohy. Tyč uhýbá stranou a láme se při značně menším tlaku. Kritická mez se nazývá **pevností vzpěrnou**. Velikost kritické síly závisí na délce tyče, tvaru průřezu a na jeho velikosti, na druhu materiálu a na tom, jak jsou konce tyče uloženy. Poněvadž vzpěrná pevnost je úměrná momentu setrvačnosti průřezu, dělají se sloupy a nosiče duté. Průřez sloupu má pak při menší hmotnosti větší moment setrvačnosti a nevzniká tak snadno postranní vybočení.

Kontrolní otázky

1. Co je to modul pružnosti tělesa?

2. Jak je definováno relativní prodloužení?

3. Co je to mez pružnosti?

4. Co je to mez pevnosti?

Příklady

1.2.1 Určete modul pružnosti v tahu materiálu, jestliže délka drátu je 1,713 m*, průměr drátu* 0,37 mm *a drát se silou* 46 N *protáhl o* 3,62mm?

Řešení:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{SE} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$E = \frac{4F\,l}{\pi d^2 \Delta l} = \frac{4.46\,\mathrm{N}\,.1{,}713\,\mathrm{m}}{\pi\,.(0{,}37.10^{-3}\,\mathrm{m})^2\,3{,}62.10^{-3}\,\mathrm{m}}$$

$$E = 2{,}02.10^{11}\,Pa$$

1.2.2 O kolik se prodlouží vlastní svislá tyč dlouhá 3,2 m*, je-li upevněná na horním konci? (modul pružnosti v tahu oceli je* 2.10^{11} Pa*, hustota* 7 800 $\mathrm{kg.m^{-3}}$*)*

Řešení:

Prodloužení ve vzdálenosti y od místa uchycení je d(Δl).

$$\mathrm{d}(\Delta l) = \frac{(l - y)\,S\,\rho\,g\,\mathrm{d}y}{E\,S}$$

$$\Delta l = \int_0^l \frac{\rho\,g}{E}(l - y)\,\mathrm{d}y = \frac{\rho\,g}{E}\left[l\,y - \frac{y^2}{2}\right]_0^l$$

$$\Delta l = \frac{\rho\,g}{E}\frac{l^2}{2} = \frac{7{,}8.10^3\,\mathrm{kg\,.m^{-3}}.\,9{,}81\,\mathrm{m\,.s^{-2}}\,.\,(3{,}2\,\mathrm{m})^2}{2\,.10^{11}\,\mathrm{Pa}\,.\,2} = 1{,}96.10^{-6}\,\mathrm{m}$$

1.2.3 Ocelové lano kruhového průřezu má průměr 1 cm *a délku* 30 m. *Je zatíženo břemenem o hmotnosti* 2 t.

a) Určete napětí na laně.

b) Určete relativní prodloužení.

c) O kolik milimetrů se lano zatížením prodlouží?

d) S jakým největším zrychlením lze lano zvedat, je-li přípustné napětí 300 MPa*?*

Řešení:

a) $$\sigma = \frac{4mg}{\pi d^2} = \frac{4.2000\ \mathrm{kg}.9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}}{\pi(0{,}01\ \mathrm{m})^2} = 250\ \mathrm{MPa}$$

b) $$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{250.10^6\ \mathrm{Pa}}{2.10^{11}\ \mathrm{Pa}} = 1{,}25.10^{-3}$$

c) $$\Delta l = \varepsilon l = 1{,}25.10^{-3}.30\mathrm{m} = 0{,}0375\ \mathrm{m}$$

d) $$a_{\max} = \frac{\sigma \pi d^2}{4m} = \frac{300.10^6\ \mathrm{Pa}.\pi(0{,}01\mathrm{m})^2}{4.2000\mathrm{kg}} = 11{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$$

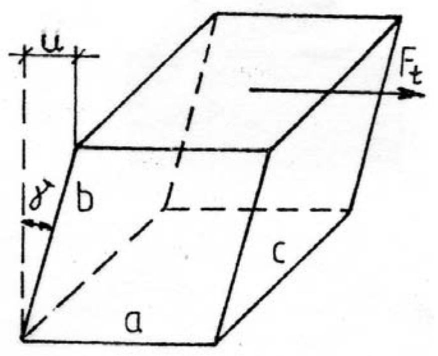
1.2.4. Jak dlouhý ocelový drát všude stejného průřezu se přetrhne vlastní tíhou? Mez pevnosti oceli je 8.10^8 Pa*, hustota oceli* 8000 $\mathrm{kg.m^{-3}}$. *[* l =10,2 km*]*

1.2.5. Do jaké hloubky bychom mohli spustit do vody měděné lano, aby se nepřetrhlo vlastní tíhou? Hustota mědi je 8 800 $\mathrm{kg.m^{-3}}$*, mez pevnosti mědi je* $2{,}4.10^8$ Pa. *[* l =3,137 km*]*

1.2.6. Určete napětí a relativní prodloužení ocelového lana o průměru 1,25 cm*, je-li zatíženo břemenem, jehož tíha je* 4.10^4 N. *O kolik se lano prodlouží, je-li původní délka* 25m*? (modul pružnosti v tahu oceli je* 2.10^{11} Pa*)* *[* $\sigma = 3{,}26.10^8$ Pa, $\varepsilon = 1{,}63.10^{-3}$, $\Delta l = 4{,}07.10^{-2}$ m *]*

2.3 Pružnost a pevnost ve smyku

O namáhání smykem (nebo střihem) mluvíme tehdy, když jednotlivé vrstvy namáhaného materiálu se vzájemně posouvají, aniž se mění jejich kolmá vzdálenost. Když např. působíme na kvádr o rozměrech *a, b, c* tečnou silou F_t působící v rovině horní stěny kvádru,



Obr. 1.2 Posunutí způsobené tečnou silou

vzniká posunutí horní stěny o *u* (obr.1.2). Podobně jako u tahu zavádíme tzv. poměrné posunutí (zkos)

$$\gamma = \frac{u}{b}. \qquad (1.9)$$

Pro tečné napětí τ můžeme psát

$$\tau = \frac{F_t}{a\,c}. \qquad (1.10)$$

Hookův zákon pro smyk má tak tvar

$$\gamma = k\,\tau \quad , \qquad (1.11)$$

nebo

$$\tau = G\,\gamma \quad , \qquad (1.12)$$

kde *G* je konstanta úměrnosti mezi tečným napětím a poměrným posunutím se nazývá **modul pružnosti ve smyku** (modul torze). Poměrné posunutí je bezrozměrné, takže jednotka tečného napětí i modulu je totožná, a to Pa. Modul pružnosti ve smyku tedy značí tečné napětí, kterým by se horní stěna posunula o délku rovnou její původní vzdálenosti od pevné stěny. Úměrnost mezi relativním posunutím a napětím platí až po tzv. **mez pružnosti ve smyku**. Když napětí překročí mez pevnosti ve smyku, přeruší se souvislost materiálu. Namáhání materiálu ve smyku vzniká např. při střihu. Podmínka pevnosti je dána vztahem (jsou namáhány oba průřezy)

$$\tau_{\max} = \frac{F}{2\,S} \leq \tau_{dovs} \qquad (1.13)$$

kde τ_{dovs} je dovolené namáhání ve střihu.

Kontrolní otázky

1. Jak je definován modul pružnosti ve smyku?

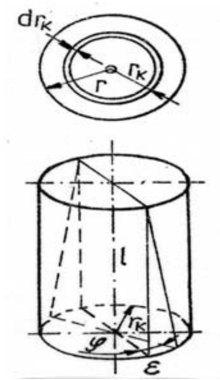
2. Co je to mez pružnosti ve smyku?

Příklady

1.3.1 Měděná deska tvaru kvádru o rozměrech a = c = 20 cm*,* b = 40 cm *je pevně připojena k podlaze stěnou ac a k protější stěně je připojena pásem, kterým můžeme působit silou ve směru stěny ac. Určete sílu potřebnou k posunutí horní stěny ve vodorovném směru o* 20 cm*. (modul pružnosti ve smyku mědi je* 4.10^{10} Pa*)[F =*8.10^{8} N*]*

2.4 Pružnost a pevnost v kroucení

Upevníme-li jeden konec tyče a druhý konec namáháme dvojicí momentů M_k dochází ke zkroucení tyče na volném konci o úhel φ. Přitom se posouvá jeden průřez po druhém tak, že nejde o další deformaci, ale o smyk (obr.1.3). Proto lze stočení vyjádřit pomocí modulu pružnosti ve smyku.



Obr. 1.3 Kroucení tyče

Tyč délky l kruhového průřezu rozdělíme na souosé duté válce o poloměru r_k a tloušťce dr_k. Každý dutý válec má plochu základny $2\pi r_k \mathrm{d} r_k$. Otočí-li se spodní konec válcové vrstvy o úhel $\mathrm{d}\varphi$, posune se dolní konec proti hornímu o $r\varphi$. Přitom

$$r_k\,\varphi = \frac{1}{G}\frac{l}{2\pi\, r_k\, \mathrm{d}\, r_k}\,\mathrm{d}\, F_k\,, \tag{1.14}$$

kde dF_k je síla působící na udanou vrstvu. Tato síla, která je kolmá na rameno, působí momentem

$$\mathrm{d}\, M_k = r_k\, \mathrm{d}\, F_k = 2\pi G\,\frac{r_k^3}{l}\,\varphi\, \mathrm{d}\, r_k\,. \tag{1.15}$$

Výsledný moment je dán integrálem

$$M = \frac{2\pi G}{l}\varphi \int_0^r r_k^3 \,\mathrm{d}r_k = \frac{\pi G}{2l} r_k^4 \varphi\,, \tag{1.16}$$

z toho pak stočení

$$\varphi = \frac{2}{\pi}\frac{1}{G}\frac{l}{r^4} M = \frac{2\pi}{G}\frac{l}{(\pi r^2)^2} M\ . \tag{1.17}$$

Stočení je tedy přímo úměrné působícímu momentu, délce tyče a nepřímo úměrné druhé mocnině průřezu. Podíl $\frac{\varphi}{l} = \nu$ se nazývá **poměrné zkroucení** nebo zkrut. Vztah mezi kroutícím momentem M_k a tečným napětím v kruhovém průřezu získáme dosazením za Gn/l

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} r_k\ . \tag{1.18}$$

Je patrné, že při krutu roste napětí úměrně se vzdáleností r_k od středu průřezu a dosahuje největší hodnoty na obvodu. Pro $r_k = r$ je podmínka pevnosti při namáhání kroucením

$$\tau_{\max} = M_k \frac{r}{J_p} = \frac{M_k}{W_k} \le \tau_{dov}\ , \tag{1.19}$$

$J_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ je polární moment setrvačnosti průřezu tyče a $W_k = \frac{J_p}{r}$ je **průřezový modul v kroucení**.

Kontrolní otázky

1. Jak je definováno poměrné zkroucení?

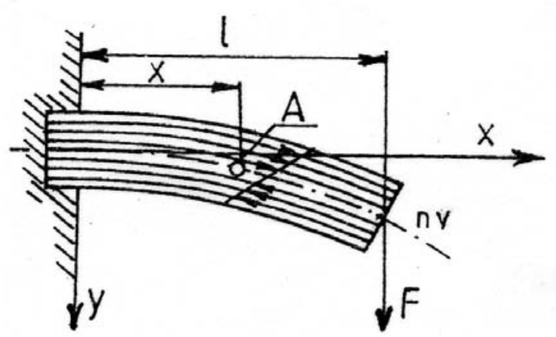
2. Jak si představujeme namáhání při kroucení?

Příklad

1.4.1 U zrcadlového galvanoměru použijeme k zavěšení cívky drátek z téhož materiálu jako u původního závěsu, ale s průměrem o 10% *větším. Jak musíme změnit délku závěsu, abychom nemuseli měnit stupnici, tj. aby úhel otočení cívky byl při stejném momentu stejně velký? [prodloužit o* 21%*]*

2.5 Ohyb

Zatížíme-li vetknutý nosník (krakorec) na volném konci silou F, nosník se prohne (obr.1.4). Můžeme pozorovat, že horní vlákna nosníku se prodlužují, zatímco spodní se zkracují. Existuje vrstva, která není namáhána vůbec a zachovává si svoji původní délku l. Říkáme jí **neutrální vrstva** (obr.1.4.).



Obr. 1.4 Ohyb krakorce

V průřezu nosníku vzdáleném od místa vetknutí o x působí ohybový moment

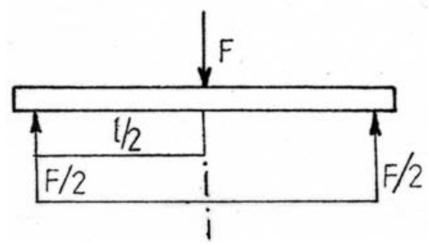
$$M_o = (l - x)\,F \quad . \tag{1.20}$$

Tento moment vyvolá průhyb volného konce nosníku

$$y = \frac{F\,l^3}{3\,E\,J} \quad , \tag{1.21}$$

kde E je modul pružnosti a J je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k neutrální ose. Uvažujeme nosník podepřený na dvou podporách vzdálených o l a zatížený uprostřed silou F (obr.1.5). Když zanedbáme vlastní hmotnost nosníku, můžeme v místě podpor uvažovat sílu $F/2$ jako reakci podpor na nosník. Pod silou F je směrnice tečny ohybové čáry nulová. Můžeme si tedy nosník představit jako uprostřed do sebe vetknutý a v místě podpory zatížený silou $F/2$ směřující vzhůru. Dostáváme tak pro průhyb nosníku, uloženého volně na dvou podporách a zatíženého uprostřed osamělou silou výraz

$$y = \frac{F\,l^3}{48\,E\,J} \quad . \tag{1.22}$$



Obr. 1.5 Průhyb nosníku

Kontrolní otázky

1. Co je to neutrální vrstva při ohybu?

2. Na jakých parametrech závisí průhyb nosníku podepřeného na obou koncích?

Příklad

1.5.1 Hliníkový nosník délky 3,2 m *podepřený na obou koncích je zatížen bodovou silou* 260 N *působící uprostřed nosníku. Průřez tyče má rozměry* 3 cm x 2 cm.. *Jak velký je průhyb nosníku?(modul pružnosti v tahu hliníku je* 7.10^{10} Pa*) [y* = 0,126 m*]*

2.6 Autotest

1. Jak dělíme tělesa?
2. Co je napětí v materiálu?
3. Jaká napětí rozlišujeme?
4. Definujte Hookův zákon pro tah a tlak.
5. Definujte relativní prodloužení.
6. Co je modul pružnosti v tahu?
7. Platí Hookův zákon bez omezení?
8. Jaké meze úměrnosti rozlišujeme?
9. Liší se od sebe meze pevnosti v tahu a tlaku?
10. Co je modul pružnosti ve smyku?
11. Definujte Hookův zákon pro smyk.
12. Co je poměrné posunutí?
13. Co určuje mez pružnosti ve smyku?
14. Mají fyzikální veličiny napětí, modul pružnost v tahu, tlaku a smyku stejnou jednotku? Jakou?
15. Určete dimenzi této jednotky.

2.7 Klíč

1. pružná (deformace po skončení působení síly zmizí)
2. plastická (nepružná, deformace se zachovává)
3. poměr vnitřní síly a plochy, na kterou síla působí
   a) normálové napětí $G = \frac{F_n}{S}$ (tah nebo tlak, síla působí kolmo na plochu)
   b) tečné napětí $\tau = \frac{F_t}{S}$ (smyk, síla působí v tečném směru k ploše)
4. $\varepsilon = \frac{1}{E} G$ (deformace je úměrná napětí v materiálu) nebo $G = \varepsilon E$
5. $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ (prodloužení na délkovou jednotku)
6. E je materiálová konstanta, která vyjadřuje napětí, při kterém by se těleso prodloužilo na dvojnásobek původní délky (tah)
7. Neplatí, jsou definovány tzv. meze úměrnosti
   a) mez pružnosti (po namáhání se materiál vrací do původního stavu)
   b) mez kluzu (fyzikální vlastnosti materiálu se začínají měnit)
   c) mez pevnosti (napětí, při kterém se daný materiál poruší – při tahu přetrhne)
8. zpravidla ano
9. G je materiálová konstanta, je to tečné napětí při kterém by se horní stěna kvádru posunula o vzdálenost rovnou její původní délce, kdy hrany tělesa svíraly pravý úhel.
10. $\tau = G\gamma$
11. $\gamma = \frac{u}{b}$ (úhel mezi hranami tělesa, které původně svíraly pravý úhel, obr. 1.2)
12. Je to hranice, která stanoví tečné napětí, při kterém se materiál začne porušovat
13. Ano, jednotkou je Pa
14. $\mathrm{Pa} = \mathrm{kg.m^{-1}.s^{-2}}$

2.8 Závěr - Shrnutí

Při deformaci tělesa vznikají v tělese síly, které míří proti působící síle. Podíl této síly a plochy je napětí v materiálu τ . Působí-li síla kolmo k ploše, mluvíme o napětí normálovém a jde o tah nebo tlak, působí-li síla v ploše, mluvíme o napětí tečném a jde o smyk. Tělesa, která nabývají opět původního tvaru, když přestanou působit deformační síly, se nazývají pružná. V opačném případě se jedná o tělesa plastická. Speciální namáhání tělesa nastává při ohybu.

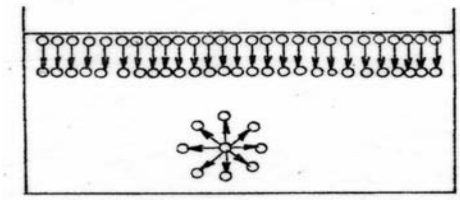
3 Molekulární jevy v kapalinách

3.1 Struktura kapalin

Kapalina sestává z molekul, které na sebe navzájem působí přitažlivými silami. Jsou to však pouze síly krátkého dosahu, tzv. van der Waalsovy síly. Na rozdíl od pevných látek kapaliny snadno mění svůj tvar. V gravitačním poli vlivem zemské přitažlivosti přizpůsobují svůj tvar tvaru nádoby a vyplňují vždy její spodní část. V prostoru bez gravitace zaujímají kulový tvar.

3.2 Povrchové napětí

Na molekuly uvnitř kapaliny působí přitažlivé síly ostatních molekul ze všech stran rovnoměrně a jejich účinek se v celku ruší, takže jsou uvnitř kapaliny molekuly v silové rovnováze (obr.2.1). Protože jsou mezimolekulární přitažlivé síly daleko větší než přitažlivost zemská, můžeme při těchto úvahách zanedbat vliv tíže. Na molekuly u povrchu kapaliny však působí pouze přitažlivé síly od molekul z vnitřku kapaliny (obr.2.1), a proto jsou tyto okrajové molekuly podrobeny jednostrannému tahu dovnitř kapaliny. Okrajové molekuly tvoří na povrchu kapaliny tenkou povrchovou vrstvu, jejíž tloušťka je řádově 10^{-9} m. V povrchové vrstvě působí kromě sil směřujících do kapaliny ještě síly, jimiž se navzájem přitahují molekuly povrchové vrstvy. Oba druhy sil mají snahu zmenšit povrch kapaliny na nejmenší možnou míru. Malá množství

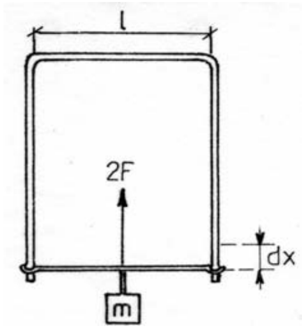


Obr. 2.1 Rozložení sil působících na molekuly v kapalině

kapalin proto vytvářejí kapky kulového tvaru (koule má při daném objemu nejmenší povrch ze všech tvarů těles). Povrchová vrstva se tedy chová jako dosti pevná pružná blána. Působí v ní tzv. **povrchové napětí σ**, definované jako tečná síla, působící kolmo na jednotkovou délku myšleného řezu povrchem

$$\sigma = \frac{\mathrm{d}\,F}{\mathrm{d}\,l}. \qquad (2.1)$$

O existenci povrchového napětí se můžeme přesvědčit pokusem znázorněným na obr.2.2. Drátěný rámeček s posuvnou příčkou namočíme do mýdlového roztoku a po jeho vyjmutí se v rámečku vytvoří plochá mýdlová bublina. Povrchové síly v obou povrchových vrstvách bubliny se snaží zmenšit plochu bubliny a působí na příčku silou $2F$.



Obr. 2.2 Experimentální určení povrchového napětí

Síla působící na příčku je způsobena molekulárními silami a je přímo úměrná počtu molekul, které sousedí s příčkou. Protože tento počet je úměrný délce příčky, je síla přímo úměrná také délce příčky *l*. Styčnou čáru bubliny s příčkou musíme však počítat také pro oba povrchy, tedy

$$2F = 2\sigma l \tag{2.2}$$

a po úpravě je povrchové napětí

$$\sigma = \frac{F}{l} \quad , \tag{2.3}$$

kde $F = mg$. Jednotkou povrchového napětí je $\mathrm{N.m^{-1}}$.

Kontrolní otázky

1. Objasněte příčiny vzniku povrchového napětí.

2. Zdůvodněte, proč je povrchové napětí úměrné F a nikoliv hodnotě 2F.

3.3 Energie povrchové vrstvy

S povrchovým napětím je spojena i povrchová energie. Posuneme-li příčkou na obr.2.2 proti směru síly o d*x*, vykonáme práci

$$2\,\mathrm{d}W = 2\,F\,\mathrm{d}x = 2\sigma\, l\,\mathrm{d}x. \tag{2.4}$$

Přitom se povrch mýdlové bubliny zvětší na každé straně o $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x$. Práce, kterou vykonáme, se změní v přírůstek povrchové energie

$$2\,\mathrm{d}W = 2\,\mathrm{d}E = 2\,\sigma\,\mathrm{d}S \ . \tag{2.5}$$

Povrchová energie se zvětšuje prací vynaloženou na zvětšení povrchu kapaliny a můžeme ji proto považovat za energii, kterou je nutno vynaložit na vytvoření volného povrchu kapaliny. Plošnou hustotu povrchové energie vypočteme z rovnice (2.5)

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}S} = \sigma \quad . \tag{2.6}$$

Povrchové napětí je tedy současně plošnou hustotou povrchové energie.

Kontrolní otázka

1. Ukažte, jak povrchové napětí souvisí s povrchovou energií kapaliny.

Příklady

2.3.1 Při vyfouknutí mýdlové bubliny jsme vykonali práce $4{,}5.10^{-3}$ J. *Jak velký je poloměr bubliny?*

Řešení:

Jedná se o dvojvrstvový povrch. Práce vykonaná při zvětšení poloměru o dx je:

$\mathrm{d}W = 2\sigma\, \mathrm{d}S = 8\sigma\pi x \mathrm{d}x$

Celková práce

$$W = 2\int_0^R 8\,\sigma\,\pi\,x\,\mathrm{d}x = 8\,\sigma\,\pi\,R^2$$

$$R = \sqrt{\frac{W}{8\sigma\,\pi}} = \sqrt{\frac{4{,}5.10^{-3}\ \mathrm{J}}{8.\pi.4.10^{-2}\ \mathrm{N.m^{-1}}}} = 0{,}067\ \mathrm{m}$$

2.3.2 Kolik tepla se uvolní, jestliže se 1kg *vody ve formě kapiček o průměru* 10^{-5} mm *spojí v jediné kapalné těleso? Povrchové napětí vody je* $0{,}07\ \mathrm{N.m^{-1}}$.

Řešení:

$$Q = nQ_1 = \frac{m}{m_1}\sigma S_1 = \frac{m\sigma 4\pi r_1^2}{\rho_v \frac{4}{3}\pi r_1^3} = 6\frac{m\sigma}{\rho_v\,\mathrm{d}_1} = 6\frac{1\mathrm{kg}.0{,}07\mathrm{N.m^{-1}}}{1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}10^{-8}\,\mathrm{m}} = 42\,\mathrm{kJ}$$

2.3.3 Určete přetlak uvnitř kapky vody o poloměru $r = 2.10^{-3}$ m. *[*$\Delta p = 70$ Pa*]*

2.3.4 Jak velkou práci je nutno vykonat, aby se $1\mathrm{m}^3$ *vody rozprášil na kapičky o poloměru* 0,001mm *při teplotě* 20°C*? [W =* 210 J*]*

3.4 Tlak pod zakřiveným povrchem kapaliny

Snaha zakřiveného povrchu kapaliny zmenšit povrch vede ke vzniku kapilárního tlaku p_k, který se pod povrchem přičítá k tlaku, který by působil na kapalinu s rovným povrchem. V případě vypuklého povrchu je dodatkový tlak kladný, u dutého povrchu záporný. Můžeme vypočítat přetlak Δp uvnitř bubliny. Bublina se snaží zmenšit svůj povrch a tím i objem. Abychom zvětšili bublinu, musíme vykonat práci

$$\mathrm{d}W = p_k\,\mathrm{d}V = p_k\left[\frac{4}{3}\pi\,(r+\mathrm{d}r)^3 - \frac{4}{3}\pi\,r^3\right] \approx 4\,\pi\,p_k\,r^2\,\mathrm{d}r\,. \qquad (2.7)$$

Tato práce zvětší povrchovou energii o dE (vnější a vnitřní povrch)

$$\mathrm{d}E = 2\sigma\,\mathrm{d}S = 2\sigma\,[4\pi\,(r+\mathrm{d}r)^2 - 4\pi\,r^2] \approx 16\pi\,\sigma\,r\,\mathrm{d}r. \qquad (2.8)$$

Porovnáním změny energie a vykonané práce dostáváme

$$\Delta\,p = \frac{4\,\sigma}{r}\quad. \qquad (2.9)$$

Přetlak je nepřímo úměrný poloměru bubliny. U kapky kapaliny je obdobný stav. Protože má však kapka pouze jeden povrch (vnější), je přetlak poloviční

$$\Delta\,p = \frac{2\sigma}{r} \qquad (2.10)$$

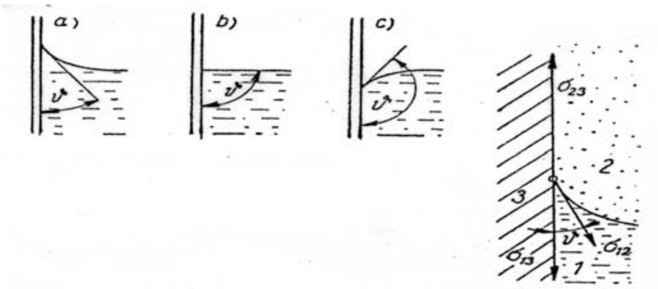
Kontrolní otázky

1. Jak vzniká kapilární tlak u zakřiveného povrchu?

2. Jak závisí přetlak u zakřiveného povrchu na poloměru křivosti?

3.5 Jevy na rozhraní dvou prostředí

Povrchové napětí ovlivňuje tvar povrchu kapaliny u stěn nádoby. Pozorujeme-li stykové místo povrchu kapaliny se stěnou nádoby, zjišťujeme u různých kapalin různě veliké zdvižení



Obr. 2.3 Různé případy chování kapaliny ve styku se stěnou nádoby

nebo snížení okraje. Na okraji se stýkají tři prostředí, kapalina 1., vzduch (nebo jiný plyn) 2. a stěna pevného tělesa 3. (obr.2.3).

Při rovnováze platí

$$\sigma_{23} = \sigma_{13} + \sigma_{12} \cos \vartheta \quad , \tag{2.11}$$

$$\cos \vartheta = \frac{\sigma_{23} - \sigma_{13}}{\sigma_{12}} \quad . \tag{2.12}$$

Úhel ϑ nazýváme **krajovým úhlem**.

Povrchové napětí mezi vzduchem a stěnou je zanedbatelné proti ostatním dvěma, tj. $\sigma_{23} = 0$. Pak

$$\cos \vartheta = -\frac{\sigma_{23}}{\sigma_{12}} \quad . \tag{2.13}$$

Je-li $\sigma_{23} \leq 0$ (vzhledem k orientaci vyznačené na obr.2.3), tedy cos $\vartheta \geq 0$, úhel ϑ je ostrý. Kapalina smáčí stěnu (např. voda a sklo) a okraj hladiny je zvednut. Je-li $\sigma_{23} \geq 0$, je $\cos\vartheta \leq 0$, úhel ϑ je tupý a kapalina stěnu nesmáčí. Okraj hladiny kapaliny, která nesmáčí stěnu, je u stěny zakřiven dolů a tvoří vypuklou plochu.

Kontrolní otázky

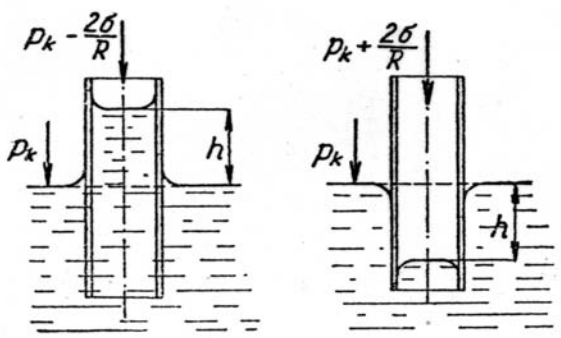
?

1. Co je to krajový úhel?

2. Co je podmínkou, že voda smáčí stěnu nádoby?

3.6 Kapilarita

Ponoříme-li velmi úzkou trubici do kapaliny, která smáčí stěny trubice, vytvoří hladina kapaliny v této trubici dutý vrchlík a bude výše než hladina okolní kapaliny (obr.2.4). Tomuto jevu říkáme **kapilární elevace**. U kapaliny, která nesmáčí stěny, bude hladina v úzké trubici níže a mluvíme o **kapilární depresi**. Hladina má přitom tvar vypuklého vrchlíku. Zdvižení



Obr. 2.4 Kapilární elevace a deprese

sloupce kapaliny při kapilární elevaci je způsobeno povrchovými silami u kapaliny. Podle (obr.2.3) působí na jednotku délky stykové čáry povrchu kapaliny se stěnou ve svislém směru síly číselně rovné povrchovým napětím σ_{13} a σ_{23}. Má-li trubice kruhový průřez o poloměru r, jsou celkové síly dány součinem obvodu trubice a povrchového napětí

$$F_{13} = 2\pi\, r\, \sigma_{13} \quad \text{a} \quad F_{23} = 2\,\pi\, r\, \sigma_{23} \quad . \tag{2.14}$$

Po obvodě trubice působí na sloupec kapaliny směrem vzhůru výsledná síla

$$F = F_{23} - F_{13} = 2\pi\, r\,(\sigma_{23} - \sigma_{13}) = 2\pi\, r\, \sigma_{12} \cos\vartheta \ . \tag{2.15}$$

Sloupec kapaliny o výšce h a poloměru r působí směrem dolů gravitační silou

$$G = \pi\, r^2 \rho\, g\, h \quad . \tag{2.16}$$

Kapalina vystoupí do výšky h, takže platí

$$F = G \quad , \tag{2.17}$$

tedy

$$h = \frac{2\,\sigma_{12} \cos\vartheta}{r\,\rho\, g} \quad . \tag{2.18}$$

Výška vzestupu kapaliny je přímo úměrná povrchovému napětí na rozhraní kapalina-vzduch a nepřímo úměrná poloměru trubice r. Je-li $\cos\vartheta\ \le\ 0$, je potom $h\ \le\ 0$ a výraz (2.18) tedy platí jak pro elevaci, tak i pro depresi.

Kontrolní otázky

1. V čem je podstata kapilárního jevu?

2. Jak vzniká kapilární elevace?

3. Jak vzniká kapilární deprese?

Příklady

2.6.1 Do vody jsou ponořené dvě různé kapiláry, jejich vnitřní průměry jsou 2 mm a 3 mm. Rozdíl hladin v obou kapilárách je 4,9 mm. Určete povrchové napětí vody za předpokladu dokonalého smáčení stěn.

Řešení: při rovnosti sil platí

$2\pi r_1 \sigma = \pi r_1^2 h_1 \rho g$

$2\pi r_2 \sigma = \pi r_2^2 h_2 \rho g$

$$\Delta h = h_2 - h_1 = \frac{2\sigma}{\rho g}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

$$\sigma = \frac{\Delta h\, \rho\, g}{2}\left(\frac{r_2 r_1}{r_1 - r_2}\right) =$$

$$= \frac{4{,}9.10^{-3}\,\mathrm{m}.10^3\,\mathrm{kg.m^{-3}}.9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}}{2}\left(\frac{2.10^{-3}\,\mathrm{m}.3.10^{-3}\,\mathrm{m}}{3.10^{-3}\,\mathrm{m} - 2.10^{-3}\,\mathrm{m}}\right) = 0{,}144\ \mathrm{N.m^{-1}}$$

2.6.2 Do vody je ponořena kapilára o světlosti 0,4 mm*. Jak vysoko vystoupí voda v kapiláře? Hustota vody je* 1000 kg.m^{-3}*, povrchové napětí* 0,07 N.m^{-1}.

Řešení?

$$\sigma = \frac{F}{l}$$

$F = \sigma l$

$mg = \sigma \pi d$

$V \rho g = \sigma \pi d$

$$\pi \frac{d^2}{4} h \rho g = \sigma \pi d$$

$$h = \frac{4\sigma}{\rho g d} = \frac{4.0{,}07\,\mathrm{N.m^{-1}}}{1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}.9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}.4.10^{-4}\,\mathrm{m}} = 0{,}0714\,\mathrm{m}$$

2.6.3 Jaký je poloměr kapiláry, ve které vystoupí voda do výšky 8 mm? *[r =* 1,78 mm*]*

2.6.4 Do nádoby s kapalinou o hustotě 900 kg.m^{-3} *je ponořena kapilára s vnitřním průměrem* 1,5 mm. *Kapalina vystoupí v kapiláře do výšky* 15 mm. *Určete povrchové napětí kapaliny za předpokladu, že stěny jsou dokonale smáčeny. [*σ = 0,0506 N.m^{-1}*]*

3.7 Autotest

1. Jak se síly působí mezi molekulami kapaliny?
2. Jak se liší silové působení na molekule uvnitř kapaliny a na molekule u povrchu kapaliny?
3. Uveďte definiční vztah pro povrchové napětí σ a jeho jednotku
4. Na čem závisí tlak pod zakřiveným povrchem?
5. Co je to krajový úhel?
6. Co je to jev kapilární elevace?
7. Co je to jev kapilární deprese?
8. Jaké síly působí na kapalinu v kapiláře?
9. Na čem závisí výška výstupu kapaliny v kapiláře?
10. Kde se negativně projeví kapilarita ve stavebnictví.

3.8 Klíč

1. Jedná se o síly krátkého dosahu. Nazývají se van der Waalsovy síly.
2. Na molekulu uvnitř kapaliny působí přitažlivé síly rovnoměrně ze všech stran. Celková síla je nulová. Na molekuly u povrchu působí pouze síly od molekul uvnitř kapaliny. Tyto molekuly jsou podrobeny jednostrannému tahu uvnitř kapaliny.=
3. $\sigma = \dfrac{dF}{dl}$, [N.m^{-1}]
4. Tlak pod zakřiveným povrchem závisí přímo na povrchovém napětí σ a nepřímo na poloměru křivosti r.
5. Krajový úhel je úhel mezi stěnou a tečnou k povrchu kapaliny,
   - o kapilární elevaci mluvíme, když kapalina v kapiláře vystoupí nad okolní hladinu,
   - o kapilární depresi mluvíme, když kapalina v kapiláře je níže než v okolní kapalině.
6. Povrchové síly a gravitační síly

7. Výška kapaliny v kapiláře závisí přímo na povrchovém napětí, krajovém úhlu a nepřímo na poloměru kapiláry a hustotě kapaliny.

8. Při vzlínání vody v důsledku nedokonalé izolace staveb

3.9 Závěr - Shrnutí

Na molekuly u povrchu kapaliny působí přitažlivé síly molekul z vnitřku kapaliny. Na povrchu kapaliny vzniká povrchové napětí. Důsledkem jsou kapilární jevy elevace a deprese.

4 Hydrostatika

4.1 Statická rovnováha kapalin v tíhovém poli

Kapaliny a plyny se z hlediska mechaniky deformovatelných těles označují společným názvem tekutiny. Na rozdíl od pevných látek, které zachovávají při pohybu svůj tvar, tekutiny velmi lehce svůj tvar mění. Je to způsobeno volnou přesunovatelností molekul. Tekutiny jsou tvarově nestálé a snadno se přizpůsobují okolnímu podmínkám, např. tvaru nádoby.

Různé tekutiny nejsou ovšem stejně tekuté. Závisí to na tečném napětí vznikající při pohybu, které charakterizujeme vnitřním třením. Měřítkem vnitřního tření je viskozita kapaliny η.

Z neurčitosti tvaru kapaliny vyplývá, že u kapalin nemůžeme uvažovat o pružnosti v tahu nebo tlaku. Pružné vlastnosti kapalin se mohou projevit jedině při stlačení v uzavřené nádobě. V tom případě jde o objemovou pružnost. Tuto vlastnost charakterizuje modul objemové pružnosti K a jeho převrácená hodnota stlačitelnost. Pro zjednodušení zavádíme pojem dokonalé kapaliny. Pružnost ve smyku má nulovou (G = 0), je nestlačitelná ($K \to \infty$) a neexistuje v ní vnitřní tření (η = 0). Dokonalá kapalina v praxi neexistuje. Skutečné kapaliny se jí svými vlastnostmi jen přibližují.

Okolní objekty na tekutiny působí silami. Tyto síly působí buď na povrch tekutiny, anebo prostřednictvím silových polí na celý objem tekutiny. Tyto síly vyvolávají v tekutině statický tlak p_s (na rozdíl od dynamického tlaku, který vzniká v důsledku jejího relativního pohybu). U statického tlaku v klidné tekutině rozlišujeme podle příčin jeho vzniku dvě složky. **Tlak vnější** p_v a **tlak hydrostatický** p_h. Tlak je skalární veličina, ale v důsledku jeho existence působí na tělesa, která jsou s tekutinou v kontaktu síly, které jsou vektory. Ve styku s pevným tělesem vyvozuje tekutina na plošku $\mathrm{d}\vec{S}$ jeho povrchu elementární **tlakovou sílu**

$$\mathrm{d}\vec{F} = p_s\,\mathrm{d}\vec{S}\ . \tag{3.1}$$

Tato síla je vždy kolmá k povrchu, protože klidná tekutina nemůže vyvozovat tečné síly, protože v ní neexistuje tečné napětí. Na stěnu tělesa o ploše S působí tedy celková tlaková síla

$$\vec{F} = \int_S p_s\,\mathrm{d}\vec{S} \tag{3.2}$$

určená plošným integrálem tlaku na celé ploše stěny tělesa, které je ve styku s tekutinou.

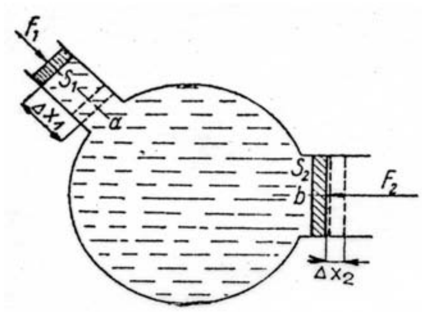
Kontrolní otázky

1. Jaké složky statického tlaku v tekutině rozlišujeme?

2. Tlak v tekutině je skalár, které jeho účinky mají směrový charakter?

4.2 Pascalův zákon

Silovým působením hmotných objektů, které jsou s tekutinou v bezprostředním styku vzniká v tekutině **vnější tlak**. Vnější tlak můžeme vyvolat například silovým působením pístu na tekutinu v uzavřené nádobě. U otevřené hladiny může být vyvolán silovým působením tlaku atmosféry na volnou hladinu. Tento tlak, vyvolaný pouze vnějšími silami na povrch tekutiny je v celém jejím objemu stejný, bez ohledu na směr působení síly (Pascalův zákon).



Obr. 3.1 Pascalův zákon

Pascalův zákon si můžeme ověřit na nádobě opatřené dvěma písty nestejných průřezů a naplněné nestlačitelnou kapalinou (obr.3.1). Na píst 1 tlačíme silou F_1 a posuneme jej o vzdálenost dx_1. Tím vykonáme práci dW_1 = F_1dx_1 a vytlačíme kapalinu o objemu dV_1 = S_1dx_1. Uvažujeme-li vztah mezi silou a tlakem $F_1 = p_1 S_1$, můžeme vyjádřit práci takto

$$\mathrm{d}W_1 = p_1\,\mathrm{d}V_1 \tag{3.3}$$

V důsledku nestlačitelnosti kapaliny je posunut píst u druhého otvoru o tentýž objem dV. Kapalina přitom působí na píst silou F_2 a vykoná práci dW_2, která je podle zákona zachování energie totožná s prací dW_1

$$\mathrm{d}W_2 = F_2\,\mathrm{d}x_2 = p_2\,\mathrm{d}V_2 = \mathrm{d}W_1 = p_1\,\mathrm{d}V_1 . \tag{3.4}$$

Vzhledem k totožnému objemu dV_1 = dV_2 jsou v těchto různých místech tlaky p_1 a p_2 stejné. Tuto úvahu můžeme aplikovat pro libovolné místo nádoby.

Na principu Pascalova zákona pracuje např. hydraulický lis, kde pomocí malé tlakové síly působící na píst s malým plošným obsahem můžeme vyvolat velkou tlakovou sílu působící na píst s velkým plošným obsahem. Dalším důležitým příkladem využití Pascalova zákona je uplatnění jeho principů v hydraulických brzdách. Zde existence stejného tlaku ve všech místech rozvodu brzdové kapaliny umožňuje, aby brzdy na kola působily stejnými silami a vozidlo se při brždění nedostalo do smyku.

Kontrolní otázky

1. *Objasněte příčiny existence vnějšího tlaku v tekutině.*
2. *Objasněte princip hydraulického lisu.*

Příklady

3.2.1 Hydraulický lis má širší píst o průměru 30 cm*, užší o průměru* 6 cm*. Užší píst uvádíme do pohybu jednozvratnou pákou, jejíž ramena jsou* 16 cm *a* 80 cm*. Jaká je zdvíhací síla lisu, jestliže na delší rameno páky působí síla* 250 N *a účinnost lisu je* 88%*?*

Řešení

$$p = \frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}$$

$$F_1' \; l_1' = F_1 \; l_1$$

$$F_1 = \frac{l_1'}{l_1} \; F_1'$$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1}\frac{l_1'}{l_1} F_1' = \frac{\pi \, d_2^2 \, 4 l_1'}{\pi \, d_1^2 \, 4 \, l_1} F_1'$$

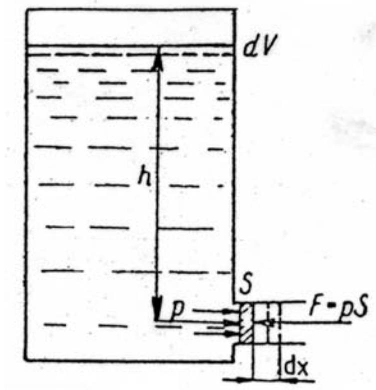
S přihlédnutím k účinnosti η

$$F_2 = \frac{d_2^2 \, l_1'}{d_1^2 \, l_1} F_1' \, \eta \; = \; \frac{(30.10^{-2}\ \mathrm{m})^2}{(6.10^{-2}\ \mathrm{m})^2} \; \frac{0{,}8\ \mathrm{m}}{0{,}16\ \mathrm{m}} \; 250\ \mathrm{N} \,.\, 0{,}88 = 27{,}5\ \mathrm{kN}$$

3.2.2 Píst hydraulického zvedáku má průměr 48 cm*. Určete tlak, kterého je zapotřebí ke zvednutí břemene o hmotnosti* 2,5 kg *[p* = 136 Pa*].*

4.3 Hydrostatický tlak

V důsledku působení silových polí na částice kapaliny vzniká v ní **hydrostatický tlak**. Tento tlak je funkcí polohy. Např. v gravitačním poli Země tlačí v nádobě horní vrstvy kapaliny na spodní svojí tíhou, takže s rostoucí hloubkou od povrchu se tlak zvětšuje.



Obr. 3.2 Tlak v kapalině způsobený tíží

Na nádobě s otvorem (obr.3.2) můžeme ukázat vztah pro hydrostatický tlak v nestlačitelné kapalině v homogenním tíhovém poli. Působením hydrostatického tlaku p_h se píst o ploše S posune o vzdálenost dx. Tím se vykoná práce

$$\mathrm{d}W = F\,\mathrm{d}x = p_h\,S\,\mathrm{d}x = p_h\,\mathrm{d}V \quad . \tag{3.5}$$

Kapalina se v pístu posunula o objem dV. O stejný objem poklesne hladina kapaliny v nádobě. Lze si představit, že práce byla vykonána na účet změny potenciální energie elementu tekutiny o objemu dV, který se z místa u hladiny přesunul do prostoru pístu. Tuto potenciální energii můžeme zapsat ve tvaru

$$\mathrm{d}E_p = \mathrm{d}W = \mathrm{d}m\,g\,h = \rho\,\mathrm{d}Vgh \tag{3.6}$$

kde dm = ρdV je hmotnost přemístěného elementu kapaliny o objemu dV. Porovnáním rovnic (3.5) a (3.6) dostáváme pro hydrostatický tlak vztah

$$p_h = \rho\,g\,h. \tag{3.7}$$

Vzhledem k tomu, že tlaková síla na element plochy dS je dána vztahem

$\mathrm{d}F_p = p_h\,\mathrm{d}S = = \rho g\ h\ \mathrm{d}S$, můžeme vypočítat celkovou tlakovou sílu na plochu S integrací

$$\vec{F}_p = \int_S \rho\,g\,h\,\mathrm{d}\vec{S} \quad . \tag{3.8}$$

Kontrolní otázky

1. Vysvětlete příčiny existence hydrostatického tlaku v kapalině.

2. Jak závisí hydrostatický tlak na hloubce?

Příklady

3.3.1 Vypočtěte sílu potřebnou k otevření poklopu o rozměrech 0,5 m *x* 0,5 m *uzavírajícího otvor dna nádrže, v níž je voda ve výšce* 3 m.

Řešení

$F = p\,S = h\,\rho\,g\,S = 3\ \mathrm{m}\ .\ 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}\ .\ 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\ .\ 0{,}5\ \mathrm{m}\ .\ 0{,}5\ \mathrm{m} = 7{,}36\ \mathrm{kN}$

3.3.2 Do nádoby je nalita rtuť do výšky 2 cm*, pak voda do výšky* 20 cm *a nakonec olej. Celková výška kapalin v nádobě je* 40 cm. *Určete hydrostatický tlak u dna nádoby, víte-li, že hustota oleje je* 900 kg.m^{-3} *a hustota rtuti* 13 550 kg.m^{-3}.

Řešení

$p = h\,\rho\,g$

$p = p_1 + p_2 + p_3 = g(h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + h_3\rho_3) = g\left[h_1\rho_1 + h_2\rho_2 + \left(h - h_1 - h_2\right)\rho_3\right] =$

$= 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\ [0{,}02\ \mathrm{m}\ .\ 13\,550\ \mathrm{kg.m^{-3}} + 0{,}2\ \mathrm{m}\ .\ 1000\mathrm{kg.m^{-3}} + (0{,}4\text{-}0{,}02\text{-}0{,}2)$

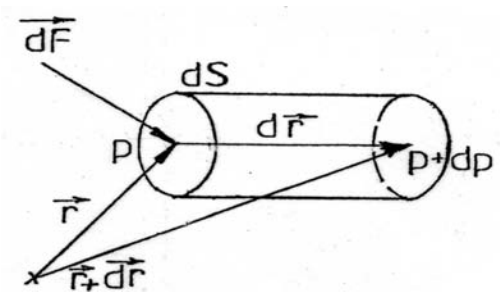
$\mathrm{m}\ .\ 900\ \mathrm{kg.m^{-3}}] = 6210\ \mathrm{Pa}$

3.3.3 Jakou výšku musí mít sloupec rtuti, aby vyvolal stejný hydrostatický tlak jako sloupec vody 4 m *vysoký? [h* = 0,295 m*]*

3.3.4 Skleněná válcová nádoba vysoká 0,2 m*, průřezu* 30 cm^2 *se naplní vodou, pokryje listem papíru a obrátí tak, aby byl papír ve vodorovné rovině. Jak velkou silou je papír tlačen k válci, bude-li barometrický tlak* 0,095 MPa*? [F* = 297 N*]*

4.4 Eulerova rovnice

Rozdělení tlaku v kapalině za rovnovážného stavu obecně řeší **Eulerova rovnice**. Můžeme uvažovat malý element kapaliny o hmotnosti dm a objem dV ve tvaru válečku o podstavě dS a výšce d$\vec{r}$ (obr.3.3). Na tento element působí síla d$\vec{F}$ vnějšího původu skloněná o úhel α od směru d$\vec{r}$. Touto silou se zvýší tlak okolní kapaliny na stěny vyšetřovaného elementu jak ve směru d$\vec{r}$, tak ve směru k němu kolmém.



Obr. 3.3 K odvození Eulerovy rovnice

Za rovnováhy musí ve směru $\mathrm{d}\vec{r}$ platit

$$p\,\mathrm{d}\vec{S} - (p + \mathrm{d}\,p)\,\mathrm{d}\vec{S} + \mathrm{d}\,F\cos\alpha = 0 \quad . \qquad (3.9)$$

Uvažujeme-li, že

$$\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}m} = \vec{a} \quad \text{a} \quad \mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad , \qquad (3.10)$$

dostáváme

$$\mathrm{d}\,p = \rho\,|\,\vec{a}\,|\,|\,\mathrm{d}\vec{r}\,|\cos\alpha \quad . \qquad (3.11)$$

Rovnici můžeme zapsat obecně ve tvaru

$$\mathrm{d}\,p = \rho\,\vec{a}\,.\,\mathrm{d}\vec{r} \qquad (3.12)$$

a je nazývána **Eulerovou rovnicí**. Lze ji též zapsat v analytickém tvaru

$$\mathrm{d}\,p = \rho(a_x\,\mathrm{d}\,x + a_y\,\mathrm{d}\,y + a_z\,\mathrm{d}\,z). \qquad (3.13)$$

Z rovnice je patrné, že přírůstek tlaku v kapalině v libovolném místě je roven práci vnějších sil, působících na objemovou jednotku kapaliny podél příslušné dráhy. Eulerova rovnice hydrostatiky má obecnou platnost a je tedy použitelná pro kterékoliv silové pole, a to homogenní i nehomogenní.

V gravitačním poli Země, pokud položíme osu OY ve směru intenzity zemského gravitačního pole máme $a_x = 0$, $a_y = g$, $a_z = 0$. Rovnice (3.13) má pak tvar

$$\mathrm{d}p = \rho\,\mathrm{g}\,\mathrm{d}y \qquad (3.14)$$

a integrál pro libovolnou dráhu začínající na hladině a končící v hloubce h

$$\int_{p_0}^{p}\mathrm{d}\,p = \rho g\int_{0}^{h}\mathrm{d}\,y \qquad (3.15)$$

je

$$p - p_0 = pgh. \qquad (3.16)$$

Konstanta p_0 je tlak v hloubce $h = 0$. Položíme-li počátek soustavy do hladiny, je p_0 tlak na hladinu, např. tlak atmosférický. Nepřihlížíme-li k atmosférickému tlaku dostáváme vztah (3.7)

$$p = \rho gh\,. \qquad (3.17)$$

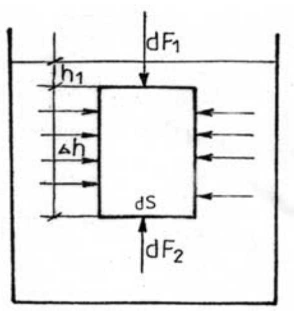
Kontrolní otázky

1. Jaký problém řeší Eulerova rovnice?

2. Na čem závisí přírůstek tlaku v kapalině?

4.5 Archimédův zákon

Důležitým důsledkem hydrostatického tlaku způsobeného vlastní tíhou kapaliny je **zákon Archimédův**, který říká, že těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná tíze kapaliny vytlačené ponořenou částí tělesa.



Obr. 3.4 K odvození Archimédova zákona

Při ověření platnosti Archimédova zákona můžeme v kapalině uvažovat hranolek s horní podstavou v hloubce h_1. Výška hranolku je Δh a velikost podstavy je dS (obr.3.4). Síly na

protilehlé boční stěně jsou po dvojicích ve stejných hloubkách stejně velké, ale obráceně orientované, takže jejich celkový příspěvek ke vztlaku je nulový. **Vztlakovou sílu** dF_{vz} tak dostaneme z rozdílu tlakových sil působících na spodní a horní podstavu

$$\mathrm{d}F_{vz} = \mathrm{d}F_2 - \mathrm{d}F_1 . \tag{3.18}$$

Tlaková síla na horní podstavu, která je v hloubce h_1 pod hladinou je

$$\mathrm{d}F_1 = p_1\,\mathrm{d}S = \rho\, g\, h_1\,\mathrm{d}S . \tag{3.19}$$

Tlaková síla na spodní podstavu v hloubce $h_1 + \Delta h$ je pak

$$\mathrm{d}F_2 = p_2\,\mathrm{d}S = (h_1 + \Delta h)\,\rho\, g\,\mathrm{d}S . \tag{3.20}$$

Dosazením do vztahu (3.13) dostáváme

$$\mathrm{d}F_{vz} = (h_1 + \Delta h)\,\rho\, f\,\mathrm{d}S - h_1\,\rho\, g\,\mathrm{d}S = \rho\, g\,\Delta h\,\mathrm{d}S , \tag{3.21}$$

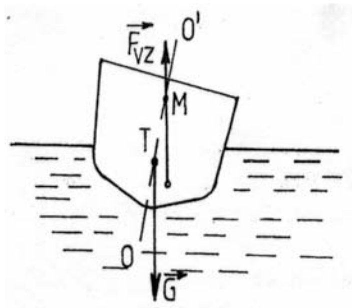
$$\mathrm{d}F_{vz} = \mathrm{d}V\rho\, g \tag{3.22}$$

Uvažovanými hranolky si můžeme představit vyplněný libovolný prostor. Ke stejnému závěru dojdeme, uvažujeme-li v kapalině ohraničený libovolný objem kapaliny myšlenou blanou. Protože nepozorujeme, že by části kapaliny klesaly či stoupaly vzhůru, vznáší se námi myšlená část kapaliny tak, že je nadlehčována silou, která se právě rovná její tíze. Z Archimédova zákona je možné odvodit kritérium pro **plování tělesa**. Je-li hustota tělesa větší než hustota kapaliny, ve které se nachází, klesá ke dnu. Při rovnosti hustot se těleso v kapalině vznáší a pokud je jeho hustota menší než hustota kapaliny, pak plove.

Podle principu akce a reakce působí plovoucí těleso na kapalinu svou tíhou $\vec{G}$ kterou si myslíme soustředěnou v jeho těžišti T a rovněž kapalina působí na těleso vztlakem $\vec{F}_{vz}$ rovným tíze tělesa.

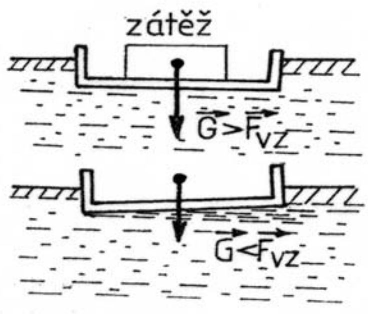
V obecném případě tvoří tyto dvě síly dvojici, která natáčí plovoucí těleso do takové polohy, v níž obě síly leží na společné svislici, kterou nazýváme **osou plování**. O stabilitě plování tělesa rozhoduje vzájemná poloha tzv. **metacentra** M a těžiště tělesa T.

Metacentrem nazýváme průsečík vztlakové síly s osou plování při vychýlení osy plování ze svislé polohy (obr.3.5). Je-li metacentrum M nad těžištěm T, stáčí dvojice sil, vzniklá vychýlením osy plování, těleso zpět do původní polohy.



Obr. 3.5 Metacentrum

Takovou polohu tělesa nazýváme **stabilní** (stálou). Kdyby leželo metacentrum pod těžištěm, pak by dvojice sil výchylku ještě zvětšovala, a to tak dlouho, pokud by těleso nepřešlo do nějaké stabilní polohy. V tom případě hovoříme o poloze **labilní** (vratké).



Obr. 3.6 Účinky vztlakových sil

V případě, že metacentrum splývá s těžištěm tělesa, hovoříme o poloze **indiferentní** (volné).Účinky vztlakových sil mohou působit velmi nepříznivě také na stabilitu staveb, zvláště tam, kde hladina podzemní vody leží v úrovni, nebo může někdy stoupat nad úroveň výkopu. V takových případech musí mít základ budovy formu betonové vodotěsné vany (obr.3.6). Tuto vanu je nutné zatížit od počátku až do doby, kdy tíha stavby převýší vztlakovou sílu. Obdobně je třeba zajišťovat zvlášť objemné stavby nádrží na tekutiny, které jsou z části ponořeny v terénu. Předepsanou zátěž je nutné zajistit např. minimální výškou hladiny skladované tekutiny.

Kontrolní otázky

1. Na čem závisí vztlaková síla působící na těleso v tekutině?

2. Co je to metacentrum?

Příklady

3.5.1 Kolik procent celkového objemu krychle z expandovaného polystyrénu vyčnívá nad hladinu, plave-li tato krychle na vodě (obr. 3.7). Hustota polystyrenu je 50 kg.m^{-3}.

Řešení

$G_P = F_{VZ}$

$m_p g = V_2 \rho_v g$

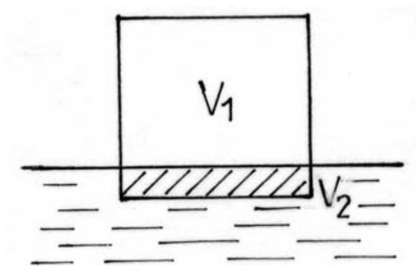
$V = V_1 + V_2$

$\rho_p V g = (V - V_1)\rho_v g$

$\rho_p V = \rho_V V - \rho_V V_1$

$\rho_p V_1 = V(\rho_V - \rho_p)$

$$\frac{V_1}{V} = 1 - \frac{\rho_p}{\rho_V} = 1 - \frac{50\,\mathrm{kg.m^{-3}}}{1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}} = 0{,}95 = 95\%$$



Obr. 3.7 Krychle na vodě

3.5.2 Dřevěná konstrukce o hmotnosti 800 kg *má být potopena pod vodu a zatížením kameny se má zabránit, aby vyplula na hladinu (obr.3.8). Určete nejmenší hmotnost kamenů, která je k tomu potřebná. Hustota dřeva je* 700 kg.m^{-3}.

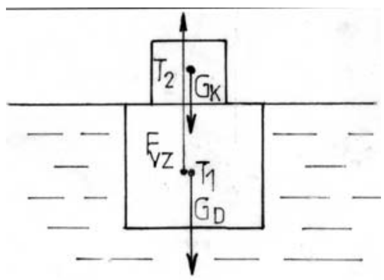
Řešení

$F_{VZ} = G_K + G_D$

$V_D \rho_V g = m_k g + m_d g$

$$\frac{m_D}{\rho_D}\rho_V = m_k + m_D$$

$$m_k = m_D\left(\frac{\rho_V}{\rho_D} - 1\right) = 800\,\mathrm{kg}\left(\frac{1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}}{700\,\mathrm{kg.m^{-3}}}\right) = 343\,\mathrm{kg}$$



Obr. 3.8 K příkladu 3.5.2

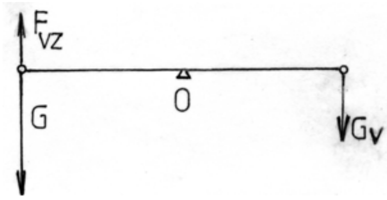
3.5.3 Bronzové těleso je na vzduchu vyváženo závažím o hmotnosti 1,6 kg*, ve vodě* 1,4 kg *(obr.3.9). a) Vypočítejte hustotu bronzu. b) Určete hmotnostní poměr mědi a cínu, je-li hustota mědi* 8 800 kg.m^{-3}*, cínu* 7 300 kg.m^{-3}*, vody* 1 000 kg.m^{-3}.

Řešení

$$a)\ G_V = G - F_{VZ}$$

$$m_V g = mg - V_T \rho_V g$$

$$m - m_V = \frac{m}{\rho_T}\rho_V$$



Obr. 3.9 Těleso z příkladu 3.5.3

$$\rho_T = \rho_V \frac{m}{m - m_V} = 1000\,\mathrm{kg.m^{-3}} \quad \frac{1{,}6\,\mathrm{kg}}{1{,}6\,\mathrm{kg} - 1{,}4\,\mathrm{kg}} = 8\,000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$$

$$b)\ \frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1 V_1}{\rho_2 V_2}$$

$$m = m_1 + m_2 = \rho_1 V_1 + \rho_2 V_2 = \rho_1 V_1 + \rho_2 (V - V_1)$$

$$V_1 = \frac{m - \rho_2 V}{\rho_1 - \rho_2} = m\frac{\rho - \rho_2}{\rho(\rho_1 - \rho_2)}$$

$$V_2 = m\frac{\rho_1 - \rho}{\rho(\rho_1 - \rho_2)}$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\rho_1(\rho - \rho_2)}{\rho_2(\rho_1 - \rho)} = \frac{8800\,\mathrm{kg.m^{-3}}(8000\,\mathrm{kg.m^{-3}} - 7300\,\mathrm{kg.m^{-3}})}{7300\,\mathrm{kg.m^{-3}}(8800\,\mathrm{kg.m^{-3}} - 8000\,\mathrm{kg.m^{-3}})} = 1{,}055$$

3.5.4 Dřevěný válec ponořený ve vodě do 2/3 *výšky vytáhneme z vody. Jakou práci vykonáme? Poloměr válce je* 10 cm*, výška válce je* 60 cm*, hustota dřeva je* 600 kg.m^{-3}*. Předpokládáme, že hladina vody v nádobě se nezmění.*

Řešení

Elementární práce při vytažení o úsek dy je:

dW = F dy = *(mg - V* ρ_V *g)* dy*, kde V je objem ponořené části válce.*

Celková práce při vytažení o 2/3 *výšky válce je*

$$W = \int_0^{2/3h} (\pi r^2\ h\,\rho_D\ g - \pi r^2\ y\,\rho_V\, g)\,\mathrm{d}y$$

$$W = \pi r^2 g \left[h\rho_D y - \frac{y^2}{2}\rho_V \right]_0^{2/3h}$$

$$W = \pi r^2 g \left(\frac{2}{3} h^2 \rho_D - \frac{4}{18} h^2 \rho_V\right)$$

$$W = \pi r^2 g \ \frac{2}{3} h^2 \left(\rho_D - \frac{1}{3} \rho_V\right) =$$

$$= \pi\,(0{,}1\ \mathrm{m})^2\ 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\ \frac{2}{3}(0{,}6\ \mathrm{m})^2\,(600\ \mathrm{kg.m^{-3}} - \frac{1}{3}1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}) = 19{,}7\ \mathrm{J}$$

3.5.5 Jakou silou působí voda na stavidlo mlýnského náhonu, který je široký 4 m *a hluboký* 2 m *(obr. 3.10)? Kde je působiště síly?*

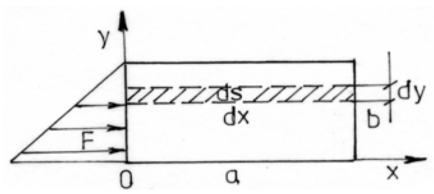
Řešení

$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S$

$p = y\rho g$

$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}F = y\rho g a\,\mathrm{d}y$



Obr .3.10 Stavidlo mlýnského náhonu.

$$F = \int_0^b \rho\, g\, a\, y\,\mathrm{d}y = \rho\, g\, a\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^b = \frac{1}{2}\rho\, g\, a\, b^2 =$$

$$= \frac{1}{2}1000\,\mathrm{kg\,.\,m^{-3}}.9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}.4\,\mathrm{m}.(2\,\mathrm{m})^2 = 78{,}5\,\mathrm{kN}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\mathrm{d}M = y.\mathrm{d}F$$

$$y_T = \frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}F} = \frac{M}{F}$$

$$\mathrm{d}M = yp\,\mathrm{d}S = ypa\,\mathrm{d}y = y^2\rho g a\,\mathrm{d}y$$

$$M = \int_0^b \rho g a y^2\,\mathrm{d}y = \rho g a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^b = \frac{1}{3}\rho g a b^3$$

$$y_T = \frac{\frac{1}{3}\rho g a b^3}{\frac{1}{2}\rho g a b^2} = \frac{2}{3}b = \frac{2}{3}2\,\mathrm{m} = 1{,}33\,\mathrm{m}$$

3.5.6 Jak velkou silou působí voda na hráz údolní přehrady, která má tvar lichoběžníku podle obrázku (obr. 3.11, 3.12).

Řešení

$\mathrm{d}F = p\,\mathrm{d}S$

$p = y\rho g$

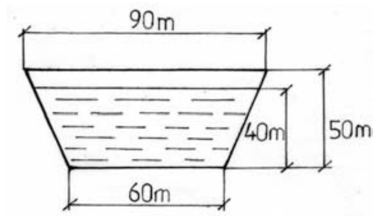
$\mathrm{d}S = x\,\mathrm{d}y$

$\mathrm{d}F = x\,y\,\rho g\,\mathrm{d}y$

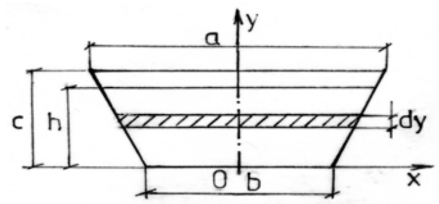
$x = ky + q$

$q = \dfrac{b}{2}$

$k = \dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{\frac{a}{2} - \frac{b}{2}}{c} = \dfrac{a-b}{2c}$



Obr. 3.11 Hráz údolní nádrže



Obr. 3.12 Označení rozměrů hráze

$x = \dfrac{a-b}{2c}y + \dfrac{b}{2}$

$$F = \int_0^h \left(\frac{a-b}{2c}y + \frac{b}{2}\right) y\rho g\,\mathrm{d}y = \rho g\frac{a-b}{2c}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h + \rho g\frac{b}{2}\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{1}{2}\rho g h^2\left[\frac{a-b}{3c}h + \frac{b}{2}\right] =$$

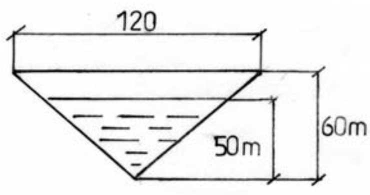
$$= \frac{1}{2}1000\,\mathrm{kg\,.\,m^{-3}}.9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}\,(40\,\mathrm{m})^2\left[\frac{90\,\mathrm{m} - 60\,\mathrm{m}}{3.50\,\mathrm{m}}40\,\mathrm{m} + \frac{60\,\mathrm{m}}{2}\right] = 2{,}98.10^8\ \mathrm{N}$$

3.5.7 Jak velký musí být plošný obsah kry o tloušťce 30 cm*, která by udržela člověka o hmotnosti* 72 kg*, je-li hustota ledu* 0,93 g.cm^{-3}*? [S* = 3,43 m^2*]*

3.5.8 Jak velkou silou je ve vodě nadlehčována hliníková krychle o straně 0,3 m*, je-li hustota hliníku* 2 700 kg.m^{-3}*? [F_{VZ}* = 883 N*]*

3.5.9 Určete hustotu a objem tělesa, které má na vzduchu tíhu 26 N *a ponořené ve vodě je vyváženo závažím o hmotnosti* 1,2 kg. *[ρ* = 1830 kg.m^{-3}*]*

3.5.10 Jak velkou silou působí voda na hráz údolní přehrady, která má tvar rovnoramenného trojúhelníka (obr. 3.13)? [F = 4,09.10^8 N*]*



Obr. 3.13 Trojúhelníková hráz Údolní přehrady.

4.6 Atmosférický tlak

Atmosférický tlak (aerostatický) je způsoben plynným obalem Země. Atmosférický tlak je největší na povrchu a s rostoucí vzdáleností od Země ho ubývá. Atmosférický tlak je obdobou tlaku hydrostatického způsobeného tíhou, není však lineární funkcí výšky jako u kapalin, neboť plyn je snadno stlačitelný, a proto se s výškou mění nejen tlak, ale i hustota plynu. Při předpokladu, že v uvedeném rozpětí výše se nemění teplota, můžeme nalézt vztah pro změnu tlaku s výškou takto:

$$\mathrm{d}p = -\rho\, g\, \mathrm{d}h \quad . \tag{3.23}$$

Z Boylova zákona vyplývá pro závislost hustoty na tlaku při konstantní teplotě

$$\rho = \frac{\rho_0}{p_0}\, p \quad , \tag{3.24}$$

kde ρ_0 je hustota při známém tlaku p_0. Tedy

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, \mathrm{d}h \quad . \tag{3.25}$$

Integrací

$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{\mathrm{d}p}{p} = -\int_{h_1}^{h_2} \frac{\rho_0}{p_0}\, g\, \mathrm{d}h \quad , \tag{3.26}$$

kde p_1 je tlak ve výšce h_1, p_2 je tlak ve výšce h_2, dostáváme

$$\ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{\rho_0}{p_0}\, g\, (h_2 - h_1) \quad , \tag{3.27}$$

neboli

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{\rho_0 g \Delta h}{p_0}} \tag{3.28}$$

Z rovnice (3.28) lze pozorovat, že tlak při stálé teplotě klesá exponenciálně s výškou nad zemským povrchem.

Kontrolní otázky

1. Čím je způsoben atmosférický tlak?

2. Jak závisí atmosférický tlak na výšce?

Příklady

3.6.1 Ve výšce h byl naměřen barometrický tlak 5.10^4 Pa*. Určete tuto výšku za předpokladu, že na zemském povrchu je tlak* 1.10^5 Pa*, hustota vzduchu je* 1,29 kg.m^{-3} *a teplota je všude stejná. [h* = 5,5 km*]*

4.7 Autotest

1. Jaké složky statického tlaku v tekutině rozlišujeme?
2. Jak se dělí tekutiny?
3. Vyjádřete tlakovou sílu působení na stěnu tělesa.
4. Kterým tlakem se zabývá Pascalův zákon?
5. Jakou vlastnost musí mít kapalina při odvození Pascalova zákona?
6. Na čem závisí hydrostatický tlak?
7. Na čem závisí vztlaková síla v Archimédově zákonu?
8. Co je to osa plování?
9. Co je to metacentrum?
10. Kdy těleso při plování stabilní?
11. Čím je způsoben atmosférický tlak?
12. Jak se mění atmosférický tlak s výškou?

4.8 Klíč

1. Tlak vnější a tlak hydrostatický.
2. Na kapaliny a plyny.
3. $\vec{F} = \int_S P_s d\vec{S}$
4. Tlakem vyvolaným vnějšími silami.
5. Musí být nestlačitelná
6. Hydrostatický tlak závisí na hustotě kapaliny ρ a výšce kapaliny h nad sledovaným místem.
7. Na objemu ponořené části tělesa dV a hustotě kapaliny ρ
8. Osa plování je spojnice metacentra a těžiště.
9. Metacentrum je průsečík vztlakové síly s osou plování.
10. Je-li metacentrum nad těžištěm.
11. Atmosférický tlak je způsoben plynným obalem Země.
12. Atmosférický tlak klesá s výškou exponenciálně.

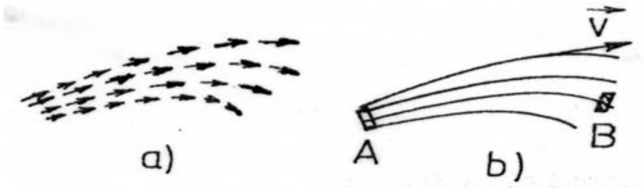
4.9 Závěr - Shrnutí

Okolní objekty působí na tekutinu silami, to vyvolává v tekutině tlak. U statického tlaku v tekutině rozlišujeme podle příčin tlak vnější (způsobený vnějšími silami) a tlak hydrostatický vyvolaný vnitřními silami. Vnější tlak je na všech místech kapiláry stejný a řeší ho Pascalův zákon. Hydrostatický tlak závisí na výšce tekutiny nad sledovaným místem. Důležitým důsledkem hydrostatického tlaku je Archimédův zákon, který popisuje nadlehčování těles ponořených do tekutiny.

5 Hydrodynamika

5.1 Pohyb kapalin

Pro zjednodušení budeme nejprve uvažovat pohyb kapaliny, při kterém nedochází ke změně objemu kapaliny při změně tlaku (dokonalá kapalina), nebo teploty a zanedbáme vnitřní tření v kapalině při pohybu kapaliny.

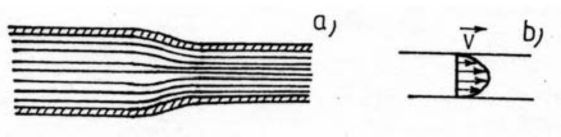


Obr. 4.1 Proudnice proudící kapaliny

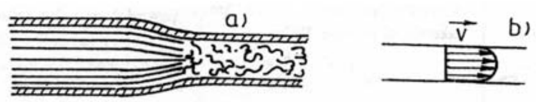
Pohyb vztahujeme obvykle k nějaké soustavě. U kapaliny většinou souřadný systém spojujeme pevně s potrubím či korytem, jímž kapalina proudí. Vzhledem k této soustavě má každá částice kapaliny v každém místě určitou rychlost. Znázorníme-li v některém okamžiku v každém místě vektor rychlosti malou šipkou, je zřejmé, že roudící kapalina představuje pole vektoru rychlostí (obr.4.1a). Takto znázorněné vektory rychlosti obalují křivky, k nimž tečny v jednotlivých jejich bodech mají směr rychlosti v dotykovém bodě (obr.4.1b.). Těmto křivkám říkáme **proudnice** (proudové čáry) a můžeme jimi názorně zobrazit vektorové pole, které kapaliny tvoří.

Laminární proudění se vyznačuje tím, že proudové trubice při něm probíhají souběžně v celé délce toku a nejeví víry. Proudnice se nekříží (obr.4.2a) a rozdělení rychlostí v potrubí má přibližně parabolický průběh (obr.4.2b).

Turbulentní proudění je charakterizováno tím, že tekutina při něm koná kromě postupného pohybu také nepravidelně pulsující pohyby vířivé (obr.4.3a). Rychlostní profil má při turbulentním proudění zploštělý tvar (obr.4.3b).



Obr. 4.2 Laminární proudění



Obr. 4.3 Turbulentní proudění

Ztráty mechanické energie třením jsou zde v důsledku víření značně větší než u laminárního proudění (přibližně úměrné druhé mocnině střední rychlosti toku).

Proudění tekutiny se nazve **ustáleným**, jestliže její rychlosti, tlaky a teploty jsou v kterémkoliv místě stálé. Přesně tomu tak může být pouze u proudění laminárního.

Kontrolní otázky

1. Co je to laminární proudění?

2. Popište turbulentní proudění?

3. Kdy považujeme proudění za ustálené?

5.2 Rovnice kontinuity

Proudnice při ustáleném (stacionárním) proudění se nemění. Všechny proudnice procházející velmi malou uzavřenou křivkou, tvoří proudové vlákno. Protože se proudnice nemohou protínat, proudí v nitru vlákna kapalina tak, jako by jeho stěny byly nepropustné. Tato skutečnost vede k **rovnici kontinuity ustáleného toku**: každým průřezem vlákna projde za stejnou dobu stejná hmotnost kapaliny, tedy

$$Q_{m1} = Q_{m2} = konst.\,, \tag{4.1}$$

přitom **hmotnostní průtok** Q_m je diferenciálním podílem hmotnosti tekutiny, která projde průřezem vlákna za čas dt

$$Q_m = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{4.2}$$

Jednotkou hmotnostního průtoku je $\mathrm{kg.s^{-1}}$.

Platí

$$\mathrm{d}m = \rho\,\mathrm{d}V = \rho\,S\,\mathrm{d}l \quad , \tag{4.3}$$

kde S je plocha průřezu kolmého k elementu dl.

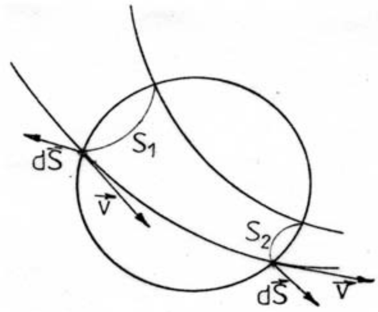
$$Q_m = \rho\,S\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = \rho\,S\,v \ . \tag{4.4}$$

Tedy s přihlédnutím k (4.1) můžeme psát pro různé průřezy o obsahu S_1, S_2, ...

$$\rho_1\,S_1\,v_1 = \rho_2\,S_2\,v_2 = \ldots = konst. \quad . \tag{4.5}$$

Rovnice (4.5) představuje rovnici kontinuity pro stlačitelné kapaliny. Hustoty ρ_i závisí na tlacích a teplotách v i-tých průřezech.

Obecně můžeme říci, že při ustáleném proudění je hmotnost tekutiny v libovolném objemu uzavřeném plochou *S* stálá. Celkový hmotnostní tok plochou *S* je nulový (obr.4.4).



Obr. 4.4 Rovnice kontinuity pro stlačitelné kapaliny

Z plochy *S* vystoupí množství tekutiny o stejné hmotnosti, jako do ní vstoupí. Tedy

$$\oint_S \rho\, \vec{v} \,.\, \mathrm{d}\vec{S} = 0. \tag{4.6}$$

Změna tlaku Δp u kapalin způsobí změnu objemu kapaliny o ΔV.

$$\Delta V = -\left(\frac{V}{K}\right)\Delta p, \tag{4.7}$$

kde *K* je modul objemové pružnosti kapaliny. Hustota vzroste z hodnoty ρ_0 na ρ. Pro původní hmotnost m_0 platí

$$m_0 = \rho_0 V = \rho\left(V - \frac{V}{K}\Delta p\right). \tag{4.8}$$

Z této rovnice lze určit hmotnost *m* kapaliny obsažené v objemu *V* při tlaku *p*

$$m = \rho V = m_0 + \frac{\rho V \Delta p}{K} \tag{4.9}$$

a přírůstek hmotnosti činí

$$\Delta m = \frac{\rho V \Delta p}{K} \quad . \tag{4.10}$$

Celkový tok kapaliny procházející plochou, která obklopuje objem *V*, nemůže být tedy při proměnlivém tlaku roven nule. Změna hmotnosti kapaliny v objemu za jednotku času je rovna

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho \frac{V}{K}\frac{\Delta p}{\Delta t} \quad . \tag{4.11}$$

To znamená, že rovnici kontinuity pro proudění stlačitelné kapaliny můžeme psát ve tvaru

$$\oint_S \rho \vec{v} \, \mathrm{d}\vec{S} = \rho \frac{V}{K} \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{4.12}$$

Při ustáleném proudění je vždy $dp/dt = 0$ a platí rovnice (4.6). K hromadění kapaliny uvnitř objemu dochází proto jen tehdy, mění-li se tlak v kapalině v závislosti na čase. V případě, že uvažujeme nestlačitelnou ideální tekutinu, musí kterýmkoliv průřezem protékat v témže časovém úseku dt stejně velké **objemové průtoky** Q_V

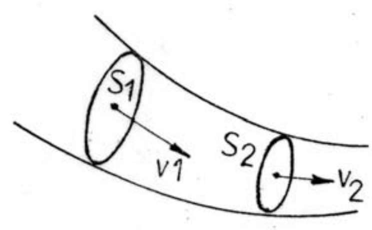
$$Q_{V1} = Q_{V2} = \ldots = konst., \tag{4.13}$$

přitom

$$Q_V = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{S.\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = S.v. \tag{4.14}$$

Rovnici kontinuity pro nestlačitelné tekutiny (obr.4.5) můžeme tedy zapsat ve tvaru

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \ldots konst. \tag{4.15}$$



Obr. 4.5 Rovnice kontinuity pro nestlačitelné tekutiny

Kontrolní otázky

1. Jaký je vztah mezi objemovým a hmotnostním průtokem tekutiny?

2. Jaký důsledek má změna tlaku u stlačitelných kapalin?

Příklady

4.2.1 Uvažujte vodorovné potrubí, jehož průřez 30 $\mathrm{cm^2}$ *se zúží na* 20 $\mathrm{cm^2}$. *Určete rychlost proudění v užší části potrubí za předpokladu, že v širší části je rychlost proudění* 2,2 $\mathrm{m.s^{-1}}$ *a jedná se o nestlačitelnou kapalinu.*

Řešení:

Z rovnice kontinuity

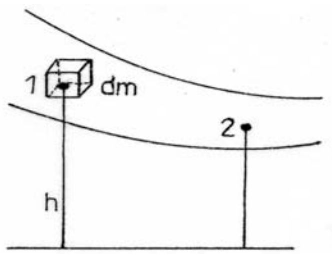
$S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2}$$

$$v_2 = \frac{30.10^{-4}\,\mathrm{m^2}.\,2{,}2\,\mathrm{m.s^{-1}}}{20.10^{-4}\,\mathrm{m^2}} = 3{,}3\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

5.3 Bernoulliova rovnice

Uvažujeme proudovou trubici, která mění svoji šířku a výšku nad vodorovnou rovinou. Z rovnice kontinuity vyplývá, že v užším průřezu teče kapalina rychleji, než v širším průřezu. To znamená, že mezi místy 1 a 2 má kapalina zrychlení. K dosažení zrychlení je nezbytná nenulová síla. Taková zrychlující síla může vzniknout jen tím, že v různých částech proudové trubice jsou v kapalině různé tlaky. Zrychlující síla bude mít směr toku, jestliže v místech, kde je trubice širší a rychlost menší, bude tlak větší než v užších částech trubice, v nichž je rychlost větší. Je tedy zřejmé, že s rostoucí rychlostí tlak v kapalině klesá.



Obr. 4.6 Bernoulliova rovnice

Bernoulliova rovnice vyjadřuje zákon zachování energie v ideální kapalině. Sledujeme-li v místě 1 (na obr.4.6) hmotnostní element dm, tak tento má jednak kinetickou energii dE_k = 1/2 dm v^2, potenciální tlakovou energii dE_p = p dV a potenciální tíhovou energii dE_t = dmgh. Součet těchto energií je pro libovolné místo proudové trubice konstantní

$$\mathrm{d}E_k + \mathrm{d}E_p + \mathrm{d}E_t = \frac{1}{2}\mathrm{d}m\,v^2 + p\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}m\,g\,h = \mathrm{konst}. \tag{4.16}$$

Po vydělení rovnice objemovým elementem dostáváme objemové hustoty kinetické a potenciální energie

$$\frac{1}{2}\rho\,v^2 + p + \rho\,g\,h = konst. \tag{4.17}$$

Vydělením rovnice (4.17) ρg převedeme Bernoulliovu rovnici na součet výšek

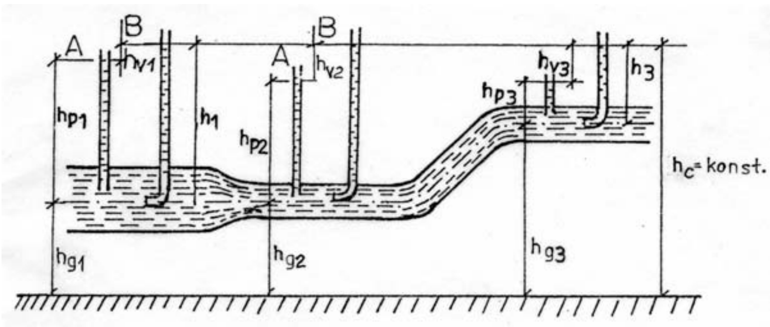
$$h_v + h_p + h_g = h_c = konst. \;, \tag{4.18}$$

kde

$$h_v = \frac{v^2}{2g} \quad \text{je rychlostní výška,} \tag{4.19}$$

$$h_p = \frac{p}{\rho g} \quad \text{je tlaková výška,} \tag{4.20}$$

h_g charakterizuje výšku nad smluvenou hladinou a h_c je celková výška, která je konstantní pro libovolný bod proudnice při ustáleném toku kapaliny.



Obr. 4.7 Změny tlaku v potrubí podle Bernoulliovy rovnice

Celková výška ve všech částech potrubí na (obr.4.7) je konstantní. Ve zúženém místě potrubí vzroste rychlost proudění, a tedy výška h_{v2}, ale klesne tlak, tedy poklesne h_{p2}. Ve třetí oblasti potrubí proudí kapalina při stejném průřezu stejně rychle jako ve druhé oblasti, takže $h_{v3} = h_{v2}$, ale poklesne statický tlak h_{p3} na úkor zvětšení h_{g3}.

Kontrolní otázky

1. Které druhy energie se uplatní v Bernoulliově rovnici?

2. Co je to rychlostní výška?

3. Co je to tlaková výška?

Příklady

4.3.1 Jakou rychlostí začne vytékat kapalina z nádoby s vnitřním tlakem 8.10^5 Pa *do prostředí o tlaku* 2.10^5 Pa. *Plocha hladiny v nádobě je* 96 cm^2. *Plocha výtokového otvoru je* 112 mm^2. *Hladina je ve výšce* 120 cm *nad výtokovým otvorem.*

Řešení:

$$h_1 \rho g + p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

$$S_1 v_1 = S_2 v_2,$$

$$S_1 = \frac{S_2 v_2}{v_1},$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) + h_1 \rho g}{\frac{1}{2} \rho \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right)}} = \sqrt{\frac{(8 - 2).10^5\ \mathrm{Pa} + 1{,}2\ \mathrm{m}.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}.9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}}{\frac{1}{2} 10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}} \left(1 - \frac{112.10^{-6}\ \mathrm{m^2}}{96.10^{-4}\ \mathrm{m^2}}\right)}} =$$

$= 40{,}3\ \mathrm{m.s^{-1}}$.

4.3.2 Vodorovnou trubici o průřezu 20 cm^3 *proudí voda rychlostí* 8 m.s^{-1}. *Její statický tlak je* 0,108 MPa. *Jaký statický tlak a jakou rychlost má voda v rozšířeném místě trubice o průřezu* 41,8 cm^2?

Řešení

$S_1 v_1 = S_2 v_2$

$$v = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{20.10^{-4}\,\mathrm{m}^2.8\,\mathrm{m.s}^{-1}}{41{,}8.10^{-4}\,\mathrm{m}^2} = 3{,}83\,\mathrm{m.s}^{-1}$$

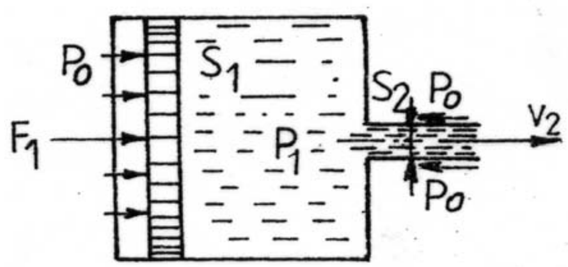
$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2$$

$$p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_1^2 - v_2^2) + p_1 = \frac{1}{2}1000\,\mathrm{kg.m}^{-3}\left[(8\mathrm{m.s}^{-1})^2 - (3{,}83\,\mathrm{m.s}^{-1})^2\right] + 0{,}108.10^6\ \mathrm{Pa} =$$
$$= 0{,}133\,\mathrm{MPa}$$

4.3.3 Jak vysoko je výška hladiny nad otvorem, z něhož vytéká voda rychlostí 4 m.s^{-1} *do druhé nádoby? Tlak uvnitř první nádoby je* 1,2.10^5 Pa, *tlak uvnitř druhé nádoby je* 2.10^5 Pa. *Plocha hladiny v první nádobě je* 120 cm^2, *plocha výtokového otvoru je* 4 cm^2. *[h* = 8,97 m*]*

5.4 Výtok kapalin

Budeme hledat výtokovou rychlost ideální kapaliny o hustotě ρ otvorem o ploše S_2 za předpokladu, že v nádobě o průměru S_1 je tlak p_1 vyvolaný silou F_1 působící na píst (obr.4.8).



Obr. 4.8 Výtok kapaliny za přetlaku

V nádobě je ve shodě s Pascalovým zákonem a při zanedbání tíže kapaliny tlak $p_1 = F_1/S_1$ zvětšený o barometrický tlak p_o ovzduší. Po otevření otvoru S_2 bude kapalina vytékat rychlostí v_2. Bernoulliova rovnice tedy bude mít tvar

$$p_o + p_1 = p_o + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad , \qquad (4.21)$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\, p_1}{\rho}} \quad . \qquad (4.22)$$

Obdobně zjistíme výtokovou rychlost kapaliny, která vytéká z jedné nádoby o tlaku p_1 do druhé nádoby o tlaku p_2

$$v_2 = \sqrt{\frac{2\,(p_1 - p_2)}{\rho}} . \qquad (4.23)$$

Vztah (4.22) a (4.23) platí potud, pokud otvor $S_2 << S_1$(zhruba $S_2/S_1 \leq 0{,}1$), jinak je nezbytné též přihlížet k rychlosti v_1 kapaliny uvnitř prvé nádoby. Výtoková rychlost by tak byla

$$v_2 = \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho} + v_1^2} . \qquad (4.24)$$

Při výtoku kapaliny pouze za působení hydrostatického tlaku malým otvorem v široké nádobě (rychlost klesání je zanedbatelná), dostáváme výtokovou rychlost z (4.22) po dosazení za tlak $p_1 = h\,\rho\,g$ hodnotu hydrostatického tlaku

$$v = \sqrt{2\,g\,h} \quad . \qquad (4.25)$$

To je Torricelliho vztah, podle něhož rychlost, kterou vytéká kapalina otvorem v hloubce h pod hladinou je rovna rychlosti, kterou nabude hmotný bod volně padající v prostředí bez odporu z téže výšky.

Jestliže má výtokový odpor plochu S, pak je objemové množství, které vyteče tímto otvorem teoreticky rovno $Q_v = S\, v$. Skutečné množství je však menší, takže můžeme psát

$$Q_v = S\, v\, \varphi \quad , \qquad (4.26)$$

kde φ je **rychlostní součinitel**. Je to bezrozměrná veličina s hodnotou menší než 1 (např. pro vodu je φ = 0,95 až 0,99). Velikost φ závisí na druhu kapaliny, teplotě a tvaru otvoru.

Kontrolní otázky

1. Na čem závisí rychlost výtoku kapaliny z uzavřené nádoby?

2. Jak se určí výtoková rychlost pouze za působení hydrostatického tlaku?

Příklady

4.4.1 Z hasičské stříkačky vystřikuje voda pod statickým tlakem 0,4 MPa. *Plocha průřezu výtokové trysky je* 3,5 cm^2. *Vypočítejte, jakou rychlostí voda vystřikuje a kolik litrů vody vyteče za* 1 *minutu.*

Řešení

$$p = p_A + \frac{1}{2}\rho v^2$$

$$v = \sqrt{\frac{2(p - p_A)}{\rho}} = \sqrt{\frac{2(0{,}4.10^6\ \mathrm{Pa} - 0{,}1.10^6\ \mathrm{Pa})}{1000\ \mathrm{kg.m^{-3}}}} = 24{,}5\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

$$Q = Sv$$

$$V = Qt = Svt = 3{,}5.10^{-4}\,\mathrm{m}^2.24{,}5\ \mathrm{m.s^{-1}}.60\,s = 5{,}145\,\mathrm{m}^3 = 5145\ \mathrm{l}$$

4.4.2 Do nádoby přitéká voda rovnoměrným proudem, přičemž za 1s *přiteče* 150 ml *vody. Ve dně nádoby je otvor o ploše* 0,5 cm^2. *V jaké výšce se ustálí voda v nádobě, je-li rychlostní součinitel* 0,61*?*

Řešení

$$q = Sv\varphi$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

$$h = \frac{Q^2}{2gS^2\varphi^2} = \frac{(1{,}5.10^{-4}\ \mathrm{m^3 s^{-1}})^2}{2.9{,}81\mathrm{m.s^{-2}}(0{,}5.10^{-4}\mathrm{m^2})^2.0{,}61^2} = 1{,}23\,\mathrm{m}$$

4.4.3 Ve stěně nádoby s vodou jsou nad sebou dva otvory ve výškách h_1 a h_2 od dna (obr.4.9). Jak vysoko musí být voda v nádobě, aby z obou otvorů vytékala na vodorovnou rovinu v úrovni dna do téhož místa? Výšku vody nádobě označte h.

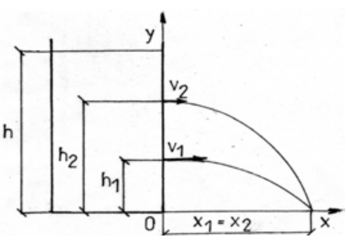
Řešení:

Výtoková rychlost z dolního otvoru se rovná

$v_1 = \sqrt{2\,g\,(h - h_1)}$.

Výtoková rychlost z horního tvoru se rovná

$v_2 = \sqrt{2\,g\,(h - h_2)}$.



Obr. 4.9 Stěna nádoby s vodou

Ve vodorovném směru se jedná o rovnoměrný přímočarý pohyb ve směru osy x

$x = v\,t$

Ve svislém směru se jedná o volný pád z výšky h ve směru osy y

$$y = h - \frac{g}{2}\,t^2$$

Dosazením za $t = \dfrac{x}{v}$ *dostáváme pro souřadnici y*

$$y = h - \frac{g}{2}\,\frac{x^2}{v^2}$$

V místě dopadu je $y = 0$ *a* $x_1 = x_2$

Pro jednotlivé paprsky vody můžeme psát

$$0 = h_1 - \frac{g}{2}\,\frac{x_1^2}{v_1^2}\;, \qquad 0 = h_2 - \frac{g}{2}\,\frac{x_2^2}{v_2^2}\,.$$

Neboť platí, že $x_1 = x_2$ *a tedy i* $x_1^2 = x_2^2$*, pak*

$$x_1^2 = \frac{2\,h_1\,v_1^2}{g} = \frac{2\,h_2\,v_2^2}{g} = x_2^2$$

$$h_1\,v_1^2 = h_2\,v_2^2$$

$$h_1\,2\,g\,(h - h_1) = h_2\,2\,g\,(h - h_2)$$

$$h_1\,h - h_1^2 = h_2\,h - h_2^2$$

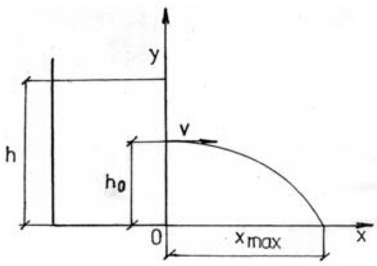
$$h = \frac{h_1^2 - h_2^2}{h_1 - h_2} = h_1 + h_2$$

Podmínky budou splněny, když celková výška kapaliny v nádobě je $h = h_1 + h_2$.

4.4.4 Na vodorovném stole je nádoba naplněná vodou do výšky h (obr. 4.10). Vypočítejte, jak vysoko nade dnem nádoby musí být otvor, aby vytékající voda vystřikovala do největší vzdálenosti? Jaká je tato vzdálenost? Jakou rychlostí opouští voda nádobu?

Řešení

$$v = \sqrt{2g(h-h_0)} = \sqrt{2g(h-y)}$$



Obr. 4.10

$$x = vt$$

$$0 = h_0 - \frac{1}{2}gt^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2h_0}{g}} = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[y(h-y)\right] = 0$$

$$y = \frac{h}{2}$$

$$v = \sqrt{gh}$$

4.4.5 Vypočtěte výtokovou rychlost z nádoby, v níž je hladina nad malým otvorem ve výšce 2,5 m. *[* 7m.s^{-1}*]*

4.4.6 Kolik litrů kapaliny musíme dodávat každou minutu do zcela naplněné nádrže vysoké 3 m*, která má ve dně otvor o průměru* 2 cm*, aby se hladina v nádrži držela ve stejné výši? Rychlostní součinitel n* = 0,95. *[V* = 137,4 l*]*

4.4.7 Jak vysoko byla hladina vody v nádobě stojící na stole vysokém 1 m*, když proud vody vytékající z otvoru ve svislé stěně u dna dopadl na podlahu ve vzdálenosti* 50 cm *od kolmice spuštěné z roviny otvoru na podlahu? [h* = 0,0625 m*]*

4.4.8 Jak vysoko vystoupí voda z vodotrysku, jestliže z něj vystřikuje pod statickým tlakem 0,2 MPa? *[*h_{max} = 10,2 m*]*

5.5. Pitotova a Venturiho trubice

V přímé trubici, která je umístěna kolmo na směr proudění kapaliny ve vodovodním potrubí, vystoupí kapalina do takové výšky h_p, že hydrostatický tlak způsobený sloupcem této kapaliny

$$p_h = h_p \rho g \tag{4.27}$$

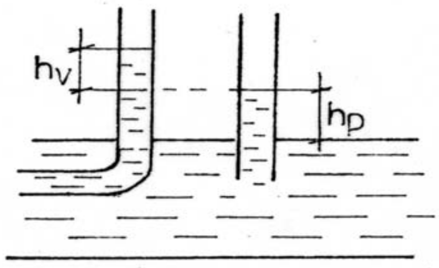
je právě roven statickému tlaku p_{st} uvnitř potrubí.

Zahnutá Pitotova trubice (obr.4.11) umožňuje kromě výše uvedeného statického tlaku registrovat i dynamický tlak p_d = 1/2 ρ v^2. Z rozdílu výšek v obou trubicích h_v můžeme tedy vypočítat rychlost proudění kapaliny v potrubí

$$v = \sqrt{2g\,(h_v - h_p)}. \tag{4.28}$$

Pro měření objemového průtoku se často používá Venturiho trubice (obr.4.12). Pro průřezy S_1 a S_2 platí rovnice kontinuity

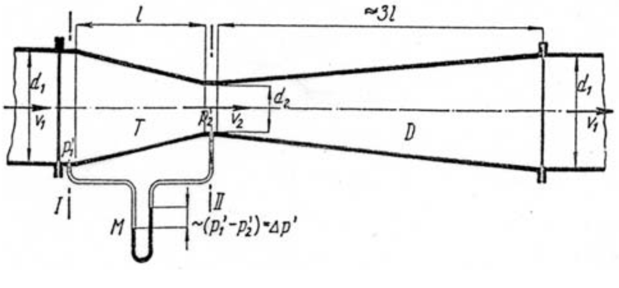
$$S_1\,v_1 = S_2\,v_2 \tag{4.29}$$



Obr. 4.11 Pitotova trubice

a tedy s přihlédnutím k Bernoulliově rovnici pro potrubí ve stejné výšce

$$\frac{1}{2}\rho\,v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\,v_2^2 + p_2 \tag{4.30}$$



Obr. 4.12 Venturiho trubice

dostáváme pro rychlost v_1

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,(p_2 - p_1)}{\rho\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)}}. \tag{4.31}$$

Stačí tedy ocejchovat rozdíl výšek v U trubici v rychlostních jednotkách. Při znalosti průřezů lze též přímo odečítat objemové průtoky

$$Q_v = S_1 \,.\, v_1. \tag{4.32}$$

Kontrolní otázky

1. K čemu slouží Pitotova trubice?

2. Co lze měřit Venturiho trubicí?

Příklady

4.5.1 Vypočítejte rychlosti proudění vody, znáte-li průměry Venturiho trubice, které jsou 3 cm *a* 1,5 cm *a naměřenou hodnotu rozdílu výšek hladin v U trubic* 4 cm.

Řešení:

$$\frac{1}{2}\rho\, v_1^2 + p_1 = \frac{1}{2}\rho\, v_2^2 + p_2$$

$$S_1\, v_1 = S_2\, v_2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,.\,\Delta p}{\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right)\rho}}$$

$$\Delta p = p_2 - p_1 = -\Delta h\, \rho\, g$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2\,\Delta h\, g}{\left(1 - \frac{\mathrm{d}_1^2}{\mathrm{d}_2^2}\right)}}$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{2.(-4.10^{-2}\,\mathrm{m}).9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}}{1-\left(\dfrac{3.10^{-2}\,\mathrm{m}}{1{,}5.10^{-2}\,\mathrm{m}}\right)^2}} = 0{,}26\ \mathrm{m.s^{-1}}$$

$$v_2 = \frac{S_1 v_1}{S_2} = \frac{\mathrm{d}_1^2 v_1}{\mathrm{d}_2^2} = \frac{(0{,}03\,\mathrm{m})^2.0{,}26\,\mathrm{m.s^{-1}}}{(0{,}015\,\mathrm{m})^2} = 1{,}04\,\mathrm{m.s^{-1}}$$

4.5.2 Rozdíl tlaků v hlavním potrubí a ve zúžené části Venturiho trubice je 0,1 MPa. *Příčné průřezy hlavního potrubí a zúžené části jsou* 0,1 m² *a* 0,05 m². *Kolik krychlových metrů vody proteče potrubím za* 1s? *[Q* = 0,8165 $\mathrm{m^3.s^{-1}}$*]*

4.5.3 Jakou rychlostí proudí v potrubí voda, ukazuje-li Pitotova trubice rozdíl hladin 40 cm *a hydrostatický tlak* 500 Pa*? [v* = 2,62 $\mathrm{m.s^{-1}}$*]*

5.6 Věta o hybnosti kapalin

Všude tam, kde tok mění rychlost, ať už co do velikosti či směru, vznikají dynamické účinky proudící kapaliny. Je-li rychlost proudění na počátku ohybu $\vec{v}_1$ a za ohybem $\vec{v}_2$, dojde ke změně rychlosti

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad . \tag{4.33}$$

Jde-li o množství tekutiny Δm, dojde ke změně hybnosti

$$\Delta \vec{p} = \Delta m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \quad . \tag{4.34}$$

K tomu je zapotřebí impulsu síly

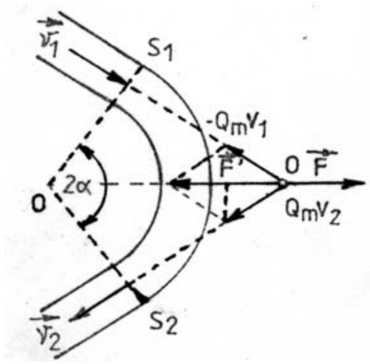
$$\vec{I} = \vec{F}'\,\Delta t = \Delta m\,(\vec{v}_2 - \vec{v}_1). \tag{4.35}$$

Na tekutinu v ohybu působí tedy síla

$$\vec{F}' = \frac{\Delta m}{\Delta t}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = Q_m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)\,. \tag{4.36}$$

To je věta o hybnosti kapaliny. Stejně velikou silou opačného směru $\vec{F}$ působí kapalina na těleso, které způsobilo její změnu hybnosti.

Má-li trubice na obr.4.13 mezi řezy S_1 a S_2 všude stejný průměr a kapalina jí proudí stálou rychlostí, lze celou trubici považovat za proudové vlákno a aplikovat na ni větu o hybnosti.



Obr. 4.13 Věta o hybnosti kapalin

Časová změna hybnosti vytékající kapaliny je stejně velká, ale má jiný směr. Svírá-li směr řezů úhel 2α, svírají spolu oba stejně velké

vektory hybnosti úhel $2(90^{\circ} - \alpha)$. Kapalina tak tlačí v zahnuté části trubice silou

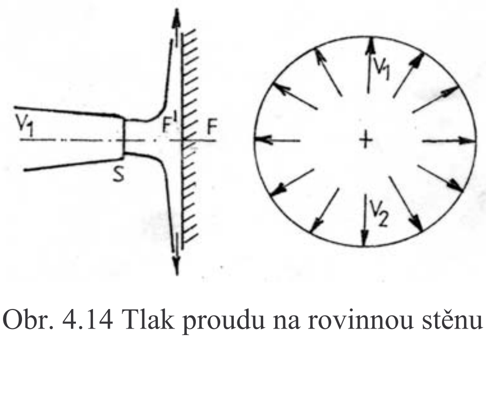
$$F = 2\,Q_m\,v \sin\alpha \quad . \tag{4.37}$$

Uvažujeme-li $Q_m = \rho S v$, pak dostáváme

$$F = 2\rho\,S\,v^2 \sin\alpha . \tag{4.38}$$

Kdyby kapalina byla v trubici v klidu, byl by tento tlak na stěny $F = 0$ (protože $v = 0$). Úkaz můžeme pozorovat u hadice, v níž je voda pod tlakem. Pokud je ústí zavřeno, zakřivená hadice zůstává v klidu. Jakmile otevřeme výtokový otvor, hadice se začne pohybovat. Sebevětší statický tlak nepohne zakřivenou trubicí kruhového průřezu.

Při dopadu kapaliny na rovnou stěnu (obr.4.14) se proud rovnoměrně rozptýlí na všechny strany (pokud zanedbáme tíži).



Obr. 4.14 Tlak proudu na rovinnou stěnu

Vektorový součet hybností všech odtékajících částic je tedy roven nule, a proto také výsledná odtoková hybnost kapaliny je rovna nule, $Q_m\ \vec{v}_2 = 0$. Síla, kterou proud kapaliny působí na stěnu tedy je

$$\vec{F} = Q_m\,\vec{v}_1 \quad . \tag{4.39}$$

Kontrolní otázky

1. *Jak velkou silou působí kapalina na těleso, které způsobilo její změnu?*

2. *Popište situaci při dopadu kapaliny na rovnou stěnu.*

Příklady

4.6.1 Vypočítejte sílu, kterou působí proudící voda na ohnutou část trubice, jejíž dvě ramena svírají úhel 120°. *Průměr trubice je* 2,6 cm. *Rychlost proudící kapaliny je* 9,2 m.s^{-1}.

Řešení:

$$F = 2\rho S v^2 \sin\frac{\alpha}{2} = 2.10^3 \text{ kg.m}^{-3} . \pi (1{,}3.10^{-2} \text{ m})^2 . (9{,}2 \text{ m.s}^{-1})^{-2} . \sin 60° = 77{,}8 \text{ N}$$

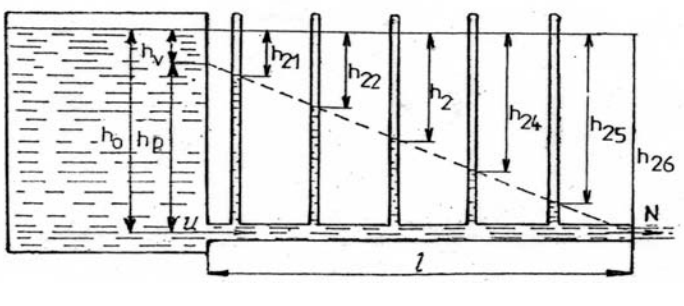
4.6.2 Jak velkou silou namáhá kapalina potrubí v ohybu, jestliže rychlost proudění před ohybem je 2,6 m.s^{-1} *a za ohybem* 2,4 m.s^{-1}*? Potrubím proteče za sekundu* 4,6 m^3. *[F* = 920 N*]*

4.6.3 Kapalina o hustotě 850 kg.m^{-3} *protéká rychlostí* 0,7 m.s^{-1} *trubicí. Voda působí na ohnutou část trubice, jejíž ramena svírají úhel* 60°, *silou* 19,6 N. *Jaká je světlost trubice? [d* = 60 mm*]*

5.7 Viskozita

Pokles tlaku způsobený vnitřním třením kapaliny

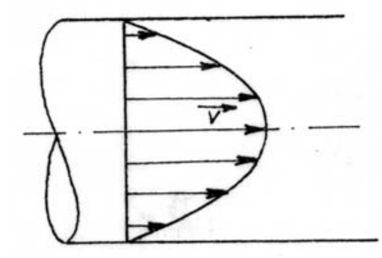
Doposud jsme uvažovali o proudění dokonalých tekutin bez vnitřního tření. To znamená např., že při proudění kapalin vodorovnou trubicí stálého průřezu by měl být podél celé trubice



Obr. 4.15 Pokles tlaku způsobený vnitřním třením kapaliny

stejný tlak. Pokusy však ukazují, že tlak ve směru toku klesá. Podle Bernoulliovy rovnice pro ideální kapalinu by výšky kapaliny ve všech tlakoměrných trubicích na obr.4.15 měly být stejné. Ve skutečnosti však pozorujeme pokles tlaku v závislosti na vzdálenosti od nádrže. Tekutina vytéká rychlostí v odpovídající výšce h_v místo h_o.

V dynamice tekutin nemůžeme zanedbat síly, jimiž na sebe působí jednotlivé částice tekutin. U skutečných kapalin pozorujeme, že se kinetická energie proudění, tedy uspořádaného pohybu molekul zčásti mění v kinetickou energii neuspořádaného pohybu molekul, tedy v teplo. Při proudění reálné tekutiny v potrubí krajní vrstva tekutiny zůstává v klidu. Se vzdáleností od stěny roste rychlost od nuly až po maximum v ose trubice (obr.4.16).



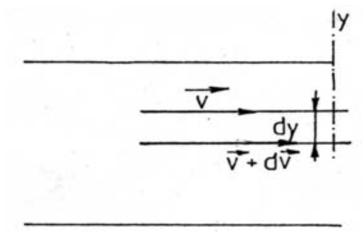
Obr. 4.16 Rozložení rychlostí laminárního proudění ve válcovém potrubí

Třením vzniká mezi sousedními vrstvami tečné napětí τ, které je při ustáleném laminárním proudění úměrné gradientu rychlosti podle Newtonovy rovnice (obr.4.17)

$$\tau = \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \quad . \tag{4.40}$$

Součinitel úměrnosti η 2 v této rovnici se nazývá **dynamická viskozita**

$$\eta = \tau \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right)^{-1} \tag{4.41}$$



Obr. 4.17 Gradient rychlosti u laminárního proudění

Jednotkou dynamické viskozity je Pa.s. Převrácenou hodnotu dynamické viskozity nazýváme **tekutost** φ

$$\varphi = \frac{1}{\eta} \quad . \tag{4.42}$$

Podíl dynamické viskozity a hustoty nazýváme kinematickou viskozitou ν

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad . \tag{4.43}$$

Jednotkou kinematické viskozity je $m^2.s^{-1}$. Viskozita kapalin závisí na teplotě a tlaku. S rostoucí teplotou viskozita kapalin klesá. S rostoucím tlakem viskozita kapalin vzrůstá.

Volba viskozity použitého maziva se řídí velikostí tlaku ve stykové ploše, rychlostí otáčení a teplotou mazaného místa. Při velkých tlacích, malých rychlostech a vyšších teplotách volíme maziva s velkou viskozitou.

Kontrolní otázky

1. Co vzniká třením mezi sousedními vrstvami při proudění kapaliny?

2. Co je jednotkou dynamické viskozity?

3. Jak závisí viskozita na teplotě?

5.8 Proudění tekutin ve válcovém potrubí

Určíme rozložení rychlostí ve válcové trubici o poloměru r. Vytkneme souosý válec tekutiny o délce Δx a poloměru y. Tření plochy $A = 2\pi y\,\Delta x$ pláště válce o vnější vrstvu tekutiny vyvozuje proti jeho pohybu odporovou sílu

$$F_t = 2\pi\, y \Delta x \tau = -2\pi\, y \Delta x \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}. \qquad (4.44)$$

Mezi základnami válce je tlakový rozdíl Δp a tlaková síla

$$F_p = \pi\, y^2 \Delta\, p. \qquad (4.45)$$

Tyto síly jsou v rovnováze

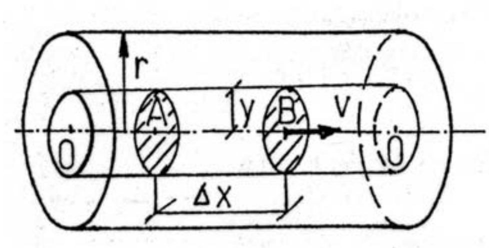
$$-\,2\pi y \Delta x \eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \pi y^2 \Delta p\,, \qquad (4.46)$$

$$\mathrm{d}v = -\frac{1}{2\eta}\frac{\Delta p}{\Delta x}\, y\, \mathrm{d}y. \qquad (4.47)$$

Po integraci a určení integrační konstanty z podmínky $y = r$, $v = 0$ dostaneme

$$v = \frac{1}{4\eta}\frac{\Delta p}{\Delta x}(r^2 - y^2)\,. \qquad (4.48)$$

Rovnice (4.48) vyjadřuje parabolické rozložení rychlostí laminárního proudění tekutiny ve válcové trubici (viz obr.4.18).



Obr. 4.18 Laminární proudění ve válcovém potrubí

Mezikružím o plošném obsahu dS = 2π y dy projde za 1 s objemový průtok

$$\mathrm{d}Q_v = v\,\mathrm{d}S = \frac{\pi}{2\eta}\frac{\Delta p}{\Delta x}(r^2 - y^2)\,y\,\mathrm{d}\,y. \tag{4.49}$$

Integrací v mezích y = v až r dostáváme celkový objemový průtok celým průřezem trubice

$$Q_v = \frac{\pi\, r^4}{8\eta}\frac{\Delta\, p}{\Delta\, x}. \tag{4.50}$$

Vztah (4.50) je znám jako **Poisenilleův zákon**. Objemový průtok při laminárním proudění je úměrný čtvrté mocnině poloměru trubice, nepřímo úměrný viskozitě a přímo úměrný tlakovému spádu.

Kontrolní otázky

?

1. Jaké síly porovnáváme při analýze proudění tekutiny ve válcovém potrubí?

2. Co popisuje Poiseuillův zákon?

5.9 Obtékání těles tekutinou

Mírou odporu proti průtoku tekutiny potrubím je **tlakový spád** *Δp/Δx*

$$\frac{\Delta\, p}{\Delta\, x} = \frac{8\eta}{r^2}\frac{Q_v}{S}, \tag{4.51}$$

kde S je plocha příčného řezu trubice, nebo odporová síla F_r

$$F_r = \Delta\, p\, S = 8\pi\,\eta\,\Delta\, x\,\bar{v}, \tag{4.52}$$

kde $\bar{v}$ je střední průtočná rychlost

$$\bar{v} = \frac{Q_v}{S} \quad . \tag{4.53}$$

Při laminárním proudění je $\Delta p/\Delta x$ i F_r úměrné průtočné rychlosti. Obdobně je tomu při laminárním obtékání těles. Na kouli o poloměru r, která se pohybuje rychlostí v v neohraničeném tekutém prostředí s dynamickou viskozitou η působí podle Stokese odporová síla

$$F_r = 6\pi\,\eta\, v\, r \quad . \tag{4.54}$$

Kontrolní otázky

1. Co je mírou odporu proti průtoku tekutiny potrubím?

2. Na čem závisí Stokesova síla odporu?

Příklady

4.9.1 Vodní kapka padá v plynu o dynamické viskozitě 2.10^{-5} Pa.s *mezní rychlostí* 4,9 $\mathrm{m.s^{-1}}$. *Jaký je poloměr kuličky? Hustota plynu je* 1,29 $\mathrm{kg.m^{-3}}$.

Řešení:

Na kuličku působí tři síly, které jsou v případě pohybu kuličky s konstantní rychlostí v rovnováze. Gravitační síla $G = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{H_2O}\, g$, *vztlaková síla* $F_{vz} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_{vzd}\, g$ *a odpor prostředí:* $F_r = 6\,\pi\,\eta\, r\, v$.

Při rovnováze platí: $\frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_{H_2O}\, g - \frac{4}{3}\pi\, r^3 \rho_{vzd}\, g - 6\,\pi\,\eta\, r\,.\,v = 0$

$$r = \sqrt{\frac{9\,\eta\, v}{2\, g\,(\rho_{H_2O} - \rho_{vzd})}} = \sqrt{\frac{9\,.\,2\,.10^{-5}\ \mathrm{Pa.s}\,.\,4{,}9\ \mathrm{m.s^{-1}}}{2\,.\,9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}\,(1000 - 1{,}29)\,.10^3\ \mathrm{kg.m^{-3}}}} = 6{,}71\ \mu m.\ .$$

4.9.2 Ocelová kulička o poloměru 2 mm *volně klesá v oleji o dynamické viskozitě* 2,2 Pa.s *a hustotě* 0,9 $\mathrm{g.cm^{-3}}$. *Určete konečnou rychlost, jakou bude kulička v oleji klesat. [v* = 0,0274 $\mathrm{m.s^{-1}}$*]*

4.9.3 Určete dynamickou a kinematickou viskozitu oleje o hustotě 960 $\mathrm{kg.m^{-3}}$, *jestliže kulička o průměru* 6 mm *a hmotnosti* 280 mg *v něm padá rovnoměrným pohybem po dráze* 60 cm *po dobu* 20 s. *[*$\eta = 0{,}892\ Pa.s,\ \nu = 9{,}29.10^{-4}\ \mathrm{m^2.s^{-1}}$*]*

5.10 Autotest

1. Jak je definován hmotnostní průtok Q_m?
2. Uveďte obecný vztah pro rovnici kontinuity při ustáleném proudění.
3. Jak je definován objemový průtok Q_u?
4. V zúžené části potrubí teče kapalina rychleji nebo pomaleji. Uveď zdůvodnění pro své tvrzení.
5. V zúžené části potrubí je vyšší nebo nižší tlak? Uveď zdůvodnění pro své tvrzení.
6. Které druhy energie se uplatní v Bernoulliově rovnici?
7. Co lze určit pomocí Pitotovy trubice?
8. Co lze určit pomocí Venturiho trubice?
9. Co popisuje veličina viskozita?
10. Jaká je jednotka dynamické viskozity η?
11. Jaká je jednotka kimatické viskozity ν ?
12. Na čem závisí odporová síla při proudění tekutiny?

5.11 Klíč

1. $Q_m = \dfrac{dm}{dt}$
2. $\rho \vec{v}\, d\vec{S} = 0$
3. $Q_v = \dfrac{dv}{dt} = Sv$
4. Rychleji. (rovnice kontinuity).
5. Tlak je nižší. (Bernoulliova rovnice).
6. Kinetická energie, potenciální tlaková a potenciální tíhová energie
7. Z rozdílu výšek můžeme určit rychlost proudění v potrubí.
8. Lze určit rychlost proudění a objemové průtoky
9. Viskozita je mírou tření mezi sousedními vrstvami při proudění kapaliny
10. Pa.s
11. $m^2.s^{-1}$
12. Na dynamické viskozitě η, rychlosti proudění v a rozměrech tělesa.

5.12 Závěr - Shrnutí

Pohyb tekutin popisuj rovnice kontinuity a Bernoulliova rovnice. Rovnice kontinuity vychází ze zákona zachování hmotnosti a popisuje hmotnostní a objemové průtoky a lze z ní vypočítat rychlost proudění v nerovnoměrném potrubí. Bernoulliova rovnice vychází ze zákona zachování energie a umožňuje kromě hydrostatického tlaku v potrubí určovat též rychlost proudění a dynamický tlak.

Z věty o hybnosti kapalin můžeme počítat sílu která působí na ohnutí potrubí. U některých tekutin musíme uvažovat i tření které vzniká při pohybu mezi jednotlivými vrstvami média. Toto tření je charakterizováno dynamickou a kinematickou viskozitou.

6 Studijní prameny

6.1 Seznam použité literatury

[1] Horák Z., Krupka F., Šindelář V. *Technická fyzika.* SNTL Praha, 1981.

[2] Slavík J. a kol. *Základy fyziky I*. „SAV Praha, 1962.

[3] Javorskij B., Detlaf A. *Příručka fyziky*. SVTL Bratislava, 1965.

[4] Bělař A. a kol. *Fyzika pro učitele*. SNTL Praha, 1968.

[5] Binko J., Kašpar I., Tomášek Z. *Fyzika I*. VUT Brno, 1977.

[6] Hajko V., Daniel-Szabó J. *Základy fyziky*. VEDA-SAV Bratislava, 1980.

[7] Kvasnica J. *Fyzika*. SNTL Praha, 1980.

[8] Šikula J., Vašina P. *Fyzika I*. SNTL Praha, 1981.

[9] Krempaský J. *Fyzika*. Alfa Bratislava, 1982.

[10] Vachek J. a kol. *Fyzika pro I.roč. gymnázia*, SNPL Praha, 1984.

[11] Šikula J., Liška M., Vašina P. *Fyzika I*. SNTL Praha, 1987.

[12] Feynman R.P. *Feynmanove prednášky z fyziky*. Alfa Bratislava, 1989.

6.2 Seznam doplňkové studijní literatury

[1] Holliday, D. Resnik, R. Walker, J. *Fyzika*, Vutium 2000 Brno

[2] Chobola, Z. Juránková, V. Mechanika deformovatelných těles. CERM Brno 2000