VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

FAKULTA STAVEBNÍ

Mgr. Jan Martinek, Ph.D.

BB01 – Fyzika 1

Modul M03

MECHANIKA TUHÉHO TĚLESA

STUDIJNÍ OPORY PRO STUDIJNÍ PROGRAMY

S KOMBINOVANOU FORMOU STUDIA

Obsah

1 Úvod

Tento učební text má název *Mechanika tuhého tělesa*. Mechanikou[1] rozumíme popis souvislostí mezi pohybem a silami. *Tuhé těleso* je pro nás prozatím nejasný pojem, který bude upřesněn později. Již nyní ale lze tušit, že půjde o náhradu za běžné předměty, které nás obklopují.

Veškeré chování hmotných bodů nebo těles budeme předpovídat na základě Newtonových zákonů, přesněji řečeno na základě jejich moderního pojetí:

1. **Jestliže na částici nepůsobí žádná celková síla, pak je možné vybrat takovou množinu vztažných soustav, zvaných inerciální vztažné soustavy, vzhledem ke kterým se částice pohybuje beze změny rychlosti.**

2. **Vzhledem k inerciální vztažné soustavě platí, že celková síla působící na částici je úměrná časové změně hybnosti. Hybnost je součin hmotnosti a rychlosti.**

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v})}{\mathrm{d}t} \tag{1}$$

   Jestliže se hmotnost částice nebude s časem měnit (což je velmi obvyklý případ), pak můžeme druhý Newtonův zákon dále upravit na

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a} \tag{2}$$

3. **Jestliže částice A působí silou na částici B, pak B současně působí na částici A stejně velkou silou opačně orientovanou.**

   Silnější forma tohoto zákona definuje, že obě síly působí podél stejné přímky.

Výše uvedené Newtonovy zákony obsahují všechny informace potřebné k vyřešení jakéhokoli problému, který se týká klasické mechaniky. Z toho plyne, že není zapotřebí nic dalšího dodávat, protože vše již bylo právě řečeno. Takto ale může k problému přistupovat počítač – dostane obrovské množství rovnic, vyřeší je a výsledkem bude poloha N hmotných bodů pro zadaný čas nebo M vektorů představujících působící síly…

Člověk sice nevládne tak gigantickou výpočetní silou, ale zato je to tvor kreativní a dokáže najít cesty, jak si vystačit s daleko menším množstvím

[1] z řeckého $\mu\eta\chi\alpha\nu\iota\kappa\eta$[mechanike] = stroj, nástroj

operací – dokáže problém zjednodušit. Proto se z Newtonových zákonů vyvodily dílčí závěry pro některé typické situace, a tak je možné si mnoho práce ušetřit jak při řešení problémů, tak i při jejich formulaci. Tato výhoda ale není zadarmo. Je nutné se naučit řadu dalších pojmů a pravidel a na základě *zkušenosti s počítáním příkladů* si vybírat vhodnou cestu. V Newtonových zákonech není obsaženo, co je zákon zachování hybnosti či momentu hybnosti, co je těžiště tělesa nebo moment setrvačnosti, nikde se nemluví o otáčení tělesa ani o jeho rovnováze. Tyto pojmy a jejich vlastnosti nejsou nutné pro sestavení základních zákonů, ale jsou velmi užitečné pro názornost, pochopení složitějších soustav a pro jejich slovní popis.

V následujícím textu je popsáno chování hmotných bodů za rozličných okolností. Abychom mohli mluvit o poloze hmotného bodu, jeho rychlosti, zrychlení a dalších charakteristikách, je nutné si nejprve zvolit souřadnou soustavu. V celém učebním textu se budeme držet zásady, že zvolená souřadná soustava bude *inerciální*.

K volbě inerciální vztažné soustavy nás vede jediný důvod – snaha o jednoduchost. V soustavách, které nejsou inerciální, platí fyzikální zákony samozřejmě také, ale jejich formulace je buď složitější nebo vyžaduje hlubší znalosti pro pochopení.

1.1 Cíle

Tento studijní text je určen pro posluchače Stavební fakulty Vysokého učení technického v Brně a má sloužit jako jeden z učebních textů pro studium aplikované fyziky. Učební text je pokusem o kompromis mezi dvěma způsoby, jak přistupovat k fyzice. Fyzika je krásná věda s bohatou historií, která dokáže nalézt mnoho zajímavých souvislostí a předpovědět řadu jevů. Každý logický krok a každá nově odvozená rovnice popisuje situaci, kterou najdeme v běžném životě a v praxi.

Na druhou stranu, při učení zabere méně času nudná a suchopárná fyzika, která je zdeformovaná na množství definic, mnohdy zbytečných pojmů, pouček a vzorců, jejichž smysl a použitelnost zůstává kdesi na okraji zájmu.

Cílem je podat základní myšlenkové postupy, které na sebe navazují a vedou od Newtonových zákonů až po popis chování těles. V textu najdete řadu řešených i neřešených příkladů a kontrolních otázek.

1.2 Požadované znalosti

Doufejme, že se student nenechá zastrašit matematickou symbolikou, která zahrnuje vektory[2], sumy, derivace a integrály. Je potřeba zvládat vektorové operace jako vektorový součet, vektorový součin, skalární součin a násobení vektoru skalárem.

Z fyziky by měl student znát definice rychlosti a zrychlení a mít základní představy o pohybu hmotného bodu a o způsobu, jakým se pohyb vyjadřuje

[2] V běžném, ručně psaném textu se vektory obvykle označují šipkou, zatímco v tištěném textu se pro vektory používá bezpatkové skloněné tučné písmo. Například rovnice $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ obsahuje vektory $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{a}$, zatímco m je skalár.

a popisuje.

1.3 Doba potřebná ke studiu

10 hodin

1.4 Klíčová slova

Newtonovy zákony, vnitřní a vnější síly, první impulsová věta, zákon zachování hybnosti, celková hmotnost soustavy, celková hybnost soustavy, střed hmotnosti soustavy, celková rychlost soustavy, moment hybnosti, moment síly, druhá impulsová věta, tuhé těleso, těžiště, translace, rotace, moment setrvačnosti, Steinerova věta, práce při otáčení tuhého tělesa

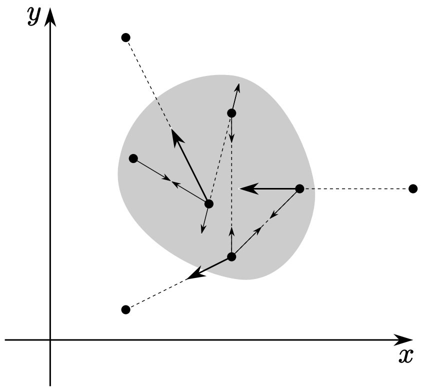
1.5 Přehled použitých symbolů

Symbol	jednotka	popis
$\boldsymbol{r}$	m	polohový vektor (souřadnice bodu)
$\boldsymbol{v}$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	rychlost
$\boldsymbol{a}$	$\mathrm{m\,s^{-2}}$	zrychlení
$\boldsymbol{p}$	$\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$	hybnost
$\boldsymbol{F}$	$\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$	síla
$\boldsymbol{r}^*$	m	poloha středu hmotnosti nebo těžiště
$\boldsymbol{v}^*$	$\mathrm{m\,s^{-1}}$	rychlost středu hmotnosti nebo těžiště
$\boldsymbol{a}^*$	$\mathrm{m\,s^{-2}}$	zrychlení středu hmotnosti nebo těžiště
m	kg	hmotnost
$\boldsymbol{L}$	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$	moment hybnosti
$\boldsymbol{M}$	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$	moment síly
$\boldsymbol{\varphi}$		úhel otočení
$\boldsymbol{\omega}$	$\mathrm{s^{-1}}$	úhlová rychlost
$\boldsymbol{\varepsilon}$	$\mathrm{s^{-2}}$	úhlové zrychlení
J	$\mathrm{kg\,m^2}$	moment setrvačnosti
W	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}}$	energie (práce)
P	$\mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$	výkon

2 Soustava hmotných bodů

Newtonovy zákony, jejichž znění najdete v úvodu, jsou formulovány pouze pro jeden hmotný bod. Hmotný bod je myšlená částice, která má nulové rozměry, ale nenulovou hmotnost. Jak ale můžeme tyto zákony použít pro popis běžných předmětů či těles, které nás obklopují? Vždyť každá věc má nějaké rozměry a může například rotovat nebo se deformovat – a s tím zdánlivě Newtonovy zákony nepočítají. Přesněji řečeno *není nutné*, aby v zákonech byla řeč o tělesech, protože chování těles lze odvodit. Můžeme předpokládat, že každé těleso se skládá z velkého množství hmotných bodů.

2.1 První impulsová věta



Obr. 1: Každá částice se může s jinou částicí přitahovat nebo se mohou odpuzovat. Síly můžeme rozdělit do dvou skupin podle toho, zda pocházejí od částic patřících do vybrané množiny (vnitřní síly) nebo zda působící částice patří do okolí (vnější síly). Tenčí šipkou jsou zakresleny vnitřní síly, silnější šipkou vnější síly.

Jak se chová jedna částice, to již víme, protože to specifikují Newtonovy zákony. Nyní si představme, že máme nikoli jednu, ale velké množství částic. Pak nastává komplikovaná situace, kdy každá částice má svou polohu, hmotnost a rychlost, přičemž ostatní částice na ni mohou působit silami, mohou ji přitahovat nebo odpuzovat a tím měnit její hybnost. Z těchto všech částic vyberme určitou skupinu (soustavu) N částic a pokusme se odhalit některé zajímavé zákonitosti, které pro ně platí. Máme tedy N částic, kde pro každou z nich platí druhý Newtonův zákon

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_i \tag{3}$$

kde $\boldsymbol{F}_i$ je součet všech sil, které na i-tou částici působí. Je nutné si ujasnit, že každá síla je vždy způsobena nějakou částicí. Nemůže se stát, aby existovala síla sama o sobě. V souladu se třetím Newtonovým zákonem najdeme ke každé síle částici, která je příčinou tohoto silového působení. Jestliže síla $\boldsymbol{F}_i$ představuje součet všech působících sil, pak jistě dokážeme tyto síly rozlišit do dvou skupin podle toho, odkud pocházejí. Některé síly jsou způsobeny částicemi, které jsou součástí soustavy, kterou jsme si vybrali. Takové síly budeme označovat pojmem **vnitřní** (interní). Síly, které nejsou vnitřní, pocházejí od částic mimo soustavu a budeme je nazývat silami **vnějšími** (externími). Z toho vyplývá, že pro každou částici v naší soustavě můžeme napsat rovnici vycházející z druhého Newtonova zákona, a tak získáme N rovnic:

Vnitřní a vnější síly

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{INT}} + \boldsymbol{F}_1^{\mathrm{EXT}} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{INT}} + \boldsymbol{F}_2^{\mathrm{EXT}} \tag{5}$$

$$\vdots \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_N}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}_N^{\mathrm{INT}} + \boldsymbol{F}_N^{\mathrm{EXT}} \tag{7}$$

$$\tag{8}$$

Pro jistotu si znovu připomeňme, že například zápisem $\boldsymbol{F}_2^{\mathrm{EXT}}$ máme na mysli *součet všech vnějších sil působících na druhou částici.*

Nyní všechny rovnice sečteme

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \left(\boldsymbol{F}_i^{\mathrm{INT}} + \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{EXT}}\right) \tag{9}$$

a provedeme drobnou úpravu.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{INT}} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{\mathrm{EXT}} \tag{10}$$

Na levé straně rovnice se vyskytuje $\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i$, což je součet hybností všech částic, které patří do soustavy. Takový výraz budeme označovat $\boldsymbol{p}$ (bez indexu) a nazývat **celkovou hybností soustavy**. Na pravé straně rovnice můžeme pouvažovat o součtu interních sil – je to součet všech sil, které jsou způsobeny částicemi uvnitř soustavy. Ze třetího Newtonova zákona plyne, že ke každé interní síle najdeme jinou interní sílu stejně velkou opačně orientovanou. Všechny interní síly se tedy vyskytují v párech a jestliže je sečteme, získáme nulu.

Celková hybnost soustavy

Součet vnitřních sil je nula.

Vnější síly spárované nejsou, protože uvažujeme pouze to, co působí na soustavu, nikoli jak soustava působí na své okolí. Součet vnějších sil budeme označovat $\boldsymbol{F}$ a máme tím na mysli celkovou sílu působící na soustavu. Rovnici můžeme přepsat do tvaru

První impulsová věta

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{11}$$

což je natolik pozoruhodný výsledek, že získal i své jméno – **první impulsová věta**. Rovnice totiž vypadá jako druhý Newtonův zákon, ale narozdíl od něj platí pro *soustavu* částic, nikoli pouze pro jediný hmotný bod. V Newtonově zákonu vystupuje hybnost částice a součet všech sil, které na částici působí. Naproti tomu v první impulsové větě je $\boldsymbol{p}$ celková hybnost soustavy, tj. součet všech hybností soustavy a $\boldsymbol{F}$ je celková síla působící na soustavu.

Proto můžeme druhý Newtonův zákon aplikovat jen s drobnou obměnou v terminologii na celá tělesa a říkat, že hybnost tělesa zderivovaná podle času je rovna součtu všech sil, které na těleso působí.

Kontrolní otázky

1. Čím se odlišují vnější a vnitřní síly?
2. Proč je součet vnitřních sil nulový?
3. Má rychlost vždy stejný směr jako hybnost?

Klíč

1. Vnější síly jsou způsobeny částicemi, které nepatří do soustavy částic, jejíž chování zkoumáme. Naproti tomu vnitřní síly vycházejí od částic, které do soustavy patří.

2. Součet vnitřních sil je nulový v důsledku platnosti třetího Newtonova zákona. Jestliže posečítáme všechny vnitřní síly, tak ke každé síle bude existovat jiná, stejně velká a opačně orientovaná. Součet proto vyjde nulový.

3. Má. Platí, že $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, takže rychlost je pouze vynásobená hmotností, což je skalár. Oba vektory, rychlost i hybnost, budou vždy rovnoběžné. A protože hmotnost je vždy kladná, budou mít i stejnou orientaci.

2.2 Zákon zachování hybnosti

Zákon zachování hybnosti

Z první impulsové věty vyplývá zákon zachování hybnosti. Uvažujme, že soustavu ponecháme bez vlivu vnějších sil. V takovém případě můžeme první impulsovou větu zjednodušit na

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (12)$$

Jestliže derivace nějaké veličiny podle času je nulová, pak se tato veličina s časem nemění, tj. zachovává se. V našem případě se zachovává celková hybnost soustavy, proto výše uvedený vztah nazýváme **zákon zachování hybnosti**.

To znamená, že soustava nemůže bez vnějších sil žádným způsobem změnit svou vlastní celkovou hybnost. Částice, které tvoří soustavu, se mohou různě pohybovat, působit na sebe vzájemně silami, přitahovat se, odstrkovat se jedna od druhé – ale celková hybnost soustavy zůstane stále stejná, když zařídíme, aby byl součet okolních sil nulový.

2.3 Střed hmotnosti soustavy

Ukázali jsme, že první impulsová věta velmi připomíná druhý Newtonův zákon $\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}$ a přitom ji můžeme aplikovat na soustavu částic, nikoli pouze na jednu částici. Postupně hledáme veličiny popisující větší celky namísto jednotlivých částic. Prozatím jsme nalezli analogii k síle a stanovili jsme, že silou $\boldsymbol{F}$, která působí na celou soustavu budeme mít na mysli součet všech vnějších sil. Také jsme nadefinovali celkovou hybnost $\boldsymbol{p}$ jako součet jednotlivých hybností. Pro řešení příkladů a praktické výpočty nám toto nemůže stačit, protože celkovou hybnost ani neumíme spočítat. Není možné posečítat hybnosti všech částic, protože těch je mnoho, mohou mít různou polohu, rychlost a hmotnost. Bylo by praktické mít k dispozici vztah v podobě $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$, do kterého bychom dosadili hmotnost a rychlost a tím vypočítali hybnost. Jenže co bychom měli dosadit za „rychlost soustavy“? To v této chvíli není jisté. Ale za m bychom zcela jistě mohli dosadit **celkovou hmotnost soustavy** definovanou

Celková hmotnost soustavy

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \qquad (13)$$

a tím jsme určili další veličinu, kterou lze použít pro popis větších celků. Nyní zpět k hybnosti. Požadujeme, aby

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}^* \tag{14}$$

ale přitom víme, že

$$\boldsymbol{p} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m\boldsymbol{v}_i \tag{15}$$

takže

$$m\boldsymbol{v}^* = \sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i \tag{16}$$

a když celou rovnici podělíme m, získáme

Celková rychlost soustavy

$$\boldsymbol{v}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{v}_i}{m} \tag{17}$$

Takto vzniklý vztah prohlásíme za **celkovou rychlost soustavy**. Vztah poněkud připomíná vážený aritmetický průměr, přičemž větší důležitost mají částice s vyšší hmotností. Jde o abstraktní pojem, protože soustava může být složitá, každá její částice se může pohybovat jinam a přesto jsme již schopni říct, jaká je rychlost (i hybnost) soustavy jako celku. Ale příliš jsme si nepomohli, protože i nadále musíme pracovat s jednotlivými částicemi. Proto pokračujme dále v úvahách.

Máme-li rychlost, pak víme, že je to derivace nějakého polohového vektoru, který označme $\boldsymbol{r}^*$. Ten snadno určíme, protože

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{M}\right) \tag{18}$$

a tudíž

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i\boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \tag{19}$$

Střed hmotnosti soustavy

Takto stanovený vektor bude reprezentovat polohu soustavy. Jak vidíme, z poloh a hmotností jednotlivých částic vypočítáme vektor $\boldsymbol{r}^*$, který bude říkat, kde se soustava nachází, přestože ve zjištěném místě se žádný bod soustavy nemusí nacházet. Polohový vektor $\boldsymbol{r}^*$ může ukazovat do prázdného prostoru. Vztah pro výpočet opět připomíná vážený aritmetický průměr a důležitost jednotlivých bodů je vyjádřena jejich hmotností. Vektor $\boldsymbol{r}^*$ je natolik významný, že má i své jméno – nazývá se **střed hmotnosti** soustavy.

Určili jsme, že bod $\boldsymbol{r}^*$ představuje polohu soustavy nebo tělesa a nazývá se střed hmotnosti. Jeho derivace podle času je vektor $\boldsymbol{v}$, který reprezentuje *rychlost středu hmotnosti.* Díky tomu můžeme stanovit celkovou hybnost soustavy $\boldsymbol{p}$, protože tu vypočítáme jako

$$p = m\boldsymbol{v}^* \tag{20}$$

kde m je celková hmotnost soustavy. Pro zjištění celkové hybnosti soustavy *již nemusíme znát chování jednotlivých částic*, ale stačí vědět, jak se pohybuje střed hmotnosti. Tím jsme učinili velmi významný krok, protože jsme nalezli další veličiny, které charakterizují soustavu jako celek, a to polohu a rychlost.

Jestliže obě strany výše uvedeného vztahu zderivujeme podle času, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}^*)}{\mathrm{d}t} \tag{21}$$

Přičemž výraz na levé straně rovnice představuje vnější sílu působící na soustavu. Výraz na pravé straně rovnice můžeme chápat různě. Zcela obecně bychom jej měli považovat za derivaci součinu a psát

$$\frac{\mathrm{d}(m\boldsymbol{v}^*)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{v}^* + \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t}m \tag{22}$$

Věta o pohybu těžiště

Nejčastěji ale očekáváme, že se hmotnost soustavy nebude měnit, a tak m můžeme považovat za konstantu (tj. její derivace bude nula). Dostaneme

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}^*}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}^* \tag{23}$$

kde vektor $\boldsymbol{a}^*$ znamená *zrychlení středu hmotnosti*.

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}^*}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{24}$$

což znamená, že onen bod *nebude zrychlovat*, jinými slovy setrvá v klidu nebo v pohybu rovnoměrném přímočarém bez ohledu na to, jaké procesy v soustavě proběhnou. Jediný způsob, jak změnit rychlost středu hmotnosti, je působit vnější silou.

Σ

Shrnutí

Důležitý závěr této kapitoly je, že nyní máme pro celou soustavu hmotných bodů definovánu polohu, rychlost, zrychlení, hmotnost, hybnost a sílu působící na soustavu. Onou soustavou hmotných bodů může být například jakékoli těleso nebo i více těles. Navíc víme, že střed hmotnosti (což je bod, který má některé speciální vlastnosti) zrychluje jen v důsledku působení vnějších sil. Kdyby byl součet vnějších sil nulový, bude se střed hmotnosti pohybovat rovnoměrně přímočaře a celková hybnost soustavy se nebude měnit.

?

Kontrolní otázky

1. Ve varné konvici začla vřít voda, bublat a chaoticky se promíchávat. Změnila se její hybnost?
2. Vracel by se bumerang i ve vakuu?
3. Po jaké trajektorii se bude pohybovat střed hmotnosti hozené sekery? Bude záležet na tom, zda sekera rotuje či nikoli?
4. Má-li se zachovávat hybnost, musí být soustava izolovaná od okolních sil?

Klíč

1. Hybnost vody i konvice zůstane stále stejná, protože gravitační síla i reakce podložky (což jsou vnější síly) dávají v součtu nulu.
2. Nevracel. Aerodynamická síla, která mění směr letu bumerangu, je způsobena okolním vzduchem. Bez atmosféry (tj. ve vakuu) by bumerang (přesněji řečeno jeho střed hmotnosti) letěl rovnoměrně přímočaře. Není možné měnit hybnost bez vnějších sil. Případně, v gravitačním poli, by padal po parabole stejně jako všechny ostatní předměty. Ale nevracel by se.
3. Střed hmotnosti jakékoli soustavy anebo tělesa má zrychlení určené vnějšími silami. Gravitační síla proto způsobí, že střed hmotnosti sekery se bude pohybovat po parabole bez ohledu na to, zda sekera rotuje či nikoli.
4. Nemusí. Nutnou podmínkou je to, aby součet vnějších sil byl nulový. Aby se hybnost zachovávala, není nutné odstranit vnější síly – postačí je vzájemně vykompenzovat.

Příklad (srážka automobilů)

Nákladní automobil o hmotnosti $m_1 = 5\,\mathrm{t}$ narazil při rychlosti $v_1 = 80\,\mathrm{kmh^{-1}}$ zezadu do auta o hmotnosti $m_2 = 1\,\mathrm{t}$ jedoucího rychlostí $v_2 = 50\,\mathrm{kmh^{-1}}$. Předpokládejme, že rychlost obou dopravních prostředků po nárazu byla stejná. Tuto rychlost v vypočítejte.

Řešení

Hybnost bude po srážce stejná jako před srážkou. Dále víme, že rychlost obou těles po srážce je stejná.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \tag{25}$$

Z rovnice vyjádříme v a zadané veličiny dosadíme v základních jednotkách (metrech za sekundu a kilogramech). Vychází

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 20{,}83\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{26}$$

Což odpovídá rychlosti 75 km/h. Z výsledku je patrné, že rychlost nákladního automobilu se změnila o menší hodnotu než rychlost osobního automobilu.

Příklad (zpětný ráz pistole)

Rychlost náboje vystřeleného z pistole ráže 9 mm vzor 82 je $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Hmotnost náboje je 8 g. Vypočítejte rychlost pistole po výstřelu, je-li hmotnost pistole bez nábojů 800 g.

Řešení

Indexem jedna označme veličiny týkající se náboje, index dva se bude vztahovat k pistoli. Hybnost před výstřelem byla nulová, stejně jako po výstřelu.

$$0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \tag{27}$$

$$v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2} = -4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{28}$$

Rychlost pistole má opačné znaménko než rychlost kulky. To je pochopitelné, protože se obě tělesa pohybují v opačných směrech. Hmotnost pistole berte pouze orientačně – záleží na tom, jak je plný zásobník.

Příklad (palice a kůl)

Dvacetikilogramová palice ($m_1 = 20\,\mathrm{kg}$) dopadla z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$ na dřevěný kůl o hmotnosti $m_2 = 10\,\mathrm{kg}$ a ten se zabořil o $d = 5\,\mathrm{cm}$ hlouběji do hlíny. Vypočtěte, jakou průměrnou sílu překonával kůl při zarážení do země. Předpokládejte, že palice se od kůlu neodrazí.

Řešení

Hybnost palice i kůlu před nárazem musí být stejná jako po nárazu. Navíc víme, že rychlost obou těles (tu označme v) po nárazu je stejná, protože palice se od kůlu neodrazí.

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v \tag{29}$$

Rychlost palice před nárazem můžeme určit pomocí zákona zachování energie. Bude platit, že $v_1 = \sqrt{2gh}$. Z toho můžeme zjistit rychlost po nárazu:

$$v = \frac{m_1 \sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} = 3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{30}$$

Přepokládáme-li rovnoměrně zpomalený pohyb ($d = \frac{1}{2} a t^2$ a $v = at$), můžeme vypočítat průměrné zrychlení, pro které platí

$$a = \frac{v^2}{2d} \tag{31}$$

A ze zrychlení snadno z druhého newtonova zákona vypočteme sílu. Celkový výsledek bude

$$F = \frac{(m_1 + m_2) v^2}{2d} = 2700\,\mathrm{N} \tag{32}$$

2.4 Moment hybnosti, moment síly

Moment hybnosti $\boldsymbol{L}$ jednoho hmotného bodu (částice) je definován

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} \tag{33}$$

Nyní se podívejme, jak se moment hybnosti mění s časem. Bude nás tedy zajímat jeho derivace podle času:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}) \tag{34}$$

Vzhledem k tomu, že poloha $\boldsymbol{r}$ i hybnost $\boldsymbol{p}$ mohou záviset na čase, je potřeba použít pravidlo pro derivaci součinu. V další úpravě tedy získáváme

$$= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} \tag{35}$$

Sčítanec nalevo obsahuje derivaci polohy podle času, což je rychlost $\boldsymbol{v}$. Ve sčítanci napravo se objevila derivace hybnosti podle času, a to je síla $\boldsymbol{F}$ (viz druhý Newtonův zákon). Jestliže výraz upravíme, dostáváme

$$= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{36}$$

Jak dále uvidíme, výraz nalevo je roven nule, protože se jedná o vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů. Rychlost a hybnost jsou rovnoběžné vektory.

$$= \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}m + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{37}$$

takže jsme odvodili, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \tag{38}$$

Výraz na pravé straně se nazývá **moment síly** a značí se $\boldsymbol{M}$. Platí tedy

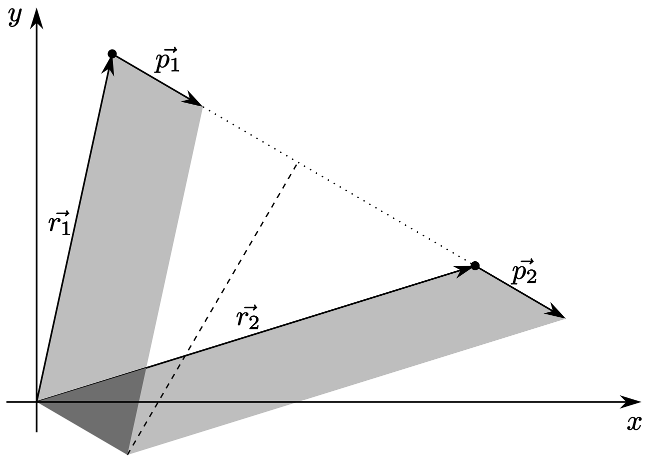
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{39}$$

Moment síly se vypočítá pomocí vektorového součinu. Vektor $\boldsymbol{r}$ je poloha bodu, na který síla působí. Vektor $\boldsymbol{F}$ je působící síla. Jednotkou momentu síly je N m, tj. newton krát metr, newtonmetr. Protože jde o vektorový součin, bude moment síly vždy kolmý na oba vektory $\boldsymbol{r}$ i $\boldsymbol{F}$. Nakreslíme-li dvojrozměrnou situaci, často se setkáme z případem, kdy moment síly bude směřovat „z papíru“ nebo „do papíru“. Velikost momentu sil bude rovna ploše rovnoběžníka vytvořeného vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{F}$. A proto, jestliže síla bude rovnoběžná s polohovým vektorem, pak moment síly vyjde nulový (rovnoběžník nevznikne).

2.5 Zákon zachování momentu hybnosti

Nyní si všimněme situací, kdy derivace momentu hybnosti podle času je nulová, což znamená, že se moment hybnosti s časem nemění a tudíž se zachovává. To nastane tehdy, je-li výraz $\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ roven nule. Můžeme vypozorovat dva případy, kdy se moment hybnosti zachovává:

- Je-li síla $\boldsymbol{F}$ nulová
- Je-li síla $\boldsymbol{F}$ rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{r}$



Obr. 2: Moment hybnosti jedné částice, kterou ponecháme bez působení sil, se zachovává.

Moment hybnosti částice se tedy nemění, jestliže ji ponecháme bez vlivu jakýchkoli sil. Tento případ můžeme snadno nakreslit:

Na obrázku je zakreslena částice, která se přemístila z polohy $\boldsymbol{r_1}$ do místa $\boldsymbol{r_2}$. Po celou dobu pohybu měla stále stejnou hybnost ($\boldsymbol{p_1} = \boldsymbol{p_2}$), protože na ni nepůsobila žádná síla, která by hybnost mohla změnit. Čemu je ale roven moment hybnosti? Ten vypočítáme jako vektorový součin polohového vektoru $\boldsymbol{r}$ a hybnosti $\boldsymbol{p}$. Je proto vždy kolmý na oba vektory $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{p}$ a jeho velikost je rovna ploše rovnoběžníka, který z obou vektorů vytvoříme. Na obrázku je tato plocha vyznačena pro první i druhou polohu bodu a mělo by být patrné, že obě plochy jsou stejné. O ploše rovnoběžníka platí, že je rovna součinu základny a výšky – a v obou případech je základna tvořena vektorem hybnosti $\boldsymbol{p_1}$ nebo $\boldsymbol{p_2}$ (který se nemění) a výška také zůstává stejná. Ta je vyznačena čárkovanou čárou.

Vidíme tedy, že moment hybnosti částice se nezmění.

Dosud jsme zkoumali chování pouze jediného hmotného bodu, ale nyní uvažujme, že máme celou soustavu částic. K lepšímu pochopení této kapitoly doporučuji mít prostudováno odvození první impulsové věty, protože mnoho myšlenek se bude opakovat. Stejně jako u první impulsové věty, i nyní budeme uvažovat, že částice na sebe působí a toto působení bude vycházet zevnitř soustavy anebo zvenčí, ukáže se, že vnitřní působení se vzájemně vyruší a pouze to vnější bude měnit nějakou celkovou charakteristiku soustavy.

Zatímco u první impulsové věty byla řeč o silách a hybnostech, nyní budeme uvažovat momenty sil a momenty hybností.

Předpokládejme, že částice rozdělíme do dvou skupin. Vybereme ty, co patří do soustavy která nás zajímá a tyto částice si očíslujeme jedna až N. Ostatní částice budeme považovat za okolí. Na každou částici ze soustavy může působit moment síly. Pro i-tou částici proto platí

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_i \tag{40}$$

kde $\boldsymbol{M}_i$ je součet všech momentů sil působících na i-tou částici. Moment síly je vždy způsoben nějakou jinou částicí, která je buď součástí soustavy anebo patří do okolí. Na základě toho můžeme momenty sil rozdělit na vnitřní (interní) a vnější (externí). Vnitřní momenty vycházejí od částic patřících do soustavy, zatímco vnější momenty jsou způsobeny částicemi z okolí. Proto můžeme pro celou soustavu napsat N rovnic ve tvaru

Vnitřní a vnější momenty sil

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_1}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_1^{INT} + \boldsymbol{M}_2^{EXT} \tag{41}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_2}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_2^{INT} + \boldsymbol{M}_2^{EXT} \tag{42}$$

$$\vdots \tag{43}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_N}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}_N^{INT} + \boldsymbol{M}_N^{EXT} \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

Jestliže všechny tyto rovnice posečítáme, získáme

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{M}_i^{INT} + \boldsymbol{M}_i^{EXT}) \tag{46}$$

což můžeme upravit na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i^{INT} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i^{EXT} \tag{47}$$

Výraz na levé straně rovnice představuje součet momentů hybnosti všech částic. Takovou veličinu budeme označovat $\boldsymbol{L}$ a nazývat **celkový moment hybnosti soustavy**. Platí tedy

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i^{INT} + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{M}_i^{EXT} \tag{48}$$

1. Součet vnitřních momentů

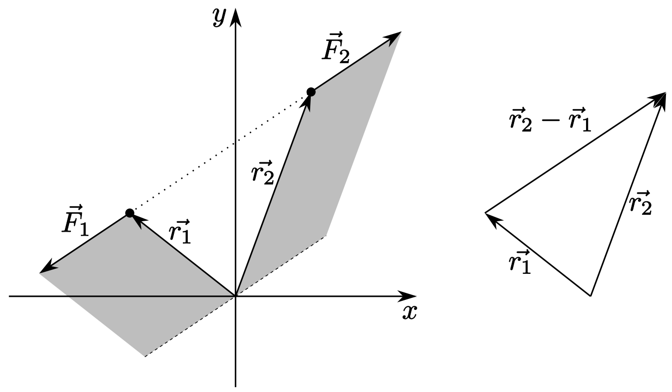
Na pravé straně rovnice najdeme součet všech vnitřních momentů. Pouvažujme o tom, zda se momenty vyskytují v párech a zda pro momenty platí analogie třetího Newtonova zákona. Kdybychom měli pouze dva hmotné body o souřadnicích $\boldsymbol{r}_1$ a $\boldsymbol{r}_2$, mohly by na sebe vzájemně působit silami $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$, které by byly stejně velké, opačně orientované. Na první bod bude působit síla $\boldsymbol{F}_1$ momentem $\boldsymbol{M}_1$, zatímco na druhý bod působí síla $\boldsymbol{F}_2$ momentem $\boldsymbol{M}_2$. Pro momenty sil bude platit

$$\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 \tag{49}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{50}$$

Jestliže oba momenty sečteme, dostaneme

$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 \tag{51}$$



Obr. 3: Dvě částice na sebe mohou vzájemně působit momentem síly. Oba momenty jsou vždy stejně velké a opačně orientované. Na pravé části obrázku je zakreslen vektor $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$, který je rovnoběžný s působícími silami, což využijeme při důkazu.

a protože ze třetího Newtonova zákona platí $\boldsymbol{F}_1 = -\boldsymbol{F}_2$, můžeme součet momentů upravit na

$$= -\boldsymbol{r}_1 \times \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{r}_2 \times \boldsymbol{F}_2 = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \times \boldsymbol{F}_2 \tag{52}$$

a to je rovno nule, protože jde o vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů. Člen $(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)$ znamená *vzájemnou polohu* obou bodů. Takový vektor je zcela jistě rovnoběžný s působícími silami, protože předpokládáme, že *akce a reakce působí podél stejné přímky*[3]. Situace je znázorněna na obrázku (3), kde jsou zakresleny dvě částice, které se vzájemně odpuzují. Momenty sil se vypočítají jako vektorové součiny a jejich velikosti odpovídají velikosti ploch rovnoběžníků. Z obrázku by mělo být zřejmé, že plochy rovnoběžníků vytvořených z polohových vektorů a sil jsou stejné.

Součet vnitřních momentů je nula.

Co jsme tedy zjistili? Jak plyne z velikosti ploch rovnoběžníků, oba momenty jsou stejně velké a je zřejmé, že jejich smysl je vzájemně opačný. Ke stejnému závěru jsme došli i výpočtem, kdy jsme dokázali, že součet obou momentů je roven nule. To znamená, že působí-li jedna částice na druhou momentem síly, pak působí současně druhá částice na první stejným momentem opačně orientovaným. Momenty sil se tedy stejně jako síly vždy vyskytují v párech. Z toho vyplývá, že součet všech interních momentů sil je roven nule.

2. Druhá impulsová věta

Jak jsme právě dokázali, součet všech vnitřních momentů je roven nule, takže platí vztah

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{53}$$

který se označuje jako **druhá impulsová věta**. Veličinou $\boldsymbol{M}$ máme na mysli součet všech vnějších momentů a jak vidíme, pouze vnější momenty

[3] Často se u třetího Newtonova zákona neuvádí, že akce a reakce působí podél stejné přímky, ale v tomto případě je to nutný předpoklad.

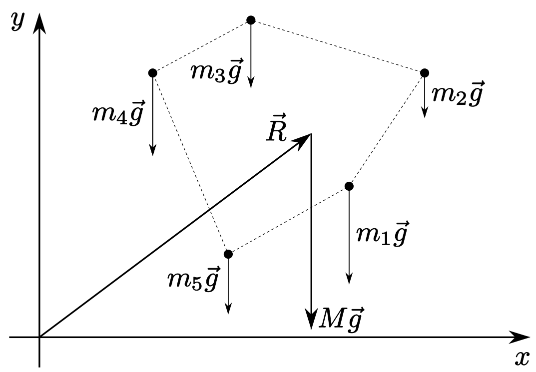
mohou změnit celkový moment hybnosti $\boldsymbol{L}$. Kdyby byl součet všech vnějších momentů roven nule, bude platit

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{54}$$

což znamená, že se celkový moment hybnosti nebude měnit, a proto výše uvedený vztah nazýváme **zákon zachování momentu hybnosti**. Druhou impulsovou větu ani zákon zachování momentu hybnosti prozatím nemůžeme plně využít, protože neumíme stanovit celkový moment hybnosti rotujícího tělesa. Velký pokrok v tomto směru bude znamenat kapitola pojednávající o momentu setrvačnosti.

2.6 Těžiště soustavy hmotných bodů (působiště gravitační síly)

Při výpočtech budeme velmi často potřebovat informaci, jakým momentem síly působí gravitace na určité těleso, přičemž vlastnosti tělesa, tedy jeho rozměry, hmotnost či rozložení hustoty obvykle známe. Zvolíme si souřadnou soustavu a pak můžeme použít následující postup: rozložíme těleso na jednotlivé hmotné body, zjistíme moment gravitační síly působící na každý z nich a následně momenty sečteme. To je ale velmi zdlouhavé a nepraktické.



Obr. 4: Nechť je těleso složeno z několika hmotných bodů. Hledáme takový bod, do kterého lze soustředit hmotnost celého tělesa při zachování stejného momentu gravitační síly.

Jiný způsob je takový, že celé těleso nahradíme jediným hmotným bodem. Na tento bod musí působit gravitační síla stejně jako na původní těleso. Tedy součet sil i součet momentů sil musí souhlasit. Požadujeme-li, aby na hmotný bod působila gravitace stejnou silou jako na původní těleso, pak je ihned zřejmé, že hmotnost bodu musí být stejná jako hmotnost tělesa. Zbývá určit, *kde musí být hmotný bod umístěn*, aby se celkový moment sil nezměnil. Tuto neznámou polohu označme $\boldsymbol{r}^*$ a gravitační sílu označme $\boldsymbol{G}$. Moment síly působící na hmotný bod pak vypočteme $\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{G}$. Musí platit

$$\boldsymbol{r}^* \times \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{g} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{r_i} \times m_i \boldsymbol{g} \tag{55}$$

Na levé straně rovnice je moment celkové gravitační síly, která má působiště v bodě $\boldsymbol{r}^*$. Na pravé straně rovnice je součet všech momentů sil působících na jednotlivé body tělesa. Drobnými úpravami získáváme

$$\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{g} \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{g} \tag{56}$$

a nyní vydělíme obě strany rovnice sumou hmotností

$$\boldsymbol{r}^* \times \boldsymbol{g} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \times \boldsymbol{g} \tag{57}$$

Na první pohled je vidět, že rovnici vyhovuje řešení

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \boldsymbol{r_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \tag{58}$$

a takto určený bod budeme nazývat **těžiště**. Ve vztahu pro výpočet vystupují pouze hmotnosti jednotlivých hmotných bodů a jejich poloha.

3 Tuhé těleso

Tuhé těleso (někdy též dokonale tuhé těleso) je zvláštním případem soustavy hmotných bodů. Je vytvořeno z velkého počtu hmotných bodů, jejichž vzdálenosti jsou časově neproměnné a nezávisí na silách působících na ně. Skutečná tělesa pevného skupenství tuto podmínku splňují pouze částečně (jsou buďto pružná nebo plastická).

Vzhledem k obrovskému počtu molekul (atomů) tvořících tuhé těleso si představujeme látku v tuhém tělese spojitě rozloženou a s výhodou využíváme pojmů a vztahů diferenciálního a integrálního počtu. Místo hmotnosti m_i hmotného bodu uvažujeme elementární hmotnost $\mathrm{d}m$ obsaženou v infinitezimálním objemu $\mathrm{d}V$. Definujeme hustotu tuhého tělesa

$$\varrho = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}V} \tag{59}$$

Celková hmotnost tělesa je

$$m = \int_V \varrho \, \mathrm{d}V \tag{60}$$

Celková hmotnost tělesa je přímo úměrná hustotě tělesa a jeho objemu. Je-li hustota tělesa v celém jeho objemu stejná, pak takové těleso označujeme pojmem *homogenní* (opakem je *nehomogenní*). Je-li ϱ konstanta, pak ji můžeme vytknout před integrál a dostáváme známý vztah $m = \varrho V$.

3.1 Výpočet polohy těžiště

Vztah pro výpočet polohy hmotného středu (těžiště) tuhého tělesa má tvar

$$\boldsymbol{r}^* = \frac{\int_V \boldsymbol{r} \, \mathrm{d}m}{\int_V \mathrm{d}m} \tag{61}$$

neboli

$$x^* = \frac{\int_V x\,\mathrm{d}m}{\int_V \mathrm{d}m} \qquad y^* = \frac{\int_V y\,\mathrm{d}m}{\int_V \mathrm{d}m} \qquad z^* = \frac{\int_V z\,\mathrm{d}m}{\int_V \mathrm{d}m} \tag{62}$$

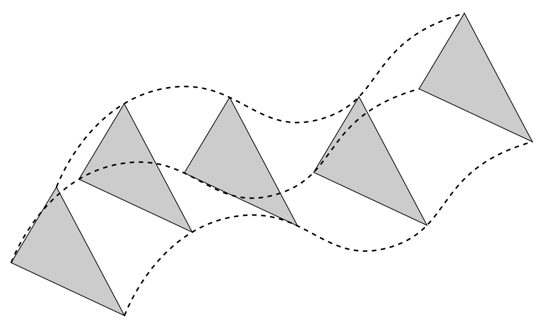
přičemž integrace se provádí přes celý objem tělesa. V homogenním tělese je hustota ϱ konstantní, takže hmotnost tělesa a poloha těžiště jsou určeny vztahy

$$m = \int_V \varrho\,\mathrm{d}V = \varrho \int_V rmdV = \varrho V \qquad \boldsymbol{r}^* = \frac{1}{V}\int_V \boldsymbol{r}\,\mathrm{d}V \tag{63}$$

Počet stupňů volnosti tuhého tělesa zjistíme takto: Poloha tuhého tělesa v prostoru je určena polohou jeho tří bodů, které neleží v jedné přímce. Vzhledem ke zvolené souřadnicové soustavě je poloha každého z těchto bodů vyjádřena třemi čísly. Celkem tedy máme 9 údajů. Vzdálenosti zvolených tří bodů jsou však stálé. Musíme proto odečíst tři vazební podmínky ($d_{12} = konst., d_{13} = konst., d_{23} = konst.$). Tuhé těleso v prostoru, nepodrobené vazbám, má celkem 6 stupňů volnosti. Jestliže je těleso ve svém pohybu omezeno vazbami, počet stupňů volnosti se snižuje o počet vazeb. Je-li těleso upevněno v jednom bodě, jsou určeny tři souřadnice tohoto bodu, takže zbývají tři nezávislé souřadnice a tuhé těleso pak má jen tři stupně volnosti. Když jsou dva body tělesa pevné, zbývá již jen jeden stupeň volnosti. Těleso se může otáčet okolo přímky procházející těmito body a stupeň volnosti přísluší úhlu otočení. Pro tuhé těleso platí první i druhá impulsová věta. Nepůsobí-li na tuhé těleso vnější síly, jeho hybnosti v daném vztažném systému je konstantní.

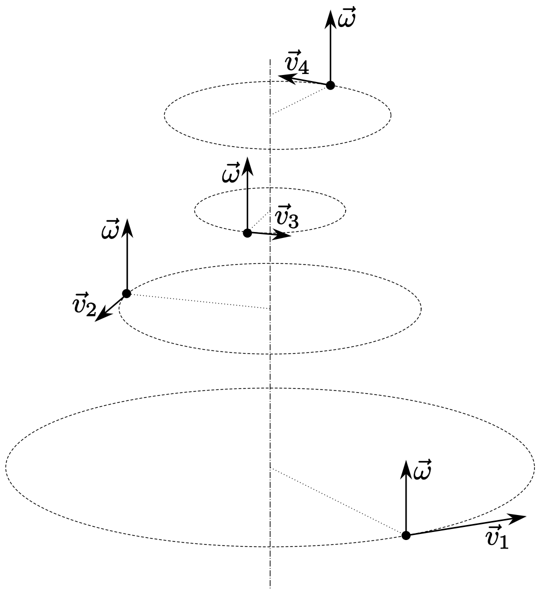
3.2 Translace

Translační (posuvný) pohyb tuhého tělesa je takový, při němž je rychlost (velikost i směr) všech částic stejná. Částice se proto pohybují po drahách, které jsou stejné ale liší se posunutím. Všechny částice mají stejné zrychlení, a to je určeno vztahem $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$. Tento vztah platí vždy pro zrychlení středu hmotnosti (a nemusí to být tuhé těleso), ale čistě translační pohyb tuhého tělesa je zvláštní tím, že rovnice $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$ platí pro kterýkoli bod tělesa.



Obr. 5: Při translačním pohybu tuhého tělesa se jednotlivé částice pohybují po trajektoriích, které jsou stejné jen navzájem posunuté.

3.3 Rotace



Obr. 6: Při rotačním pohybu tuhého tělesa se jednotlivé částice pohybují po kružnicích, jejichž osa je společná a nazývá se osa rotace. Úhlová rychlost všech částic je stejná. Je to vektor rovnoběžný s osou rotace.

Dosud jsme uvažovali o jednom hmotném bodu anebo o celé soustavě skládající se z velkého množství hmotných bodů. U jediné částice bylo snadné si představit její pozici, protože ta je dána třemi souřadnicemi určujícími její polohu. Je-li částic mnoho, pak již není možné brát v úvahu polohu každé z nich zvlášť, ale zavedli jsme některé globální charakteristiky, které soustavu popisují – celkovou hybnost, celkovou hmotnost, střed hmotnosti a celkový moment hybnosti. V reálném světě se naštěstí často setkáváme s případem, kdy částice tvoří *tuhá tělesa* nebo to alespoň můžeme s rozumnou přesností předpokládat. To nám umožní zavést další veličiny, které budou stav soustavy popisovat. Tuhým tělesem rozumíme soustavu částic, které si navzájem udržují stejnou vzájemnou pozici. Vzájemně se vůči sobě nepohybují a takto vytvořené těleso bude mít stále stejný tvar. Tuhé těleso se může jako celek v prostoru různě pohybovat, ale ukazuje se, že je rozumné pohyb rozdělit na dva druhy – na translaci a rotaci. Translací rozumíme posuvný pohyb, při kterém se přemísťuje střed hmotnosti tělesa. Rotací máme na mysli otáčení o nějaký úhel kolem nějaké osy. S translací jsme se již setkali, protože ta dává smysl u jakékoli soustavy aniž by musela tvořit tuhé těleso. Jde o přesun středu hmotnosti a ten je definován pro libovolnou soustavu. Zrychlení středu hmotnosti je určeno celkovou hmotností soustavy a součtem vnějších sil, což jsme již probrali v minulých kapitolách.

Zato rotace je novým pojmem, protože ta dává smysl pouze pro tuhá tělesa. Jen u tuhých těles můžeme určit osu, kolem které se má těleso otáčet. Zavedeme proto úhel otočení, který budeme značit $\boldsymbol{\varphi}$. Je to vektor, jehož velikost určuje, o kolik radiánů se těleso otočilo. Směr tohoto vektoru bude rovnoběžný s osou rotace. Mělo by být zřejmé, že například úhel $\boldsymbol{\varphi} = [0; 2\pi; 0]$ znamená jednu otáčku kolem osy rovnoběžné s osou ypsilon.

Obdobně například $\boldsymbol{\varphi} = [-\pi; 0; 0]$ bude znamenat půl otáčky kolem osy rovnoběžné s osou x. Je potřeba ještě specifikovat směr otáčení. Můžeme si představit šroub či vývrtku zavrtávající se ve směru vektoru $\boldsymbol{\varphi}$. Tím je určen smysl otáčení. Samozřejmě máme na mysli pravotočivý závit a pravotočivý systém souřadnic.

Podobně jako se z polohového vektoru určuje rychlost pomocí derivace a zrychlení pomocí druhé derivace, zavádíme analogicky i úhlové veličiny. Úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t} \tag{64}$$

a úhlové zrychlení $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{\varphi}}{\mathrm{d}t^2} \tag{65}$$

Kontrolní otázky

K procvičení zkuste určit směr úhlové rychlosti pro níže uvedené situace. Předpokládejte, že osa x směřuje napravo, osa y nahoru a osa z k vám.

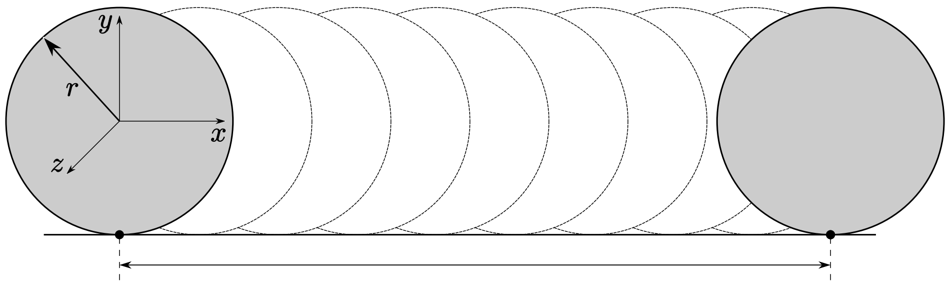
1. Vývrtka zavrtávající se do láhve vína.
2. Jste pravák a hodíte létající talíř směrem od vás.
3. Otáčení kohoutkem při pouštění vody.
4. Otáčení klíčem při odemykání dveří s pantem napravo.
5. Kolo od bicyklu, který jede směrem k nám.

Klíč

1. Láhev vína stojí, vývrtka se zavrtává směrem dolů: $[0; -\boldsymbol{\omega}; 0]$
2. Smysl otáčení je stejný jako v předchozím případě s vývrtkou, takže $[0; -\boldsymbol{\omega}; 0]$
3. Kohoutek odšroubováváme, takže postupuje směrem k nám, to znamená souhlasně s osou z. $[0; 0; \boldsymbol{\omega}]$
4. Otáčení je stejné, jako bychom něco zašroubovávali směrem od nás, tj. proti ose z. $[0; 0; -\boldsymbol{\omega}]$
5. Otáčení je stejné, jako otáčení šroubu, který se zavrtává ve směru osy x. $[\boldsymbol{\omega}; 0; 0]$

1. Odmotávání vlákna, valivý pohyb

U tuhého tělesa uvažujeme posuvný pohyb (translaci) a otáčivý pohyb (rotaci). Často bývá rotační pohyb vázán určitým mechanismem na nějaké jiné pohyby, a to obykle můžeme vyjádřit rovnicí. Například nějaké rotačně symetrické těleso se může valit po rovné podložce a v důsledku tření nebude docházet k prokluzování. Teoreticky (opravdu pouze teoreticky) tak můžeme vypočítat, kolikrát se kolo od auta otočilo, jestliže známe dráhu, kterou auto ujelo a zjistíme si velikost kola. Výpočet nebude pravdivý v případě, kdy auto během své cesty zabrzdilo tak prudce, že se kola zablokovala a po silnici se pohybovala *smykem*. Nebo naopak, jestli se při zrychlování dostala kola do prokluzu. Jestliže se ale po celou dobu jízdy kola *odvalovala* bez smyku, můžeme situaci znázornit následujícím obrázkem:



Obr. 7: Poloha středu valícího se tělesa je pevně svázána s úhlem otočení. Stejně tak rychlost těžiště (translace) souvisí s úhlovou rychlostí (rotací).

Přímo z definice jednoho radiánu vyplývá, že jestliže se kolo otočí o jeden radián, musí urazit vzdálenost rovnu poloměru kola. Jeden radián je totiž takový úhel, který na kružnici vymezuje oblouk, jehož délka je rovna poloměru kružnice. Protože jsme počátek souřadné soustavy umístili do středu kola, bude platit, že

$$s = r\varphi \tag{66}$$

Kde s je ujetá dráha a φ je úhel otočení kola. Snadno si můžeme představit, že po jedné otáčce kola (tedy úhel φ bude 2π radiánů) ujede auto dráhu rovnu obvodu kola – což je $2\pi r$. Předchozí vzorec ale slouží pouze pro názornost. Pro praktické výpočty jej v této podobě nemůžeme ponechat, protože nebere v úvahu *smysl otáčení* a také to, že úhel otočení i poloha jsou vektorové veličiny. Vztah ve skutečnosti platí pro z-ovou složku úhlu a pro x-ovou složku polohy. Tedy

$$r_x = -r\varphi_z \tag{67}$$

Záporné znaménko je zde nutné kvůli tomu, že úhel φ_z narůstá do záporných hodnot, zatímco zatímco dráha bude kladná. Kdyby kolo se pohybovalo obráceně, bude vztah platit beze změny, protože se změní znaménko na obou stranách rovnice (změní se směr pohybu i směr otáčení). To je výhodné, protože na začátku nemusíme vědět, jak se bude kolo pohybovat a přesto můžeme rovnici napsat. Jestliže vztah zderivujeme podle času, získáváme

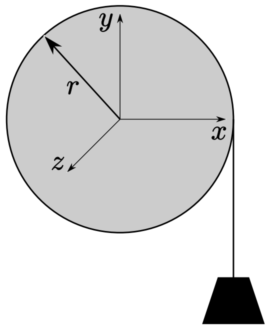
$$v_x = -r\omega_z \tag{68}$$

Zatímco předchozí vztah platil pro polohu a úhel, tento vztah platí pro rychlost a úhlovou rychlost. Naprosto zásadní rozdíl je v tom, že nyní již *nemusíme počátek souřadné soustavy umístit do středu kola*. Vztah pro rychlosti bude platit, i pro libovolně posunutou vztažnou soustavu. Dalším zderivováním bychom zjistili, jak spolu souvisí zrychlení a úhlové zrychlení:

$$a_x = -r\varepsilon_z \tag{69}$$

Vztah pro zrychlení klade na volbu vztažné soustavu ještě menší nároky, ale to již rozebírat nebudeme.

Uvažujme nyní jinou situaci. Máme závaží, které je zavěšeno na vlákně a to se odmotává z otáčejícího se bubnu.



Obr. 8: Z bubnu se odmotává vlákno, na kterém visí závaží. Existuje tedy vztah mezi úhlovou rychlostí bubnu a rychlostí závaží.

Můžeme si představit, že závaží klesá (takže ypsilonová souřadnice bude záporná) a z-ová složka úhlu otočení bubnu bude taktéž záporná. Vztah pro polohu závaží a úhel otočení bubnu by mohl vypadat takto

$$-r_y = -r\varphi_z \tag{70}$$

ale bude platit pouze tehdy, když nulovému úhlu bude odpovídat nulová poloha závaží. To nám klade určitá omezení na volbu souřadné soustavy a na počáteční délku provázku. Zatímco vztahy pro rychlosti

$$-v_y = -r\omega_z \tag{71}$$

i pro zrychlení

$$-a_y = -r\varepsilon_z \tag{72}$$

budou platit pro libovolnou počáteční délku provázku a souřadnou soustavu můžeme dle potřeby libovolně posunout.

3.4 Rovnováha tuhého tělesa, výpočet namáhání

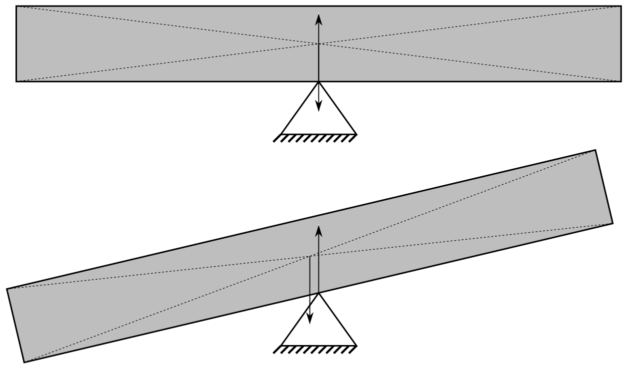
Rovnováhou tělesa rozumíme stav, kdy se těleso nijak nepohybuje, setrvává v klidu, a tudíž jeho hybnost i moment hybnosti jsou nulové. Tuhé těleso nemění svůj tvar, a tak jedinou možností jeho pohybu je translace a rotace. Translací rozumíme pohyb středu hmotnosti (těžiště). Z první impulsové věty vyplývá, že těžiště můžeme rozpohybovat pouze vnějšími silami. Jestliže chceme, aby těžiště zůstalo bez pohybu, *musí být součet vnějších sil roven nule.* Tím jsme zformulovali jednu podmínku pro statickou rovnováhu, ale tato podmínka nestačí. I kdyby vnější síly dávaly v součtu nulu, mohly by způsobit roztočení tělesa kolem osy procházející těžištěm. Jestliže chceme zabránit i roztočení (změně momentu hybnosti), musí být také *součet působících momentů roven nule.* Je to důsledek druhé impulsové věty. Pro statickou rovnováhu musí platit, že součet všech sil i součet všech momentů sil musí být roven nule, což můžeme zapsat jako

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{F}_2 + \boldsymbol{F}_3 + \ldots = 0 \tag{73}$$
$$\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 + \boldsymbol{M}_3 + \ldots = 0 \tag{74}$$

a to v případě jednoho tělesa představuje šest rovnic (síla i moment síly mají tři složky).

1. Stabilita rovnováhy

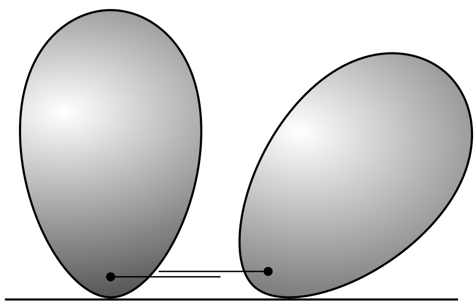
Je poměrně snadné vypočítat, ve kterém místě je nutné podepřít dlouhou tyč, aby zůstala v rovnováze. Intuitivně tušíme, že musíme najít těžiště, a to se zcela jistě nachází uprostřed. Zkuste to ale realizovat prakticky. I při té nejlepší snaze a pečlivosti tyč vždy spadne, což může být pro mnohé překvapením. Problém spočívá ve *stabilitě* (tedy spíše nestabilitě) tyče. Situaci vidíme na následujícím obrázku.



Obr. 9: Přestože dlouhou tyč podepřeme přesně v těžišti, zůstane její rovnováha labilní.

Při její teoretické rovnovážné poloze je součet všech sil i součet všech momentů sil nulový. Stačí však drobná výchylka a tyč se nikdy samovolně nevrátí do své původní rovnovážné polohy. Naopak, vznikne moment sil, který výchylku ještě více zvyšuje. Větší výchylka způsobí ještě další zvětšení momentu sil a dříve či později tyč spadne.

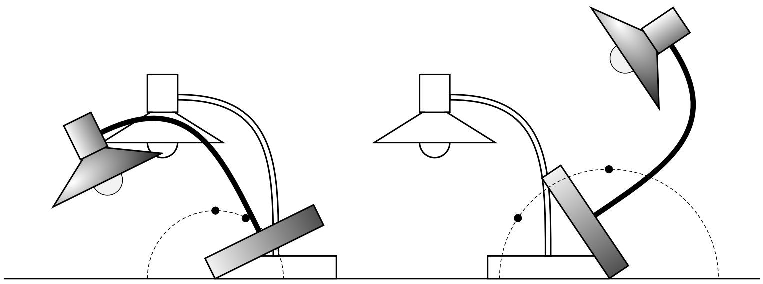
V běžném životě bychom mohli takových případů najít mnoho. Notoricky známé je například Kolumbovo vejce, tedy úkol postavit vejce na špičku, aby zůstalo stát bez vnější pomoci. Kolumbus údajně problém vyřešil tím, že u špičky mírně naklepl skořápku, a pak již lze vejce postavit relativně snadno.



Obr. 10: Teoreticky je možné postavit vejce na špičku tak, aby zůstalo stát ve stabilní rovnováze. Podmínkou však je, aby se jeho těžiště nacházelo velmi blízko špičky, což běžné vejce v žádném případě nesplňuje.

Popsané situace byly příkladem *labilní* rovnováhy, kdy reálné těleso vždy spadne, překlopí se nebo se skutálí. Opakem je *stabilní* rovnováha. Například, položíme-li minci na rovnou podložku, zůstane ležet bez pohybu. Minci bychom mohli s trochou opatrnosti postavit i na hranu a zůstala by taktéž v klidu aniž by spadla, ale je zřejmé, že mince nastojato bude méně stabilní než mince naležato. Jiným příkladem může být váza – ze zkušenosti víme, že vysoká a štíhlá váza je méně stabilní než nižší a širší. Přesněji řečeno, rozhodující je *podstava* vázy. Váza s květinami bývá méně stabilní než váza bez květin, nicméně u těžší vázy se rozdíl ve stabilitě projeví méně. A nalijeme-li do vázy vodu, její stabilita se zvyšuje, ale jen do určité míry. Uvažujme jiný příklad – ramínko na šaty. Víme, že spočívá ve stabilní rovnováze, přestože se věšákové tyče dotýká v jediném bodě, takže u něj vůbec nemá význam mluvit o velikosti podstavy.

Jak vidíme, se stabilitou rovnováhy se setkáváme často a mnohdy intuitivně víme, které faktory ji ovlivňují. Co je oním měřítkem stability? Je to síla, kterou musíme vyvinout, abychom těleso vychýlili? Nebo energie, kterou musíme tělesu dodat, aby se převrhlo? Nebo úhel, o který musíme těleso vychýlit, aby spadlo? Kritérií existuje celá řada, ale abychom rovnováhu rozlišili na stabilní a labilní, budeme si všímat pouze polohy těžiště tělesa. Jestliže těleso nepatrně vychýlíme, jeho těžiště se může zvýšit, snížit nebo zůstat v původní výšce. Chceme-li zvýšit těžiště tělesa, musíme působit silou a konat práci, což samovolně nenastane. Proto jde o *stabilní* rovnováhu, jestliže se při drobné výchylce zvyšuje těžiště. Naproti tomu, všechna tělesa mají tendenci vlivem gravitační síly snižovat své těžiště, pokud tomu nezabráníme. Takže snižuje-li se těžiště při drobné výchylce, jde o rovnováhu *labilní*. Jestliže se výška těžiště při vychylování nemění, mluvíme o indiferentní rovnováze. Běžnou situací je těleso, které spočívá ve stabilní



Obr. 11: Všechny body tělesa (a tedy i těžiště) se při překlápění otáčejí kolem bodu, který je krajním bodem podstavy. Převrhnutí tělesa znamená vychýlit jej do takové míry, že se těžiště dostane nad bod otáčení. Jak vidíme na obrázku, lampičku lze na jednu stranu překlopit snáze než na druhou stranu.

rovnováze na vodorovné podložce. V takovém případě často požadujeme, aby co nejlépe odolávalo pokusům o převrhnutí. Rozhodující parametry jsou tyto:

- **Velikost podstavy** Podstava by měla být co největší, protože při překlápění se těleso otáčí kolem jejího krajního bodu.

- **Výška těžiště** Nemá sice vliv na překlápěcí moment a tudíž ani na sílu, ale snížení těžiště vždy zvětší úhel i energii nutnou k převrácení.

- **Hmotnost** Měla by být co nejvyšší, protože energie, síla i moment síly na ni bude přímo úměrně záviset.

- **Výška** Svou roli může hrát i samotná výška, protože čím vyšší těleso, tím menší sílu potřebujeme k vyvinutí překlápěcího momentu. Nemusí to být pouze výška tělesa, ale například vzdálenost nějakého výčnělku od osy otáčení. Moment síly, úhel ani energie se tím neovlivní, ale síla může být menší, protože bude mít delší rameno.

Příklad (stabilita vázy)

Váza, jejíž těžiště se nachází ve výšce h=9 cm, má kruhovou podstavu o poloměru r=3 cm. Zjistěte, o jaký úhel je možné ji naklonit aniž by spadla.

Řešení

Existuje mezní poloha, při které váza balancuje na hraně a překlopí se buď do své původní polohy anebo spadne. V této mezní situaci se těžiště nachází právě nad bodem, kterým se váza dotýká podložky. Úhel α, o který je váza nakloněna, lze ze zadaných hodnot přímo vypočítat:

$$\tan\alpha = \frac{r}{h} \tag{75}$$

$$\alpha = \arctan\frac{r}{h} = 0{,}322 \approx 18^\circ \tag{76}$$

Příklad (dřevorubci nesou strom)

Tři dřevorubci nesou deset metrů dlouhý padesátikilogramový kmen stromu. Těžiště se nachází 2 metry od těžšího konce. Ve kterém místě musí dřevorubci kmen nést, aby každý nesl stejnou hmotnost, a současně byli kvůli manévrovatelnosti co nejdále od sebe?

Řešení

Mají-li dřevorubci nést stejnou hmotnost, musí být symetricky rozmístěni kolem těžiště. Jeden z nich bude na těžším konci, druhý přímo v těžišti a třetí čtyři metry od těžšího konce.

3.5 Moment setrvačnosti

Velmi často se setkáváme s případem, kdy nějaké těleso rotuje. Tělesa mohou mít různý složitý tvar a mohou mít komplikované rozložení hmotnosti a mohou rotovat kolem libovolné osy. Ukazuje se, že některé rotační charakteristiky těles lze vyjádřit pomocí několika málo čísel, což výrazně zjednoduší představy a usnadní výpočty. Veličina, která nese tyto užitečné informace o tělese, se nazývá *moment setrvačnosti* a značí se J. Ve svém obecném pojetí se jedná o tzv. *tenzor*, což je matice, která v tomto případě obsahuje devět prvků (třikrát tři), přičemž šest z nich je nezávislých. Budeme se zabývat speciálním případem, kdy máme předem zvolenou osu rotace a vlastnosti tělesa lze vystihnout pouze jedním číslem namísto šesti.

Začněme tím, že vypočítáme, jakou energii musíme dodat tělesu, abychom jej roztočili z klidu na úhlovou rychlost $\boldsymbol{\omega}$. Pro i-tý bod bude platit

$$E_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \tag{77}$$

Protože ve vztahu vystupuje druhá mocnina rychlosti, což je skalár, můžeme pracovat pouze se skaláry. Nechť R_i je vzdálenost od osy rotace. Pak musí platit, že $\boldsymbol{v}_i^2 = R_i^2 \boldsymbol{\omega}^2$ a vztah můžeme přepsat pomocí úhlové rychlosti. [4]

$$E_i = \frac{1}{2} m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 \tag{80}$$

Máme-li zjistit celkovou dodanou energii, posečítejme všechny rovnice pro jednotlivé body.

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i R_i^2 \boldsymbol{\omega}^2 \tag{81}$$

Úhlová rychlost je stejná pro všechny body, tak ji spolu s jednou polovinou vytkněme před sumu.

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^2 \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \tag{82}$$

Sumu $\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ budeme nazývat **moment setrvačnosti** a značit J. Jeho jednotka bude evidentně $\mathrm{kg\,m^2}$. Pak lze rotační energii napsat ve tvaru

$$E = \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}^2 \tag{83}$$

Takže známe-li moment setrvačnosti tělesa, pak lze snadno vypočítat, jak souvisí dodaná energie s rychlostí jeho rotace.

1. Souvislost momentu setrvačnosti a momentu hybnosti

Moment setrvačnosti můžeme využít nejen k výpočtu energie, ale také ke zjištění momentu hybnosti. Platí, že

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega} \tag{84}$$

kde $\boldsymbol{L}$ je moment hybnosti rotujícího tělesa, J je jeho moment setrvačnosti a $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost rotace. Vztah platí pouze pro dynamicky vyvážená

[4] Je vhodné připomenout, co znamená zápis $\boldsymbol{A}^2$, tj. co je to druhá mocnina vektoru. Můžeme to považovat za součin velikostí

$$\boldsymbol{A}^2 = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{A}| = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{78}$$

anebo skalární součin vektoru se sebou samým

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A_x A_x + A_y A_y + A_z A_z \tag{79}$$

Oba způsoby chápání jsou správné a dávají stejný výsledek.

tělesa, přičemž toto tvrzení ponechme bez důkazu. Jestliže obě strany této rovnice zderivujeme podle času, dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = J\boldsymbol{\varepsilon} \tag{85}$$

a to je ve spojitosti s druhou impulsovou větou velmi užitečný vztah. Z druhé impulsové věty víme, že derivace hybnosti podle času je rovna součtu vnějších momentů, takže musí platit

$$\boldsymbol{M} = J\boldsymbol{\varepsilon} \tag{86}$$

Známe-li moment sil a moment setrvačnosti, můžeme zjistit úhlové zrychlení tělesa. Zde je možné vidět jistou podobnost se vztahem $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$. Dále si můžeme všimnout zajímavého důsledku zákona zachování momentu hybnosti. Jestliže na těleso nebudeme působit vnějšími momenty sil, zůstane jeho moment hybnosti konstantní a tím i součin $J\boldsymbol{\omega}$. Ale jeho *moment setrvačnosti se změnit může*. Jestliže těleso přeuspořádá své rozložení hmotnosti, může změnit svůj moment setrvačnosti a tím i rychlost rotace. Tento efekt využívají krasobruslaři při provádění piruety – upaží ruce a roztočí se. Poté, co připaží, rychlost rotace se výrazně zvýší. Podobný fyzikální důvod má i vytvoření víru v umyvadle při vypouštění vody. Také u vesmírných objektů se setkáváme s tím, že zmenšení rozměrů v důsledku gravitace má za následek zmenšení momentu setrvačnosti a tím zrychlení rotace. Proto se například některé neutronové hvězdy otočí kolem své osy více než stokrát(!) za sekundu.

Příklad (krasobruslař)

Krasobruslař zmenšil svůj moment setrvačnosti na polovinu. Kolikanásobně vzrostla rychlost jeho rotace?

Řešení

Protože se moment hybnosti zachovává, musí platit, že součin $J\omega$ je konstantní. Z toho plyne, že jestliže se moment setrvačnosti zmenší na polovinu, rychlost rotace musí vzrůst dvojnásobně.

3.6 Výpočet momentu setrvačnosti pro některá tělesa

Moment setrvačnosti je (ve své zjednodušené podobě) vlastnost tělesa, kterou zjistíme podle vztahu $\sum R_i^2 m_i$ jestliže máme na mysli těleso složené z hmotných bodů. Reálné těleso uvažujeme spíše jako spojité, a pak pro výpočet momentu setrvačnosti bude platit integrál

$$J = \int_V \varrho R^2 \mathrm{d}m \tag{87}$$

přičemž integrujeme přes celý objem tělesa. Jestliže je hustota tělesa konstantní, pak hustotu můžeme vytknout před integrál.

1. Moment setrvačnosti tyče

Příklad (tyč rotující kolem středu)

Uvažujme, jak by se vypočítal moment setrvačnosti tyče o délce l a hmotnosti m, která rotuje kolem svého středu. Osa rotace nechť je kolmá na tyč.

Řešení

Jde o jednorozměrný problém, takže si vystačíme pouze s jednou osou (x). Uvažujme, že celou tyč rozdělíme na délkové elementy $\mathrm{d}x$, přičemž je zřejmé, že každý z nich bude mít hmotnost

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\mathrm{d}x \tag{88}$$

Pro výpočet momentu setrvačnosti budeme potřebovat vzdálenost elementu od osy rotace. Proto umístíme počátek osy právě na osu rotace, a pak souřadnice x bude přímo představovat vzdálenost od osy rotace.

$$J = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{m}{l}\,\mathrm{d}x = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-l/2}^{l/2} = \tag{89}$$

$$= \frac{m}{l}\left(\frac{l^3}{24}+\frac{l^3}{24}\right) = \frac{ml^2}{12} \tag{90}$$

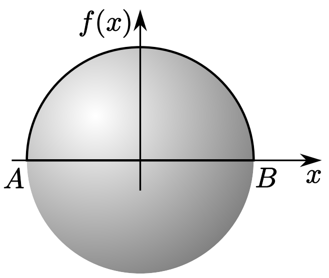
Příklad (tyč rotující kolem koncového bodu)

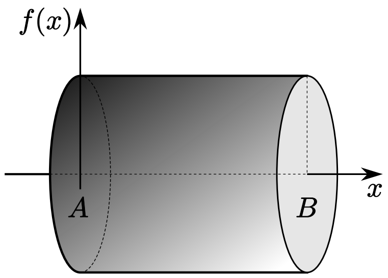
Vypočítejte moment setrvačnosti tyče o délce l a hmotnosti m, která rotuje kolem svého koncového bodu.

Výsledek: $J = \dfrac{ml^2}{3}$

2. Moment setrvačnosti homogenních rotačně symetrických těles

Uvažujme funkci $f(x)$, kde proměnná x probíhá od A do B.





Pod křivkou vznikne plošný útvar. Rotací tohoto útvaru kolem osy x získáme trojrozměrné rotačně symetrické těleso, jehož moment setrvačnosti můžeme vypočítat užitím vztahu

$$J = \frac{\pi}{2}\varrho\int_A^B f(x)^4\mathrm{d}x \tag{91}$$

Předpokládáme, že těleso je homogenní, má hustotu ϱ a rotuje kolem osy x.

Příklad (moment setrvačnosti koule)

Vypočítejte moment setrvačnosti koule o hmotnosti m a poloměru R, která rotuje kolem osy procházející jejím středem.

Řešení

Funkce, která vytváří plošný útvar (půlkruh), jehož rotací získáme kouli, má tvar $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Proměnná x musí probíhat od $-R$ do R. Pro moment setrvačnosti platí

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi}{2}\varrho \int_A^B f(x)^4 \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\varrho \int_{-R}^R (R^2 - x^2)^2 \,\mathrm{d}x = && (92)\\ &= \pi\varrho \int_0^R (R^2 - x^2)^2 \,\mathrm{d}x = \pi\varrho \int_0^R (R^4 - 2R^2x^2 + x^4)\,\mathrm{d}x = && (93)\\ &= \pi\varrho \left[R^4 x - \frac{2R^2x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right]_0^R = \pi\varrho\left(R^4R - \frac{2}{3}R^5 + \frac{R^5}{5}\right) = && (94)\\ &= \pi\varrho R^5 \frac{15 - 10 + 3}{15} = \pi\varrho R^5 \frac{8}{15} && (95) \end{aligned}$$

Pro hustotu koule ϱ platí, že jde o podíl hmotnosti a objemu, tj.

$$\varrho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3m}{4\pi R^3} \tag{96}$$

což dosadíme do vztahu pro moment setrvačnosti a získáme konečný výsledek

$$J = \frac{2}{5} m R^2$$

Příklad (moment setrvačnosti válce)

Vypočítejte moment setrvačnosti válce.

Výsledek: $J = \dfrac{mR^2}{2}$

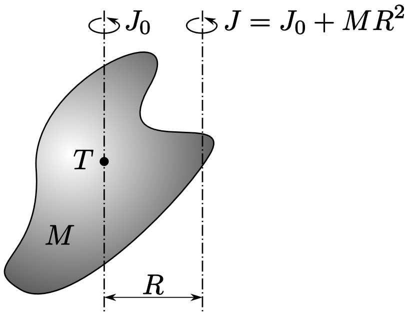
3. Steinerova věta

Steinerova věta umožňuje v určitých situacích snadno vypočítat moment setrvačnosti. Lze ji použít tehdy, jestliže známe moment setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm a potřebujeme zjistit moment setrvačnosti vzhledem k nějaké jiné ose, která je vůči původní ose posunuta o vzdálenost R.

Nový moment setrvačnosti J se vypočítá

$$J = J_0 + MR^2 \tag{97}$$

kde J_0 je moment setrvačnosti vůči ose procházející těžištěm, M je hmotnost tělesa a R je vzdálenost těžiště od nové osy rotace, tedy vzdálenost mezi oběma osami. Obě osy jsou samozřejmě rovnoběžné, protože nová osa



Obr. 12: Steinerova věta umožňuje snadno vypočítat moment setrvačnosti, jestliže posuneme osu rotace z těžiště o vzdálenost R.

vznikla posunutím osy původní, jinak Steinerovu větu nelze použít. Situace je znázorněna na následujícím obrázku: Vypočítat moment setrvačnosti nějakého tělesa může být často pracné a vyžaduje to znalost integrálního počtu nebo jiných komplikovaných metod. Proto bývají momenty setrvačností běžných těles k nalezení v tabulkách, a právě díky Steinerové větě je možné uvádět momenty setrvačnosti vzhledem k ose procházející těžištěm, protože přepočet na jinou osu *stejného směru* je velmi snadný. Stačí původní moment setrvačnosti zvětšit o MR^2, kde M je hmotnost tělesa a R je vzdálenost, o kterou je osa posunuta vůči původní těžišťové ose.

Příklad (moment setrvačnosti tyče – Steinerova věta)

Pomocí Steinerovy věty vypočítejte moment setrvačnosti tyče o hmotnosti m a délce l, která rotuje kolem svého koncového bodu. Vycházejte z toho, že moment setrvačnosti tyče rotující kolem středu je $J = \frac{ml^2}{12}$.

Výsledek: $J = \dfrac{ml^2}{3}$

3.7 Kinetická energie, práce a výkon

Kinetická energie tuhého tělesa je rovna součtu kinetických energií všech jeho jednotlivých bodů. Označme rychlost i-tého bodu o hmotnosti m_i symbolem $\boldsymbol{v}_i$. Pak kinetická energie tuhého tělesa je

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i^2 \tag{98}$$

kde N je celkový počet bodů v tuhém tělese.

1. Energie translačního pohybu

U tuhého tělesa, které koná pouze translační pohyb, mají všechny body stejnou rychlost $\boldsymbol{v}$, a proto ji můžeme vytknout před sumu. V takovém případě bude celková energie tělesa

$$E = \frac{1}{2} \boldsymbol{v}^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2 \tag{99}$$

2. Energie rotačního pohybu

Moment setrvačnosti je definován tak šikovně, že pro energii rotačního pohybu platí velmi podobný vztah jako pro energii translačního pohybu. Platí

$$E = \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}^2 \tag{100}$$

kde J je moment setrvačnosti a $\boldsymbol{\omega}$ je úhlová rychlost.

3. Energie obecného pohybu

Jak vypočítáme energii tělesa, které vykonává jak rotační, tak i translační pohyb? Takovou situaci si můžeme snadno představit – například kutálející se kulečníkovou kouli. Je možné uvažovat tak, že nejprve kouli pouze roztočíme, takže její těžiště zůstane nehybné. Na to spotřebujeme energii v souladu s výše uvedeným vztahem. Koule rotuje kolem těžiště, a proto i příslušný moment setrvačnosti musí platit pro osu procházející těžištěm. Následně těžiště koule působením síly urychlíme na rychlost $\boldsymbol{v}$, a na to potřebujeme energii $E = \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2$. Pro celkovou energii koule bude platit[5]

$$E = \frac{1}{2} J \boldsymbol{\omega}^2 + \frac{1}{2} m \boldsymbol{v}^2$$

Celková energie je tedy součtem translační a rotační energie. Platí to pouze za předpokladu, že rotaci vztahujeme vzhledem k ose procházející těžištěm. Snadno si totiž můžeme představit, že kdybychom měli nevyvážené těleso, u kterého by osa těžištěm neprocházela, tak musíme při rotaci působit silami. Tyto síly by při následné translaci *konaly práci* a výše uvedený vztah by neplatil.

Příklad (kutálející se koule)

Koule se skutálela po zprohýbané kolejnici. Dolní konec kolejnice je o 16cm níže než horní konec. Vypočítejte rychlost koule na dolním konci.

Řešení

Práce vykonaná gravitační silou (mgh) dodá kouli translační i rotační energii:

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \tag{101}$$

Protože se koule kutálí (odvaluje), tak platí, že $\omega = v/r$. Dále víme, že moment setrvačnosti koule je roven $\frac{2}{5} m r^2$. To dosadíme do výše uvedené rovnice, čímž dostaneme

$$mgh = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5} m r^2 \frac{v^2}{r^2} \tag{102}$$

[5] Je možné se setkat s nesprávným názorem, že rotující těleso se změně pohybu brání více než těleso v klidu. Že to není to pravda, vyplývá ihned ze vztahu $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$, kde $\boldsymbol{a}$ je zrychlení těžiště. Jak vidíme, síla způsobí stejné zrychlení těžiště bez ohledu na to, zda těleso rotuje či nikoli.

a z rovnice vyjádříme rychlost v:

$$v = \frac{10gh}{7} \doteq 15{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{103}$$

Příklad (energie setrvačníku)

Pro některé speciální aplikace existují záložní zdroje (UPS), které uchovávají energii v rotujícím setrvačníku. Předpokládejme, že takový zdroj napájí počítač o spotřebě 100 W a chceme, aby po výpadku proudu běžel počítač ještě deset minut. Jakou rychlost rotace musí mít setrvačník ve tvaru válce o hmotnosti $m = 5\,\mathrm{kg}$ a poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$?

Řešení

Potřebnou energii vypočteme z času T (v sekundách) a výkonu P. Tato energie musí být rovna rotační energii setrvačníku.

$$PT = \frac{1}{2}J\omega^2 \tag{104}$$

Moment setrvačnosti válce je J=$\frac{1}{2}mr^2$. Dále bude názornější, jestliže budeme počítat spíše s frekvencí otáčení f, protože to lze lépe představit. Platí, že $\omega = 2\pi f$

$$\begin{aligned} PT &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}mr^2(2\pi f)^2 && (105)\\ f &= \frac{1}{\pi r}\sqrt{\frac{PT}{m}} \doteq 349\,\mathrm{s^{-1}} && (106)\\ & && (107) \end{aligned}$$

Příklad (padající tyč)

Tyč o délce l stála svisle na podlaze, ale mírně se vychýlila, což způsobilo její pád. Jeden konec tyče se během pádu stále dotýkal podlahy. Vypočítejte, jaká bude rychlost druhého konce tyče těsně před dopadem.

Výsledek: $v = \sqrt{3gl}$

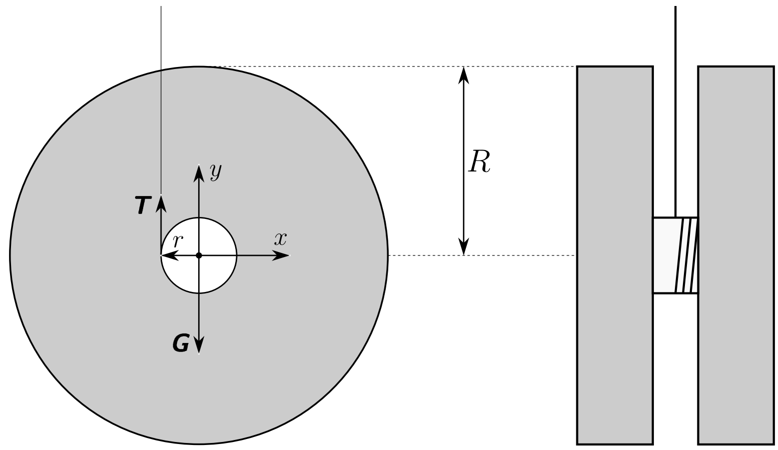
4 Řešené příklady

4.1 Jojo

Jojo o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{g}$ má poloměr $R = 5\,\mathrm{cm}$. Vnitřní osa o poloměru $r = 0,5\,\mathrm{cm}$, na které je namotán provázek, má zanedbatelnou hmotnost. Jojo tedy můžeme považovat za válec s momentem setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2 = 0,0001\,\mathrm{kg\,m^2}$.

1. Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a vyznačte působící síly.
   Počátek souřadné soustavy je vhodné umístit do středu joja.
2. Rozepište složky působících sil a jejich momenty.
3. Z výslednice sil vyjádřete zrychlení těžiště joja. (1.rovnice)
4. Z výsledného momentu sil vyjádřete úhlové zrychlení joja. (2.rovnice)
5. Jaká rovnice charakterizuje odmotávání provázku? (3.rovnice)
6. Ze soustavy rovnic vypočítejte zrychlení těžiště joja, úhlové zrychlení joja a tahovou sílu provázku.
7. Ze zrychlení joja vypočítejte, za jak dlouho se odmotá provázek o délce $l = 1\,\mathrm{m}$.
   Zrychlení dvakrát zintegrujte podle času, čímž získáte polohu joja.

Řešení:



Na jojo působí dvě síly. Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a tahová síla provázku $\boldsymbol{T}$. Počátek souřadné soustavy umístíme do středu joja, a pak můžeme rozepsat složky obou sil:

$$\boldsymbol{T} = [0; T; 0] \tag{108}$$
$$\boldsymbol{G} = [0; -mg; 0] \tag{109}$$

Výsledný pohyb těžiště je dán výslednicí sil, kterou označme $\boldsymbol{F}$. Když ji podělíme hmotností, získáme zrychlení:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{G} = [0; T - mg; 0] \tag{110}$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \left[0; \frac{T}{m} - g; 0\right] \tag{111}$$

Pro ypsilonovou složku zrychlení můžeme psát rovnici

$$I. \qquad a_y = \frac{T}{m} - g \tag{112}$$

Dále víme, že momenty sil způsobují roztáčení tělesa ($\varepsilon = \frac{\boldsymbol{M}}{J}$). Jak je vidět z obrázku, moment gravitační síly je nulový, protože těžiště je přímo v počátku souřadné soustavy. Jediný moment, který na jojo působí je moment tahové síly. Snadno jej vyjádříme pomocí vektorového součinu.

$$\boldsymbol{r}_T = [-r; 0; 0] \tag{113}$$
$$\boldsymbol{T} = [0; T; 0] \tag{114}$$
$$\boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{r}_T \times \boldsymbol{T} = [0; 0; -rT] \tag{115}$$
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\boldsymbol{M}_T}{J} = \left[0; 0; \frac{-rT}{J}\right] \tag{116}$$

Pro z-ovou složku úhlového zrychlení tak dostáváme rovnici

$$II. \qquad \varepsilon_z = \frac{-rT}{J} \tag{117}$$

Získali jsme tak dvě rovnice o třech neznámých a_y, T a ε_z, takže potřebujeme ještě nějakou další informaci k tomu, abychom mohli příklad vyřešit. Pomůže nám skutečnost, že z vnitřní osy joja se odmotává provázek. Ze zkušenosti víme, že čím rychleji jojo klesá, tím rychleji se otáčí. Jestliže klesá, pak je jeho rychlost záporná (zvolili jsme tak souřadnou soustavu). A z obrázku by mělo být patrné, že smysl otáčení je taktéž záporný. Platí to nejen pro rychlosti, ale také pro zrychlení. Čím větší má jojo zrychlení a_y směrem dolů, tím větší musí být jeho úhlové zrychlení ε_z a obě veličiny jsou záporné. Konstanta úměrnosti je r, tedy poloměr osy, na které je namotán provázek. Můžeme psát třetí rovnici

$$III. \qquad -a_y = -r\varepsilon_z \tag{118}$$

Nyní vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Začít můžeme například tak, že do třetí rovnice dosadíme a_y z první rovnice a ε_z z druhé rovnice. Vyřešením vypočítáme tahovou sílu T:

$$-a_y = -r\varepsilon_z \tag{119}$$
$$-\left(\frac{T}{m} - g\right) = -r\left(\frac{-rT}{J}\right) \tag{120}$$
$$-\frac{T}{m} + g = \frac{r^2 T}{J} \tag{121}$$
$$g = \frac{r^2 T}{J} + \frac{T}{m} \tag{122}$$
$$g = T\left(\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m}\right) \tag{123}$$
$$g = T\frac{mr^2 + J}{Jm} \tag{124}$$
$$T = \frac{gJm}{mr^2 + J} = \frac{Jg}{r^2 + \frac{J}{m}} \doteq 0,78\,\mathrm{N} \tag{125}$$
$$\tag{126}$$

Vztah pro tahovou sílu můžeme dosadit do první rovnice a tím získat a_y

$$\begin{aligned} a_y &= \frac{T}{m} - g = \frac{1}{m} \cdot \frac{Jgm}{mr^2 + J} - g = \frac{Jg}{mr^2 + J} - g = & (127) \\ &= g\left(\frac{J}{mr^2 + J} - 1\right) \doteq -0,2\,\mathrm{m\,s^{-2}} & (128) \end{aligned}$$

A nyní už zbývá jen dosadit tahovou sílu T do druhé rovnice a vypočítat úhlové zrychlení ε_z:

$$\varepsilon_z = \frac{-rT}{J} = -\frac{r}{J} \cdot \frac{Jg}{r^2 + \frac{J}{m}} = -\frac{rg}{r^2 + \frac{J}{m}} \doteq -39\,\mathrm{s^{-1}} \tag{129}$$

Známe-li zrychlení těžiště joja a_y, můžeme integrací podle času vypočítat jeho rychlost v_y. Integrační konstanta bude mít v tomto případě význam počáteční rychlosti joja $v_y(0)$, ale ta je nulová, protože na počátku bylo jojo v klidu. Obdobný proces použijeme ještě jednou – vypočítanou rychlost zintegrujeme podle času a tím získáme závislost polohy r_y na čase t. Počáteční poloha $r_y(0)$ byla nulová.

$$\begin{aligned} v_y &= \int a_y \,\mathrm{d}t = a_y t + v_y(0) = a_y t & (130) \\ r_y &= \int v_y \,\mathrm{d}t = \int a_y t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} a_y t^2 + r_y(0) = \frac{1}{2} a_y t^2 & (131) \end{aligned}$$

Čas, kdy se odmotá provázek joja, označme τ. Po odmotání provázku o délce l bude poloha těžiště joja rovna $r_y(\tau) = -l$. Záporné znaménko vyplývá z toho, že osa y směřuje nahoru.

$$\begin{aligned} -l &= \frac{1}{2} a_y \tau^2 & (132) \\ -\frac{2l}{a_y} &= \tau^2 & (133) \\ \tau &= \sqrt{-\frac{2l}{a_y}} \doteq 3,2\,\mathrm{s} & (134) \end{aligned}$$

Tím jsme vypočítali, za jak dlouho se odmotá provázek.

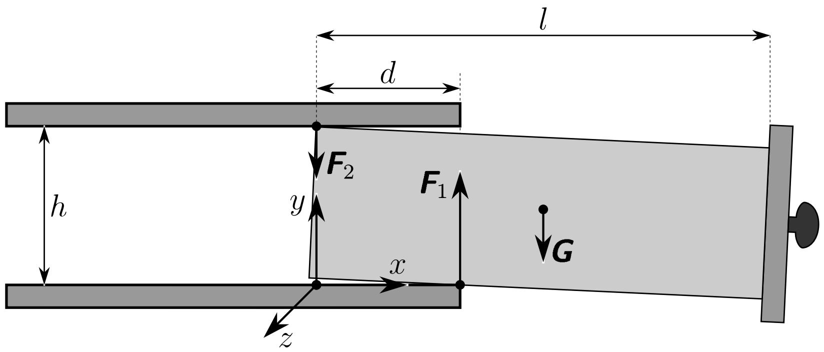
4.2 Namáhání zásuvky

Vypočítejte namáhání zásuvky stolu v různých situacích – je-li zasunutá, zpola vysunutá, a téměř zcela vysunutá. Přepokládejte, že se zásuvka dotýká stolu pouze ve dvou bodech, přičemž jeden bod je v místě zadní stěny zásuvky a druhý v přední stěně stolu. Zásuvka má hmotnost $m = 5\,\mathrm{kg}$ a nechť se těžiště nachází v jejím středu.

1. Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a zakreslete působící síly.
2. Rozepište souřadnice působišť sil, složky sil a jejich momenty.
3. Vyjádřete podmínky pro statickou rovnováhu. Ty povedou na soustavu rovnic, kterou vyřešte.

4. Vypočítejte působící síly pro zadané situace a stanovte, kterým směrem budou síly působit.
   Výsledky slovně okomentujte a nakreslete.

Řešení:



Zásuvka má délku l a míru jejího vysunutí bude popisovat rozměr d, který v našem případě představuje vzdálenost mezi body, kterými se zásuvka dotýká stolu. Na zásuvku působí tři síly, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{G}$. Síly, jejich působiště a momenty budeme vyjadřovat ve vztažné soustavě, jejíž počátek si zvolme například na dolní okraj zadní stěny zásuvky – viz obrázek. Nyní rozeberme sílu $\boldsymbol{F}_1$. Tou máme na mysli sílu, kterou působí stůl na zásuvku v místě přední stěny stolu. Bod, ve kterém síla působí, se nachází na ose x ve vzdálenosti d od počátku souřadné soustavy. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je svislá, takže bude mít nenulovou složku pouze v ose y. Pomocí vektorového součinu pak vypočítáme moment síly.

$$\boldsymbol{r}_{F1} = [d; 0; 0] \tag{135}$$
$$\boldsymbol{F}_1 = [0; F_1; 0] \tag{136}$$
$$\boldsymbol{M}_{F1} = \boldsymbol{r}_{F1} \times \boldsymbol{F}_1 = [0; 0; d\,F_1] \tag{137}$$

Další silou, která působí na zásuvku, je síla gravitační $\boldsymbol{G}$. Její působiště je v těžišti zásuvky. Pro jednoduchost[6] předpokládejme, že zásuvka má těžiště uprostřed. Abychom mohli vyjádřit střed zásuvky v ose x a y, musíme zavést i výšku zásuvky, kterou označme h. Jde ale pouze o formální záležitost, protože posunutí působiště ve směru působení síly nemá na moment síly žádný vliv. U gravitační síly nyní rozepíšeme její působiště, složky a vypočítáme její moment.

$$\boldsymbol{r}_G = \left[\frac{l}{2}; \frac{h}{2}; 0\right] \tag{138}$$
$$\boldsymbol{G} = [0; -mg; 0] \tag{139}$$
$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} = \left[0; 0; -\frac{lmg}{2}\right] \tag{140}$$

Třetí a poslední silou, která na zásuvku působí, je síla $\boldsymbol{F}_2$, která má působiště v místě, kde se stůl dotýká zadní stěny zásuvky. Nelze však říct

[6]Reálná situace bývá spíše taková, že zásuvka není vyvážená a její těžiště není uprostřed. To by se v našem příkladu projevilo pouze změnou působiště gravitační síly, jinak řešení zůstává stejné.

jednoznačně, kde tento bod leží, protože to záleží na situaci. Obrázek znázorňuje situaci, kdy je zásuvka vysunutá a styčný bod se nachází na horním okraji zásuvky. Nicméně zcela zasunutá zásuvka se stolu dotýká svým dolním okrajem. Přechod mezi těmito dvěma stavy je jistě každému znám – při vysouvání zásuvky se ozve slabý náraz přibližně ve chvíli, kdy zásuvku vysuneme více než do poloviny její délky. V tom okamžiku se změní působiště síly $\boldsymbol{F}_2$, ale na náš výpočet to naštěstí nemá žádný vliv, protože moment síly zůstane stejný. Složky síly $\boldsymbol{F}_2$ rozepíšeme v souladu s obrázkem, kde tato síla působí směrem dolů. Je to pouze počáteční volba a v dalším výpočtu se ukáže, že síla při vysouvání zásuvky mění svůj směr.

$$\boldsymbol{r}_{F2} = [0; h; 0] \tag{141}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = [0; -F_2; 0] \tag{142}$$
$$\boldsymbol{M}_{F2} = \boldsymbol{r}_{F2} \times \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0] \tag{143}$$

Jak vidíme, moment síly $\boldsymbol{F}_2$ je nulový bez ohledu na to, v jaké výšce h se její působiště nachází.

Máme dvě neznámé, F_1 a F_2. Z podmínek rovnováhy získáme dvě rovnice, ze kterých lze neznámé vypočítat. Má-li zásuvka setrvat ve statické rovnováze, musí být součet všech sil nulový, z čehož dostaneme první rovnici

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0] \tag{144}$$
$$I. \qquad F_1 - mg - F_2 = 0 \tag{145}$$

Dále musí platit, že součet všech momentů sil musí být taktéž nulový, což vede na druhou rovnici. Z té můžeme určit sílu F_1:

$$\boldsymbol{M}_{F1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F2} = [0; 0; 0] \tag{146}$$
$$II. \qquad dF_1 - \frac{lmg}{2} = 0 \tag{147}$$
$$dF_1 = \frac{lmg}{2} \tag{148}$$
$$F_1 = \frac{lmg}{2d} \tag{149}$$

Sílu F_1 dosadíme do první rovnice a tím získáme sílu F_2.

$$I. \qquad F_1 - mg - F_2 = 0 \tag{150}$$
$$\frac{lmg}{2d} - mg - F_2 = 0 \tag{151}$$
$$F_2 = \frac{lmg}{2d} - mg \tag{152}$$

Konkrétní vyčíslení sil nyní provedeme pro různé fáze vysunutí zásuvky. Nejprve předpokládejme, že zásuvka je zcela zasunutá, což znamená, že $d = l$. Pak platí

$$F_1 = \frac{lmg}{2l} = \frac{mg}{2} \tag{153}$$
$$F_2 = \frac{lmg}{2l} - mg = -\frac{mg}{2} \tag{154}$$
$$\boldsymbol{F}_1 = [0; F_1; 0] = [0; 25; 0] \tag{155}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = [0; -F_2; 0] = [0; 25; 0] \tag{156}$$

Vidíme, že síla F_2 vyšla opačně, než jsme ji zvolili na počátku. Obě síly jsou stejně velké a orientované směrem nahoru. Každá působí na jednom konci zásuvky a nese právě polovinu její tíhy.

Další situací, kterou máme rozebrat, je zásuvka zpola vysunutá. V takovém případě platí, že $d = \frac{l}{2}$:

$$F_1 = \frac{lmg}{2\frac{l}{2}} = mg \tag{157}$$

$$F_2 = \frac{lmg}{2\frac{l}{2}} - mg = mg - mg = 0 \tag{158}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = [0; F_1; 0] = [0; 50; 0] \tag{159}$$

$$\boldsymbol{F}_2 = [0; -F_2; 0] = [0; 0; 0] \tag{160}$$

Nyní síla $\boldsymbol{F}_2$ zcela vymizela a celou tíhu zásuvky nese pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ směřující nahoru. Působiště síly $\boldsymbol{F}_1$ je přímo pod těžištěm zásuvky. Tento stav ve skutečnosti nelze realizovat, protože se jedná o nestabilní rovnováhu. Zásuvka se vždy překlopí na jednu či druhou stranu.

Zbývá popsat poslední situaci, kdy je zásuvka vysunuta. Není možné vypočítat její úplné vysunutí, protože za d nelze dosadit nulu – nulou nelze dělit. Při pokusu tento stav realizovat by zásuvka nejspíše vypadla ven ze stolu. Můžeme pouze uvažovat situaci, která je tomuto blízká, tedy si představme *téměř zcela* vysunutou zásuvku, kdy se d blíží nule, $d \to 0$:

$$F_1 \to +\infty \tag{161}$$

$$F_2 \to +\infty \tag{162}$$

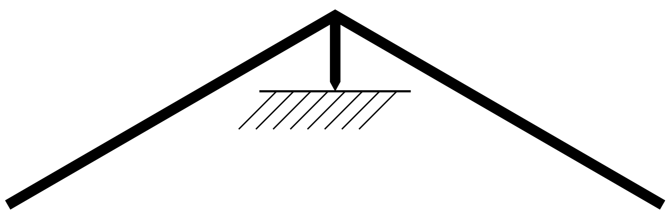
$$\boldsymbol{F}_1 \to [0; F_1; 0] = [0; \infty; 0] \tag{163}$$

$$\boldsymbol{F}_2 \to [0; -F_2; 0] = [0; -\infty; 0] \tag{164}$$

Síla $\boldsymbol{F}_1$ bude směřovat nahoru, síla $\boldsymbol{F}_2$ dolů a jejich velikost bude narůstat do takové míry, že nějaké místo pravděpodobně tak velké namáhání nevydrží a zásuvka se vlastní vahou vypáčí ven. Poničení zásuvky či stolu lze předejít dostatečnou vůlí, díky které se zásuvka přestane dotýkat stolu svým horním okrajem a vypadne dřív, než síly narostou do nebezpečných hodnot a něco poškodí.

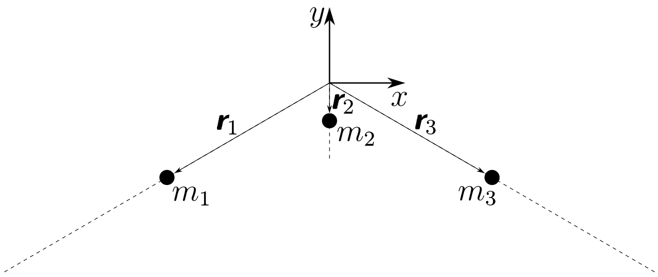
4.3 Výpočet těžiště, stabilita rovnováhy (tři špejle)

Těleso, které je znázorněno na obrázku, je tvořeno třemi špejlemi, které jsou spojeny v jednom bodě. Svislá špejle o délce d=6 cm má na dolním konci hrot, jímž se dotýká pevné podložky a kolem nějž se může těleso otáčet a kývat. Zbývající dvě špejle tvoří symetrická ramena o délce l=30 cm a svírají se svislicí úhel α=60 °.



1. Zvolte souřadnou soustavu (například tak, že její počátek bude v místě spojení všech špejlí, osa y bude směřovat nahoru a osa x doprava)
2. Předpokládejte, že je těleso složeno ze tří hmotných bodů (které odpovídají těžištím jednotlivých špejlí). Rozepište příslušné polohové vektory.
3. Z definičního vztahu $\mathbf{T} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$ vypočítejte polohu těžiště. Předpokládejte, že hmotnost špejle je úměrná její délce.
4. Na základě polohy těžiště rozhodněte, zda bude rovnováha stabilní či labilní.

Řešení:



$$
\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] && (165)\\
\mathbf{r}_2 &= \left[0; -\frac{d}{2}\right] && (166)\\
\mathbf{r}_3 &= \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] && (167)
\end{aligned}
$$

$$m_1 = m_3 = m \qquad m_2 = \frac{d}{l}m \tag{168}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = && (169)\\
&= \frac{m\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}m\left[0; -\frac{d}{2}\right] + m\left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{m + \frac{d}{l}m + m} = && (170)\\
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}\left[0; -\frac{d}{2}\right] + \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{1 + \frac{d}{l} + 1} = && (171)\\
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}\left[0; -\frac{d}{2}\right] + \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l} + 2} = && (172)\\
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha + 0 + \frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{d^2}{2l} - \frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l} + 2} = && (173)\\
&= \frac{\left[0; -\frac{d^2}{2l} - l\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l} + 2} = \left[0; \frac{-\frac{d^2}{2l} - l\cos\alpha}{\frac{d}{l} + 2}\right] && (174)\\
\mathbf{T} &\doteq [0; -7,1]\,\mathrm{cm} && (175)
\end{aligned}
$$

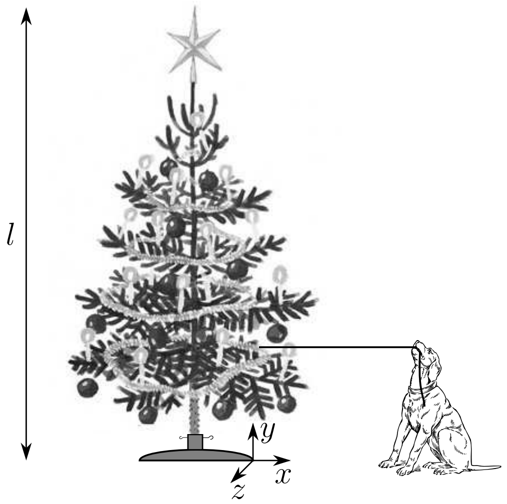
Těleso setrvá ve stabilní rovnováze, protože se jeho těžiště nachází *pod* hrotem, který se dotýká podložky. Jakákoli stranová výchylka způsobí zvýšení polohy těžiště a jeho následnou snahu o vrácení do původní stabilní polohy.

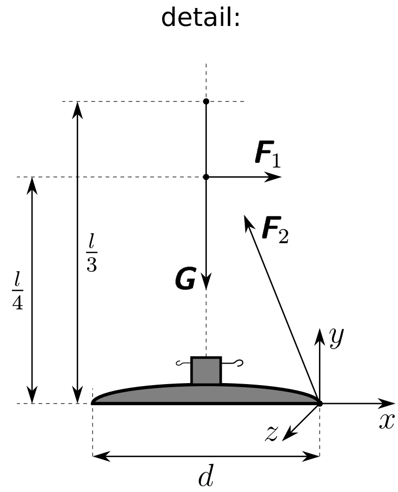
4.4 Stabilita vánočního stromečku

Puňťa se pokouší shodit dvoumetrový vánoční stromeček vodorovným tahem za elektrickou šňůru, která je zachycena za větvičku ve výši půl metru nad zemí (tj. ve čtvrtině výšky). Hmotnost stromečku je 10 kg, jeho těžiště je ve třetině jeho výšky a průměr stojanu je 40 cm. Jakou nejmenší silou musí Puňťa působit, aby se zdařil jeho úmysl? Jak velkou silou pak bude působit podlaha na stojan stromečku?

1. Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadný systém
2. V souladu se zvoleným souřadným systémem rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
3. Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
4. Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
5. Dosaďte číselné hodnoty, určete velikosti všech působících sil a napište odpověď.

Řešení:





Na vánoční stromeček působí tři síly - síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou Puňťa táhne za elektrickou šňůru (předpokládejme, že z našeho pohledu je to směrem doprava). Dále gravitační síla $\boldsymbol{G}$, jejíž působiště je v těžišti stromečku a třetí silou je $\boldsymbol{F}_2$, což je síla, kterou působí podlaha na stojan stromečku. Počátek souřadné soustavy zvolíme například tak, aby její počátek byl v působišti síly $\boldsymbol{F}_2$. Osa x nechť směřuje doprava, osa y nahoru. Rozepíšeme složky jednotlivých sil, souřadnice jejich působišť a pomocí vektorového součinu zjistíme momenty sil. Síla $\boldsymbol{F}_1$:

$$\boldsymbol{r}_{F_1} = \left[-\frac{d}{2}; \frac{l}{4}; 0\right] \tag{176}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = [F_{1x}; 0; 0] \tag{177}$$

$$\boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 = \left[0; 0; -F_{1x}\frac{l}{4}\right] \tag{178}$$

Gravitační síla $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_G &= \left[-\frac{d}{2};\frac{l}{3};0\right] && (179)\\ \boldsymbol{G} &= [0;-mg;0] && (180)\\ \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0;0;\frac{dmg}{2}\right] && (181) \end{aligned}$$

Síla $\boldsymbol{F}_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F_2} &= [0;0;0] && (182)\\ \boldsymbol{F}_2 &= [F_{2x};F_{2y};0] && (183)\\ \boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0;0;0] && (184) \end{aligned}$$

Těleso setrvá ve statické rovnováze, je-li součet sil nulový tj. $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = 0$

$$I. \quad F_{1x} + F_{2x} = 0 \qquad (185)$$

$$II. \quad -mg + F_{2y} = 0 \qquad (186)$$

a současně součet momentů sil také nulový, tj. $\boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} = 0$.

$$III. - F_{1x}\frac{l}{4} + \frac{dmg}{2} = 0 \qquad (187)$$

Máme tedy tři rovnice o třech neznámých F_{1x}, F_{2x} a F_{2y}. Z druhé rovnice ihned plyne neznámá F_{2y}.

$$\begin{aligned} -mg + F_{2y} &= 0 && (188)\\ F_{2y} &= mg && (189) \end{aligned}$$

Ze třetí rovnice vypočítáme F_{1x}

$$\begin{aligned} -F_{1x}\frac{l}{4} + \frac{dmg}{2} &= 0 && (190)\\ F_{1x}\frac{l}{4} &= \frac{dmg}{2} && (191)\\ F_{1x} &= \frac{2dmg}{l} && (192)\\ & && (193) \end{aligned}$$

a dosadíme do první rovnice.

$$\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} &= 0 && (194)\\ F_{2x} &= -F_{1x} && (195)\\ F_{2x} &= -\frac{2dmg}{l} && (196) \end{aligned}$$

Tím jsou výsledné síly vypočteny:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \left[\frac{2dmg}{l};0\right] = [40;0] && (197)\\ \boldsymbol{F}_2 &= \left[-\frac{2dmg}{l};mg\right] = [-40;100] && (198) \end{aligned}$$

Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ je na první pohled 40 newtonů, velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je

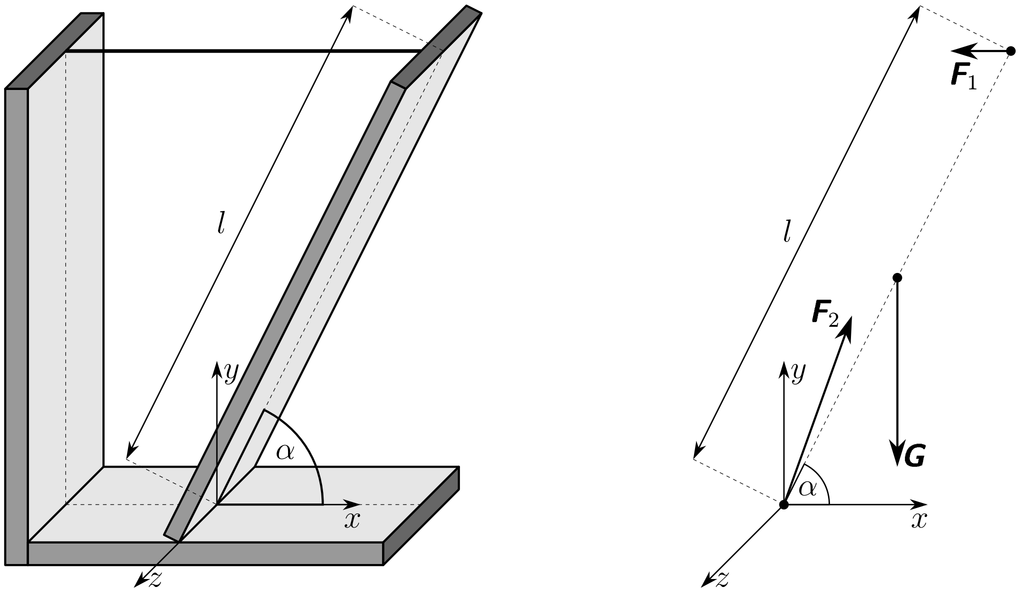
$$|\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{(-40)^2 + 100^2} \doteq 108\,N \qquad (199)$$

4.5 Rovnováha (deska, podlaha, vodorovný provaz)

Deska o hmotnosti m=8 kg stojí šikmo na podlaze, přičemž ve stabilní rovnováze ji drží vodorovný provaz, který je uchycen za její horní konec. Úhel mezi deskou a podlahou činí $\alpha = 60°$. Předpokládejme, že tření mezi podlahou a deskou je dostatečné k tomu, aby deska nesklouzla.

1. Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadnou soustavu.
2. V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
3. Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
4. Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
5. Vypočítejte tahovou sílu provazu a sílu, kterou působí podlaha na desku.

Řešení:



Na desku působí tři síly. Síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou táhne provaz, dále gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a třetí síla je $\boldsymbol{F}_2$, kterou působí podlaha na desku. Situaci zvolme tak, že se deska bude z našeho pohledu naklánět směrem doprava, a tak provaz ji bude táhnout směrem doleva. Počátek souřadné soustavy umístíme na dolní konec desky – viz obrázek. Rozepíšeme ramena jednotlivých sil (tj. souřadnice jejich působišť), složky sil a pomocí vektorového součinu vyjádříme u každé síly její moment.

Síla $\boldsymbol{F}_1$ má působiště na horním konci desky a působí pouze vodorovně, takže má nenulovou složku jen v ose x:

$$\boldsymbol{r}_{F_1} = [l\cos(\alpha); l\sin(\alpha); 0] \tag{200}$$

$$\boldsymbol{F}_1 = [-F_1; 0; 0] \tag{201}$$

$$\boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 = [0; 0; F_1 l\sin(\alpha)] \tag{202}$$

Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ má působiště v těžišti desky, tedy v jejím geometrickém středu. Působí pouze v ose y:

$$\boldsymbol{r}_G = \left[\frac{l}{2}\cos(\alpha); \frac{l}{2}\sin(\alpha); 0\right] \tag{203}$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] && (204)\\
\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0; 0; -\frac{mgl}{2}\sin(\alpha)\right] && (205)
\end{aligned}
$$

Síla $\boldsymbol{F}_2$ má nulové rameno, protože do jejího působiště jsme umístili počátek souřadné soustavy. Z toho vyplývá, že i její moment bude nulový. U této síly neznáme ani x-ovou ani y-ovou složku:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{F_2} &= [0; 0; 0] && (206)\\
\boldsymbol{F}_2 &= [F_{2x}; F_{2y}; 0] && (207)\\
\boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0] && (208)
\end{aligned}
$$

Abychom dokázali určit všechny síly, musíme vypočítat tři neznámé: F_1, F_{2x} a F_{2y}. K tomu využijeme podmínek pro statickou rovnováhu. Má-li deska setrvat ve statické rovnováze, musí být součet všech působících sil nulový a součet jejich momentů také nulový. Ze součtu sil vyplývají dvě rovnice

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 &&= [0; 0; 0] && (209)\\
I. \quad & -F_1 + F_{2x} &&= 0 && (210)\\
II. \quad & -mg + F_{2y} &&= 0 && (211)\\
& && && (212)
\end{aligned}
$$

Přičemž z druhé rovnice můžeme ihned vypočítat neznámou F_{2y}:

$$
F_{2y} = mg \qquad (213)
$$

Dále víme, že součet momentů sil musí být také nulový, z čehož nám plyne další rovnice, v pořadí třetí. Z té můžeme přímo vypočítat F_1:

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} &&= [0; 0; 0] && (214)\\
III. \quad & F_1 l \sin(\alpha) - \frac{mgl}{2}\cos(\alpha) &&= 0 && (215)\\
& F_1 \sin(\alpha) - \frac{mg}{2}\cos(\alpha) &&= 0 && (216)\\
& F_1 \sin(\alpha) &&= \frac{mg}{2}\cos(\alpha) && (217)\\
& F_1 &&= \frac{mg}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{mg}{2\tan(\alpha)} && (218)
\end{aligned}
$$

Jestliže F_1 dosadíme do první rovnice, získáme poslední chybějící neznámou F_{2x}:

$$
\begin{aligned}
-\frac{mg}{2\tan(\alpha)} + F_{2x} &= 0 && (219)\\
F_{2x} &= \frac{mg}{2\tan(\alpha)} && (220)
\end{aligned}
$$

Nyní známe všechny složky u obou sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ a můžeme je vyjádřit číselně. Stojí za povšimnutí, že výsledek nezáleží na délce desky.

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= \left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; 0; 0\right] \doteq [-23; 0; 0]\,\mathrm{N} && (221)\\
\boldsymbol{F}_2 &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; mg; 0\right] \doteq [23; 80; 0]\,\mathrm{N} && (222)
\end{aligned}
$$

Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ je na první pohled rovna 23 N. Zbývá zjistit velikost síly $\boldsymbol{F}_2$:

$$|\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{\left(\frac{mg}{2\tan(\alpha)}\right)^2 + (mg)^2} = mg\sqrt{\frac{1}{4\tan^2(\alpha)} + 1} \doteq 83\,\mathrm{N} \quad (223)$$

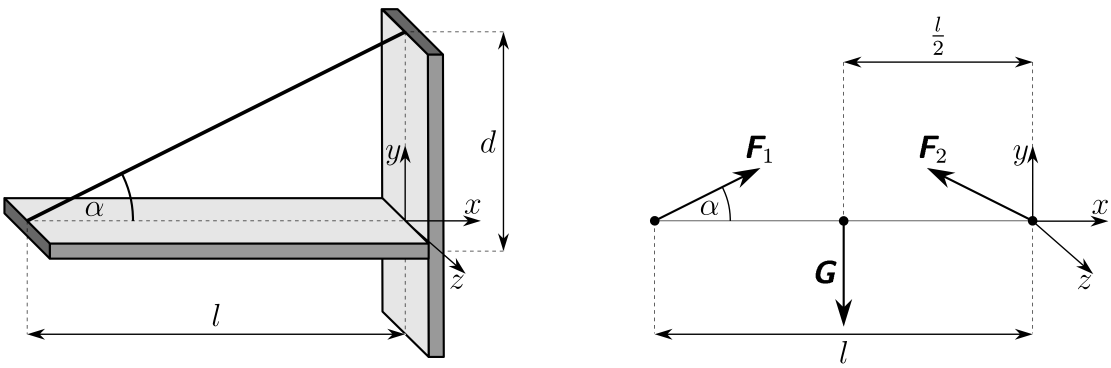
A tím je výpočet u konce. Tahová síla provazu je 23 N, přičemž podlaha působí na desku silou o velikosti přibližně 83 N.

4.6 Rovnováha (vodorovná deska, svislá stěna, provaz)

Vodorovná deska o délce $l = 2\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 8\,\mathrm{kg}$ drží ve stabilní poloze díky provazu a svislé stěně. Provaz je připevněn na jednom konci desky, vede šikmo vzhůru a je uchycen na stěnu. Opačný konec desky se dotýká stěny a v důsledku tření nesklouzne. Rozdíl výšek mezi dolním a horním koncem provazu činí $d = 1\,\mathrm{m}$. Vypočtěte tahovou sílu provazu. Jakou silou působí stěna na desku?

1. Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadnou soustavu.
2. V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
3. Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
4. Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
5. Dosaďte číselné hodnoty, určete velikosti všech působících sil a napište odpověď.

Řešení:



Na desku působí tři síly – tahová síla provazu $\boldsymbol{F}_1$, gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a síla $\boldsymbol{F}_2$, kterou působí stěna na desku. U tahové síly $\boldsymbol{F}_1$ známe směr působení, protože víme, že působí podél provazu. Neznáme ale její velikost. Tu označme F_1. Souřadnou soustavu zvolíme například tak, že její počátek bude v místě, kde se deska dotýká stěny (viz obrázek). Můžeme psát, že

$$\boldsymbol{r}_{F_1} = [-l; 0; 0] \quad (224)$$

$$\boldsymbol{F}_1 = [F_1\cos(\alpha); F_1\sin(\alpha); 0] \quad (225)$$

$$\boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 = [0; 0; -l\,F_1\sin(\alpha)] \quad (226)$$

Dále rozepišme gravitační sílu $\boldsymbol{G}$. U té známe všechny informace. Velikost a směr jsou dány hmotností desky a tíhovým zrychlením g. Působiště se nachází v těžišti desky, tedy v polovině její délky.

$$\boldsymbol{r}_G = \left[-\frac{l}{2}; 0; 0\right] \tag{227}$$
$$\boldsymbol{G} = [0; -mg; 0] \tag{228}$$
$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} = \left[0; 0; \frac{lmg}{2}\right] \tag{229}$$

Zbývá rozepsat sílu $\boldsymbol{F}_2$. Její působiště je přímo v počátku souřadné soustavy, a proto je její moment nulový. Složky vektoru síly označme F_{2x} a F_{2y}. Ani jednu z nich neznáme.

$$\boldsymbol{r}_{F_2} = [0; 0; 0] \tag{230}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = [F_{2x}; F_{2y}; 0] \tag{231}$$
$$\boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0] \tag{232}$$

Deska setrvá ve statické rovnováze, je-li součet všech sil nulový, tj. $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0]$

$$I. \quad F_1 \cos(\alpha) + F_{2x} = 0 \tag{233}$$
$$II. \quad F_1 \sin(\alpha) - mg + F_{2y} = 0 \tag{234}$$
$$\tag{235}$$

a současně součet momentů sil také nulový, tj. $\boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} = [0; 0; 0]$.

$$III. \quad -l\, F_1 \sin(\alpha) + \frac{lmg}{2} = 0 \tag{236}$$
$$\tag{237}$$

Získali jsme tři rovnice o třech neznámých F_1, F_{2x} a F_{2y}. Třetí rovnice obsahuje pouze neznámou F_1, a tak ji můžeme přímo vypočítat:

$$-l\, F_1 \sin(\alpha) + \frac{lmg}{2} = 0 \tag{238}$$
$$-F_1 \sin(\alpha) + \frac{mg}{2} = 0 \tag{239}$$
$$F_1 \sin(\alpha) = \frac{mg}{2} \tag{240}$$
$$F_1 = \frac{mg}{2\sin(\alpha)} \tag{241}$$

Tento výsledek dosadíme do první i druhé rovnice a vypočítáme zbývající dvě neznámé F_{2x} a F_{2y}. Řešením první rovnice získáme F_{2x}

$$F_1 \cos(\alpha) + F_{2x} = 0 \tag{242}$$
$$\frac{mg}{2\sin(\alpha)} \cos(\alpha) + F_{2x} = 0 \tag{243}$$
$$F_{2x} = -\frac{mg}{2\sin(\alpha)} \cos(\alpha) \tag{244}$$
$$F_{2x} = -\frac{mg}{2\tan(\alpha)} \tag{245}$$

a vyřešením druhé rovnice vypočteme F_{2y}:

$$\begin{aligned} F_1 \sin(\alpha) - mg + F_{2y} &= 0 && (246) \\ \frac{mg}{2\sin(\alpha)} \sin(\alpha) - mg + F_{2y} &= 0 && (247) \\ \frac{mg}{2} - mg + F_{2y} &= 0 && (248) \\ -\frac{mg}{2} + F_{2y} &= 0 && (249) \\ F_{2y} &= \frac{mg}{2} && (250) \end{aligned}$$

Nyní můžeme napsat vektor síly $\boldsymbol{F}_1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= [F_1 \cos(\alpha); F_1 \sin(\alpha); 0] = && (251) \\ &= \left[\frac{mg}{2\sin(\alpha)} \cos(\alpha); \frac{mg}{2\sin(\alpha)} \sin(\alpha); 0\right] = && (252) \\ &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; \frac{mg}{2}; 0\right] && (253) \end{aligned}$$

a vektor síly $\boldsymbol{F}_2$:

$$\boldsymbol{F}_2 = \left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; \frac{mg}{2}; 0\right] \tag{254}$$

Na první pohled je zřejmé, že *velikosti* obou sil musí být stejné, protože se liší pouze znaménkem u x-ové souřadnice. Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ (a tudíž i $\boldsymbol{F}_2$) jsme přímo vypočítali ze třetí rovnice. Platí, že

$$F_1 = |\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| \tag{255}$$

takže řešení celého příkladu je téměř u konce a zbývá dosadit číselné hodnoty. Ve vztazích se vyskytuje úhel α – ten sice přímo neznáme, ale z obrázku vyplývá, že známe jeho tangens

$$\tan(\alpha) = \frac{d}{l} \tag{256}$$

takže vektory obou sil lze přepsat pomocí d a l a vyčíslit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; \frac{mg}{2}; 0\right] = \left[\frac{mgl}{2d}; \frac{mg}{2}; 0\right] = && (257) \\ &= \left[\frac{8 \cdot 10 \cdot 2}{2 \cdot 1}; \frac{8 \cdot 10}{2}; 0\right] = [80; 40; 0]\ \text{N} && (258) \\ \boldsymbol{F}_2 &= \left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; \frac{mg}{2}; 0\right] = \left[-\frac{mgl}{2d}; \frac{mg}{2}; 0\right] = && (259) \\ &= \left[-\frac{8 \cdot 10 \cdot 2}{2 \cdot 1}; \frac{8 \cdot 10}{2}; 0\right] = [-80; 40; 0]\ \text{N} && (260) \end{aligned}$$

Na závěr vypočítáme velikosti obou sil:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| &= \sqrt{\left(\frac{mgl}{2d}\right)^2 + \left(\frac{mg}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{mg}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{l^2}{d^2} + 1\right)} = && (261) \\ &= \frac{mg}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2 + 1} = \frac{8 \cdot 10}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2 + 1} \doteq 89\,\text{N} && (262) \end{aligned}$$

Tahová síla provazu je stejně velká jako síla, kterou působí stěna na desku. Obě síly jsou zrcadlově symetrické.

5 Závěr

Modul *Mechanika tuhého tělesa* pojednává v první části o fyzikálních principech, kterými se řídí soustava hmotných bodů. Byla zde vysvětlena první i druhá impulsová věta a nich vyplývající zákony zachování hybnosti a momentu hybnosti. Byl také popsán význam středu hmotnosti.

Druhá část je věnovaná speciálnímu případu soustavy hmotných bodů, kdy se hmotné body vzájemně nepohybují a tak tvoří tuhé těleso. Byly zde popsány charakteristiky, které se týkají tuhého tělesa – translace, rotace, moment setrvačnosti a velký význam je přikládán statické rovnováze a její stabilitě.

Výklad je průběžně doplňován řešenými i neřešenými příklady, které se vztahují k probírané kapitole. Ve třetí části modulu jsou řešené příklady, které kombinují principy probrané dříve.

Literatura

[1] Feynman R., Leighton R., Sands M.: *Feynmannovy přednášky z fyziky s řešenými příklady 1/3*, ISBN-80-7200-405-0

[2] Wikipedie, `http://cs.wikipedia.org`, heslo *Impulsová věta* `http://cs.wikipedia.org/wiki/Impulsov%C3%A1_v%C4%9Bta`

[3] Wikipedie, `http://cs.wikipedia.org`, heslo *Moment setrvačnosti* `http://cs.wikipedia.org/wiki/Moment_setrva%C4%8Dnosti`