29. listopadu 2011

Jestliže v příkladech najdete jakoukoli chybu (výpočetní, logickou, gramatickou, slohovou, typografickou aj.), pošlete mi o tom prosím mail. A snažte se být první! :-)

Aktuální verzi tohoto dokumentu najdete na adrese
`http://fyzika.fce.vutbr.cz/pub/priklady1.pdf`

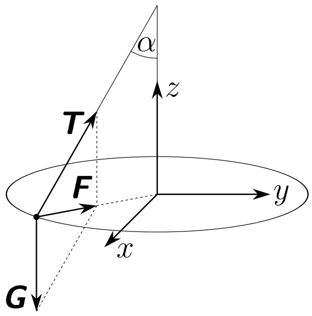
Obsah

1. Dítě na řetízkovém kolotoči

Sedačka řetízkového kolotoče má i s dítětem hmotnost $m = 50\,\mathrm{kg}$ a pohybuje se rovnoměrným pohybem po kružnici o poloměru R=10 m. Oběžná doba sedačky je T=6,28 sekund, takže $\omega = 2\pi/T \doteq 1\,\mathrm{s}^{-1}$.

- Nakreslete obrázek, souřadnou soustavu a vyznačte působící síly. Do obrázku znázorněte součet sil (pomocí rovnoběžníku). Která síla je výsledná?
  Počátek souřadné soustavy umístěte do středu kružnice, po které se pohybuje sedačka kolotoče. Osa z nechť směřuje nahoru.
- Předpokládejte, že poloha sedačky kolotoče závisí na čase takto: $\boldsymbol{r} = [R\sin(\omega t); R\cos(\omega t); 0]$. Derivováním podle času vypočítejte rychlost a zrychlení.
- Načrtněte kružnici (pohled shora) a vyznačte vektor rychlosti a zrychlení.
- Vypočítejte velikost rychlosti a velikost zrychlení sedačky.
- Vypočítejte vektor (tj. všechny tři složky) tahové síly řetězu.
- Vypočítejte velikost tahové síly řetězu.
- Vypočítejte úhel mezi tahovou silou řetězu a osou z. Pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory využijte vlastnosti skalárního součinu $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}| \cdot |\boldsymbol{B}| \cdot \cos(\alpha)$

Řešení:



Na obrázku jsou zakresleny tři síly. Neznamená to však, že na sedačku řetízkového kolotoče působí všechny tři *dohromady*. Na sedačku působí síly dvě – gravitace $\boldsymbol{G}$ a tah řetězu $\boldsymbol{T}$. Jestliže tyto dvě síly sečteme, získáme výslednici $\boldsymbol{F}$. Platí tedy

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{G} + \boldsymbol{T}$$

Výsledná síla $\boldsymbol{F}$ určuje, jak se bude sedačka pohybovat. Platí to i naopak – jestliže známe pohyb sedačky, můžeme vypočítat výslednou sílu $\boldsymbol{F}$, což využijeme při řešení tohoto příkladu. Pohyb sedačky je popsán polohovým vektorem $\boldsymbol{r}$. Jestliže jej dvakrát zderivujeme podle času, zjistíme zrychlení. To vynásobíme hmotností a získáme tím výslednici sil ($\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$).

Víme, že sedačka koná rovnoměrný pohyb po kružnici s poloměrem R, která leží v rovině xy a její střed leží v počátku souřadné soustavy. Úhlovou rychlost označme ω. (Platí, že $\omega = \frac{2\pi}{T}$, kde T je perioda pohybu). Tento druh pohybu lze popsat polohovým vektorem

$$\boldsymbol{r} = [R\sin(\omega t); R\cos(\omega t); 0]$$

Zderivováním podle času zjistíme rychlost a dalším zderivováním zjistíme zrychlení.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = [R\omega\cos(\omega t); -R\omega\sin(\omega t); 0] \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = [-R\omega^2\sin(\omega t); -R\omega^2\cos(\omega t); 0]
\end{aligned}$$

Zrychlení vynásobíme hmotností, čímž získáme výslednici sil:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = [-mR\omega^2\sin(\omega t); -mR\omega^2\cos(\omega t); 0]$$

O výslednici sil víme, že je složena z gravitační síly $\boldsymbol{G}$ a tahové síly řetězu $\boldsymbol{T}$. Gravitační sílu známe

$$\boldsymbol{G} = [0; 0; -mg]$$

a tak můžeme snadno vypočítat sílu $\boldsymbol{T}$ (odečítáním vektorů):

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{G} + \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{T} &= \boldsymbol{F} - \boldsymbol{G} = [-mR\omega^2\sin(\omega t); -mR\omega^2\cos(\omega t); mg]
\end{aligned}$$

Je pochopitelné, že síla $\boldsymbol{T}$ závisí na čase, protože se každým okamžikem mění směr, kterým řetěz musí táhnout, aby udržel sedačku na kruhové dráze. Jak ale uvidíme, *velikost* tahové síly $\boldsymbol{T}$ již na čase nezávisí – řetěz je namáhán stále stejně velkou silou. Vypočítejme tedy velikost síly $\boldsymbol{T}$:

$$\begin{aligned}
|T| &= \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2} = \\
&= \sqrt{(-mR\omega^2\sin(\omega t))^2 + (-mR\omega^2\cos(\omega t))^2 + (mg)^2} = \\
&= \sqrt{m^2R^2\omega^4\sin^2(\omega t) + m^2R^2\omega^4\cos^2(\omega t) + m^2g^2} = \\
&= m\sqrt{R^2\omega^4(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) + g^2} = \\
&= m\sqrt{R^2\omega^4 + g^2} = 50\sqrt{10^2 \cdot 1^4 + 10^2} \doteq 707\,\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Nyní vypočítejme úhel α, který představuje odklon řetězu od svislého směru. Jde tedy o to najít úhel mezi vektorem $\boldsymbol{T}$ a jakýmkoli dalším vektorem, který má svislý směr. Vyberme si nejjednodušší možnost

$$\boldsymbol{z} = [0; 0; 1]$$

což je vektor ve směru osy z, jehož velikost je na první pohled rovna jedné.

$$|\boldsymbol{z}| = 1$$

Pro výpočet úhlu mezi dvěma vektory využijeme vlastnosti skalárního součinu.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{T} &= |z|\,|T|\,\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) &= \frac{\boldsymbol{z} \cdot \boldsymbol{T}}{|z|\,|T|} = \frac{(0 \cdot T_x + 0 \cdot T_y + 1 \cdot T_z)}{1 \cdot (m\sqrt{R^2\omega^4 + g^2})} = \\ &= \frac{mg}{m\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}} = \frac{g}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}} \end{aligned}$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{g}{\sqrt{R^2\omega^4 + g^2}}\right) = \arccos\left(\frac{10}{\sqrt{10^2 \cdot 1^4 + 10^2}}\right) = 45\,^\circ$$

Hmotnost sedačky se z výpočtu vykrátila, což dobře souhlasí se zkušeností, že prázdná sedačka u řetízkového kolotoče se vychýlí o stejný úhel jako sedačka s dítětem.

Zbývá ještě vypočítat velikost rychlosti

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{(R\omega\cos(\omega t))^2 + (-R\omega\sin(\omega t))^2 + 0^2} = \\ &= \sqrt{R^2\omega^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))} = \sqrt{R^2\omega^2} = R\omega \doteq 10\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

a posledním úkolem je výpočet velikosti zrychlení:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{a}| &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{(-R\omega^2\sin(\omega t))^2 + (-R\omega^2\cos(\omega t))^2 + 0^2} = \\ &= \sqrt{R^2\omega^4(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} = \sqrt{R^2\omega^4} = R\omega^2 \doteq 10\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

2. První kosmická rychlost

Hmotnost Země je $M = 5,98 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ a její poloměr (na rovníku) je $R_z = 6378\,\mathrm{km}$. Gravitační konstanta je $\kappa = 6,6742 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,s^{-2}\,kg^{-1}}$. Předpokládejte, že se těsně nad povrchem Země nachází nějaké těleso o hmotnosti m. Dále (hypoteticky) předpokládejme, že Země nemá atmosféru, a tak odpor vzduchu můžeme zanedbat.

- Nakreslete obrázek.
- Vypočítejte velikost zrychlení tělesa.
- Vypočítejte, jak velkou rychlost musí mít těleso, aby nikdy nedopadlo na povrch Země a pohybovalo se po kruhové dráze.
  Tato rychlost se nazývá první kosmická rychlost. Pro dostředivé zrychlení platí $a = R\omega^2$.
- Jestliže se těleso pohybuje po kruhové dráze, za jak dlouho obletí zeměkouli?

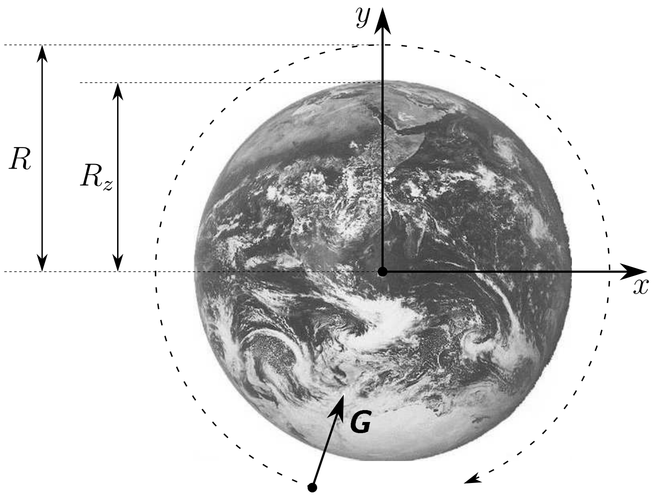
Řešení:
Ze zadání příkladu plyne, že máme uvažovat těleso, které se *nedotýká* povrchu Země. To je velmi příznivá situace, protože nemusíme uvažovat sílu, kterou povrch Země působí na těleso. Z Newtonova gravitačního zákona vypočítáme sílu, která působí na těleso. Následně sílu vydělíme hmotností tělesa a tím získáme jeho zrychlení:

$$\begin{aligned} F &= \kappa\frac{mM}{R^2} \\ a &= \frac{F}{m} = \kappa\frac{M}{R^2} \doteq 9,81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

Za R dosadíme vzdálenost od středu Země a dostáváme známou hodnotu $9,81$. Je zřejmé, že zrychlení tělesa nezávisí na jeho hmotnosti (ta se z výpočtu vykrátila) ani na rychlosti. Ať se bude těleso pohybovat jakkoli, jeho zrychlení bude vždy rovno

$$a = \kappa \frac{M}{R^2}$$

Toto zrychlení může mít různé důsledky. Například způsobuje zpomalování vzhůru vrženého tělesa, narůstání rychlosti při volném pádu, zakřivení dráhy u šikmého vrhu a podobně.



Vzhledem k tomu, že zrychlení směřuje vždy do středu Země, dokáže za vhodných podmínek *udržet těleso na kruhové dráze* a plní tak funkci dostředivého zrychlení o velikosti $R\omega^2$. Musí platit, že

$$R\omega^2 = \kappa \frac{M}{R^2}$$

Dále využijeme vztahu pro úhlovou rychlost při rovnoměrném pohybu po kružnici: $\omega = v/R$.

$$\begin{aligned} R\left(\frac{v}{R}\right)^2 &= \kappa \frac{M}{R^2} \\ Rv^2 &= \kappa M \\ v &= \sqrt{\frac{\kappa M}{R}} \end{aligned}$$

Dosadíme-li za R poloměr Země, můžeme vypočítat první kosmickou rychlost

$$v = \sqrt{\frac{6,6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}{6378 \cdot 10^3}} \doteq 7911\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 7,9\,\mathrm{km\,s^{-1}}$$

což je nejnižší (teoretická) rychlost, kterou musí mít těleso, aby se z něj stala umělá družice. Jednu periodu oběhu opět zjistíme ze vztahu $\omega = v/R$, přičemž $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{T} &= \frac{v}{R} \\ T &= \frac{2\pi R}{v} \end{aligned}$$

Mohli jsme uvažovat i tak, že perioda je obvod zeměkoule lomeno rychlost družice. Rychlost v již známe z předchozího výpočtu.

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi R}{\sqrt{\frac{\kappa M}{R}}} = 2\pi R \sqrt{\frac{R}{\kappa M}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa M}} R\, R^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa M}} R^{\frac{3}{2}} \\ T &= \frac{2\pi}{\sqrt{6,6742 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24}}} \cdot (6378 \cdot 10^3)^{3/2} \doteq 5066\,\mathrm{s} \approx 84\,\mathrm{minut} \end{aligned}$$

Což je necelých jeden a půl hodiny. Vypočtené hodnoty platí pro pohyb těsně nad povrchem Země. Ve skutečnosti však musí být družice alespoň ve výšce 300 km od povrchu Země, jinak by byl jejich pohyb příliš zpomalován přítomností atmosféry, jejíž účinky jsme dosud zanedbávali.

Na základě předcházejících úvah bychom mohli snadno vypočítat oběžnou dobu Měsíce (což je zhruba jeden měsíc), případně výšku geostacionární družice, jejíž oběžná doba je právě jeden den a proto se nachází nad stále stejným místem povrchu Země.

Za jasných nocí je možné pozorovat na obloze pomalu se pohybující světelné body. Jedná se o blízké družice s krátkou oběžnou dobou, která bývá pouze několik hodin (zkuste ověřit výpočtem).

3. Tenisté odpálili vodorovně míčky

Tři tenisté, Ensac Uös, Uon Dap a Ödyk Cim vodorovně odpálili ve stejný okamžik míčky z výšky h=1.5 metrů nad povrchem hřiště. První míček měl rychlost v_1=20 m s^{-1}, druhý měl rychlost v_2=40 m s^{-1} a třetí v_3=60 m s^{-1}.

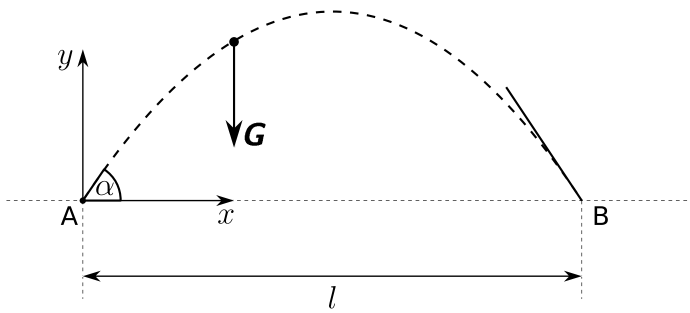
- Nakreslete obrázek, a zvolte souřadnou soustavu.
- Určete, v jakých časových intervalech dopadnou míčky na zem?

4. Atlet hodil oštěp

Atlet hodil oštěp do vzdálenosti l=60 m. Let oštěpu trval 3 sekundy. O kolik metrů by mohl atlet svůj výkon zlepšit, kdyby hodil pod optimálním úhlem 45°?

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a zakreslete působící sílu.
- V souladu se zvolenou souřadnou soustavou určete vektor zrychlení oštěpu.
- Zrychlení integrujte podle času, čímž získáte rychlost. Další integrací vypočítejte polohu.
  Integrační konstanty v tomto případě představují počáteční podmínky.
- Ze vzdálenosti dopadu a doby letu oštěpu vypočítejte velikost počáteční rychlosti.
- Vypočítejte vzdálenost dopadu pro stejně velkou počáteční rychlost a úhel hodu změněný na 45°.

Řešení:



Úlohu si zjednodušíme tím, že zanedbáme odpor vzduchu a navíc nebudeme uvažovat výšku atleta. Předpokládáme tedy, že oštěp byl hozen z povrchu země. Počátek souřadné soustavy zvolíme do místa, odkud byl oštěp hozen. Osa x povede vodorovně a bude protínat místo dopadu oštěpu. Osa y nechť směřuje vzhůru. Po celou dobu letu oštěpu na něj působí pouze gravitační síla, která všem předmětům bez ohledu na jejich hmotnost či rychlost uděluje zrychlení g směrem dolů. To znamená, že vektor zrychlení bude mít složky

$$\boldsymbol{a} = [0; -g]$$

Zintegrujeme-li zrychlení podle času, dostaneme rychlost. Integrál bude neurčitý, a tak známe jeho výsledek až na integrační konstanty, které mají v tomto případě význam počáteční rychlosti, tj. rychlosti v bodě A, kterou můžeme zapsat

$$\boldsymbol{v}_A = [v_{Ax}; v_{Ay}]$$

Při integraci vektoru integrujeme každou jeho složku zvlášť. Pro x-ovou složku rychlosti dostáváme

$$v_x = \int a_x \,\mathrm{d}t = \int 0 \,\mathrm{d}t = 0 + v_{Ax} = v_{Ax}$$

Jak je vidět, ve vodorovném směru se oštěp pohybuje rovnoměrně, protože rychlost v ose x se nemění. Nyní vypočítáme rychlost v ose y:

$$v_y = \int a_y \,\mathrm{d}t = \int -g \,\mathrm{d}t = -gt + v_{Ay}$$

Ze zrychlení jsme integrací vypočítali vektor rychlosti

$$\boldsymbol{v} = [v_{Ax}; -gt + v_{Ay}]$$

a obdobným způsobem vypočítáme z rychlosti polohu $\boldsymbol{r}$. Rychlost zintegrujeme podle času, přičemž integrační podmínky budou mít význam počáteční polohy, tj. polohy oštěpu ve fázi A. Právě tam jsme ale zvolili počátek souřadné soustavy, a tak počáteční poloha oštěpu bude nulová

$$\boldsymbol{r}_A = [r_{Ax}; r_{Ay}] = [0; 0]$$

a integrační konstanty budou též nulové. Vypočítáme x-ovou i ypsilonovou složku polohy:

$$\begin{aligned} r_x &= \int v_x \,\mathrm{d}t = \int v_{Ax} \,\mathrm{d}t = v_{Ax}t + r_{Ax} = v_{Ax}t \\ r_y &= \int v_y \,\mathrm{d}t = \int (-gt + v_{Ay}) \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{Ay}t + r_{Ay} = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{Ay}t \end{aligned}$$

Zjistili jsme, že poloha oštěpu závisí na čase takto:

$$\boldsymbol{r} = \left[v_{Ax}t; -\frac{1}{2}gt^2 + v_{Ay}t\right]$$

Ze zadání víme, že oštěp dopadne po třech sekundách letu do vzdálenosti l. Při dopadu oštěpu bude jeho y-ová souřadnice nulová. Dopad oštěpu odpovídá stavu B, takže můžeme psát

$$\boldsymbol{r}_B = \left[v_{Ax}t_B; -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_{Ay}t_B\right] = [l; 0]$$

a z toho získáváme dvě rovnice o dvou neznámých v_{Ax} a v_{Ay}. Řešením získáme vektor počáteční rychlosti:

$$\begin{aligned} I. \qquad v_{Ax}t_B &= l \\ v_{Ax} &= \frac{l}{t_B} = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ II. \qquad -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_{Ay}t_B &= 0 \\ -\frac{1}{2}gt_B + v_{Ay} &= 0 \\ v_{Ay} &= \frac{1}{2}gt_B = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

Počáteční rychlost $\boldsymbol{v}_A$ má složky

$$\boldsymbol{v}_A = \left[\frac{l}{t_B}; \frac{1}{2}gt_B\right] = [20; 15]\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

a její velikost je

$$|\boldsymbol{v}_A| = \sqrt{v_{Ax}^2 + v_{Ay}^2} = \sqrt{\left(\frac{l}{t_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}gt_B\right)^2} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Nyní předpokládejme, že atlet hodí oštěp stejně velkou rychlostí (tu budeme značit v_A), ale pod pozměněným úhlem $\alpha = 45°$. Vektor počáteční rychlosti tak bude mít složky

$$\boldsymbol{v}_A = [v_{Ax}; v_{Ay}] = [v_A \cos(\alpha); v_A \sin(\alpha)]$$

Je zřejmé, že pro pohyb oštěpu budou platit stejné úvahy, které nás dovedly k výše uvedené soustavě dvou rovnic označené $I.$ a $II.$. Druhou rovnici použijme k výpočtu času, kdy oštěp dopadne na zem:

$$\begin{aligned} II. \qquad -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_{Ay}t_B &= 0 \\ -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_A\sin(\alpha)t_B &= 0 \\ v_A\sin(\alpha) &= \frac{1}{2}gt_B \\ t_B &= \frac{2v_A\sin(\alpha)}{g} \doteq 3{,}54\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Je vidět, že oštěp poletí po delší čas než v prvním případě. Dobu letu dosadíme do první rovnice a z ní vypočteme vzdálenost dopadu:

$$\begin{aligned} I. \qquad v_{Ax}t_B &= l \\ l &= v_{Ax}t_B = v_A\cos(\alpha)t_B = v_A\cos(\alpha)\frac{2v_A\sin(\alpha)}{g} = \\ &= \frac{2v_A^2\cos(\alpha)\sin(\alpha)}{g} = \frac{v_A^2\sin(2\alpha)}{g} \doteq 62{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Pro poslední úpravu výrazu byl použit vzorec pro sinus dvojnásobného argumentu

$$2\cos(\alpha)\sin(\alpha) = \sin(2\alpha)$$

ale pro číselné dosazení to nebylo nutné. Atlet by tedy mohl zlepšit svůj výkon přibližně o $2,5$ metru. V zadání je řečeno, že úhel 45° je optimální, tedy že oštěp dolétne při tomto úhlu nejdále. Je možné to i matematicky dokázat tím, že vztah pro vzdálenost *zderivujeme podle úhlu* a položíme rovno nule, tj. budeme hledat extrém, v našem případě maximum.

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\left(\frac{v_A^2\sin(2\alpha)}{g}\right) \\ 0 &= \frac{v_a^2\cos(2\alpha)2}{g} \\ 0 &= \cos(2\alpha) \\ \frac{\pi}{2} &= 2\alpha \\ \alpha &= \frac{\pi}{4} \approx 45^\circ \end{aligned}$$

Hledání optimálního úhlu sice nebylo součástí zadání, ale výpočet bylo vhodné uvést pro potvrzení všeobecně známé skutečnosti, že nejlepší je házet pod úhlem 45°. Je ale nutné dodat, že vrcholoví oštěpaři musí brát v úvahu odpor vzduchu, jeho aerodynamický vztlak, a výšku své postavy, a tak se uvádí, že optimální úhel je 33°. To však není možné dokázat při našich zjednodušujících představách.

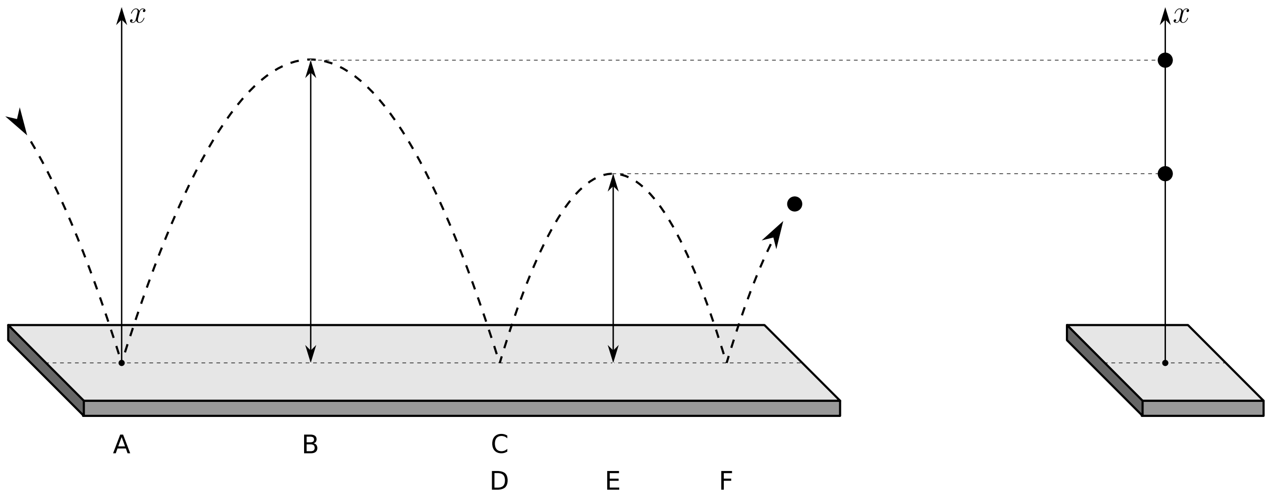
5. Odrazy skákací kuličky

Na desku stolu byla volně puštěna skákací kulička. Pomocí mikrofonu a zvukové karty počítače bylo změřeno, že mezi prvními dvěma odrazy uplynula doba jedné sekundy. Třetí náraz se ozval již po 0,8 sekundy po druhém.

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou osu a určete zrychlení kuličky.
- Ze zrychlení vyjádřete rychlost pomocí integrace podle času.
- Integrací rychlosti podle času zjistěte závislost polohy na čase.
- Vypočítejte rychlosti kuličky těsně po odrazech.
- Vypočítejte koeficient restituce.

- Vypočítejte obě výšky, do kterých kulička vyskočila.

Řešení:



Situaci vystihuje *pravá* část obrázku, protože pohyb se děje pouze ve svislé ose a kulička dopadá kolmo na desku. Bylo by však obtížné do jedné osy zakreslit všechny fáze děje. V levé části obrázku proto vidíme šikmý dopad, který slouží pouze pro názornost.

Pohyb kuličky si můžeme představit jako dva svislé vrhy, jeden se odehrává ve fázích A až C, druhý ve fázích D až F. Oba se chovají podle stejných zákonitostí, takže stačí vyřešit pouze první vrh. Při výpočtu si vystačíme s jedinou souřadnou osou x, která bude směřovat vzhůru a její počátek umístíme na povrch desky. Po celou dobu letu působí na kuličku pouze gravitační zrychlení, takže můžeme psát

$$\boldsymbol{a} = [-g]$$

Jestliže zrychlení zintegrujeme podle času, získáme tím závislost rychlosti na čase.

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t$$

Zrychlení je konstanta, takže ji můžeme vytknout před integrál. Integrál je však *neurčitý*, a tak jeho výsledek známe až na integrační konstantu. Ta má v našem případě význam počáteční rychlosti v_A.

$$v(t) = \int -g\,\mathrm{d}t = -gt + v_A$$

Nyní zintegrujeme rychlost $v(t)$ a tím vypočítáme závislost polohy na čase. Integrační konstanta má v tomto případě význam počáteční polohy r_A, ale ta je nulová, protože jsme počátek souřadné soustavy umístili na povrch desky (viz obrázek).

$$r(t) = \int v(t)\,\mathrm{d}t = \int (-gt + v_A)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}gt^2 + v_A t$$

Dále víme, že čas $t = t_C$ odpovídá okamžiku, kdy kulička podruhé dopadla a její poloha r_C je opět nulová. Z toho vypočítáme její počáteční rychlost v_A:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}gt_C^2 + v_A t_C &= r_C \\
-\frac{1}{2}gt_C^2 + v_A t_C &= 0 \\
-\frac{1}{2}gt_C + v_A &= 0 \\
v_A &= \frac{1}{2}g\,t_C = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}$$

Což odpovídá rychlosti po prvním odrazu. Stejnou úvahou bychom vypočítali rychlost v_D, tedy rychlost po druhém odrazu.

$$v_D = \frac{1}{2}g\,t_F = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Koeficient restituce je podíl vzájemných rychlostí dvou těles těsně po srážce (stav D) a vzájemných rychlostí těsně před srážkou (stav C). Jedním z těles je deska stolu. Její rychlost označme V a můžeme ji považovat za nulovou ($V = 0$). Rychlost v_C neznáme, ale zato známe v_A, která je stejně velká, jen opačně orientovaná ($v_C = -v_A$). Lze to i dokázat:

$$v_C = -g\,t_C + v_A = -g\,t_C + \frac{1}{2}g\,t_C = -\frac{1}{2}g\,t_C = -5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Tedy rychlost, s jakou vylétla je stejně velká, jako rychlost, kterou dopadla. Koeficient restituce se v našem případě vypočítá

$$C = \frac{v_D - V}{V - v_C} = \frac{v_D}{-v_C} = \frac{\frac{1}{2}g\,t_F}{-(-\frac{1}{2}g\,t_C)} = \frac{t_F}{t_C} = \frac{4}{5} = 0,8$$

Dalším úkolem je spočítat, do jaké výšky kulička vyskočí, což odpovídá stavu B. Nejprve musíme vypočítat čas t_B, kdy je kulička v „mrtvém bodě“ – její výška r_B je maximální a její rychlost nulová ($v_B = 0$).

$$\begin{aligned} -gt_B + v_A &= v_B \\ -gt_B + v_A &= 0 \\ -gt_B &= -v_A \\ t_B &= \frac{v_A}{g} = \frac{1}{2}gt_C\frac{1}{g} = \frac{t_C}{2} \end{aligned}$$

Výsledek není nijak překvapivý, maximální výšky kulička dosáhne v polovině času svého letu. Čas t_B dosadíme do vztahu pro výpočet polohy a tím získáme výsledek r_B:

$$\begin{aligned} r_B &= -\frac{1}{2}gt_B^2 + v_At_B = -\frac{1}{2}g\left(\frac{t_C}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}gt_C\left(\frac{t_C}{2}\right) = \\ &= -\frac{1}{2}g\frac{t_C^2}{4} + \frac{g\,t_C^2}{4} = -\frac{g\,t_C^2}{8} + \frac{g\,t_C^2}{4} = \frac{g\,t_C^2}{8} = 1,25\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

Obdobný vztah musí platit i pro druhou fázi letu. Vypočítejme r_E:

$$r_E = \frac{g\,t_F^2}{8} = 0,8\,\mathrm{m}$$

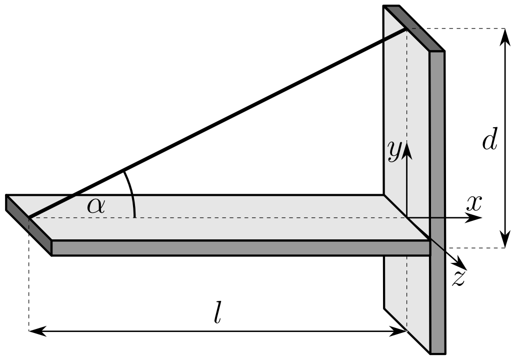
Kulička vylétne do menší výšky než v první fázi, což se dalo očekávat.

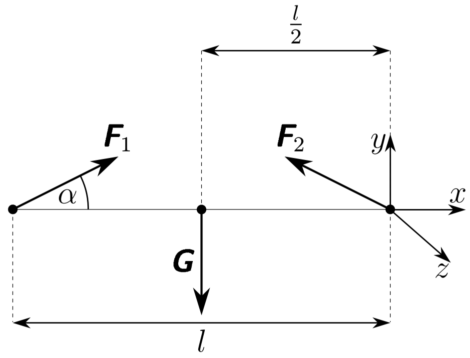
6. Rovnováha (vodorovná deska, svislá stěna, provaz)

Vodorovná deska o délce $l = 2\,\mathrm{m}$ a hmotnosti $m = 8\,\mathrm{kg}$ drží ve stabilní poloze díky provazu a svislé stěně. Provaz je připevněn na jednom konci desky, vede šikmo vzhůru a je uchycen na stěnu. Opačný konec desky se dotýká stěny a v důsledku tření nesklouzne. Rozdíl výšek mezi dolním a horním koncem provazu činí $d = 1\,\mathrm{m}$. Vypočtěte tahovou sílu provazu. Jakou silou působí stěna na desku?

- Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadnou soustavu.
- V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
- Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
- Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
- Dosaďte číselné hodnoty, určete velikosti všech působících sil a napište odpověď.

Řešení:





Na desku působí tři síly – tahová síla provazu $\boldsymbol{F}_1$, gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a síla $\boldsymbol{F}_2$, kterou působí stěna na desku. U tahové síly $\boldsymbol{F}_1$ známe směr působení, protože víme, že působí podél provazu. Neznáme ale její velikost. Tu označme F_1. Souřadnou soustavu zvolíme například tak, že její počátek bude v místě, kde se deska dotýká stěny (viz obrázek). Můžeme psát, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F_1} &= [-l; 0; 0] \\ \boldsymbol{F}_1 &= [F_1 \cos(\alpha); F_1 \sin(\alpha); 0] \\ \boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 &= [0; 0; -l\, F_1 \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

Dále rozepišme gravitační sílu $\boldsymbol{G}$. U té známe všechny informace. Velikost a směr jsou dány hmotností desky a tíhovým zrychlením g. Působiště se nachází v těžišti desky, tedy v polovině její délky.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_G &= \left[-\frac{l}{2}; 0; 0\right] \\ \boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] \\ \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0; 0; \frac{lmg}{2}\right] \end{aligned}$$

Zbývá rozepsat sílu $\boldsymbol{F}_2$. Její působiště je přímo v počátku souřadné soustavy, a proto je její moment nulový. Složky vektoru síly označme F_{2x} a F_{2y}. Ani jednu z nich neznáme.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F_2} &= [0; 0; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &= [F_{2x}; F_{2y}; 0] \\ \boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0] \end{aligned}$$

Deska setrvá ve statické rovnováze, je-li součet všech sil nulový, tj. $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0]$

$$\begin{aligned} I. &\quad F_1 \cos(\alpha) + F_{2x} = 0 \\ II. &\quad F_1 \sin(\alpha) - mg + F_{2y} = 0 \end{aligned}$$

a současně součet momentů sil také nulový, tj. $\boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} = [0; 0; 0]$.

$$III. \quad -l\, F_1 \sin(\alpha) + \frac{lmg}{2} = 0$$

Získali jsme tři rovnice o třech neznámých F_1, F_{2x} a F_{2y}. Třetí rovnice obsahuje pouze neznámou F_1, a tak ji můžeme přímo vypočítat:

$$\begin{aligned} -l\, F_1 \sin(\alpha) + \frac{lmg}{2} &= 0 \\ -F_1 \sin(\alpha) + \frac{mg}{2} &= 0 \\ F_1 \sin(\alpha) &= \frac{mg}{2} \\ F_1 &= \frac{mg}{2 \sin(\alpha)} \end{aligned}$$

Tento výsledek dosadíme do první i druhé rovnice a vypočítáme zbývající dvě neznámé F_{2x} a F_{2y}. Řešením první rovnice získáme F_{2x}

$$\begin{aligned} F_1\cos(\alpha)+F_{2x} &= 0\\ \frac{mg}{2\sin(\alpha)}\cos(\alpha)+F_{2x} &= 0\\ F_{2x} &= -\frac{mg}{2\sin(\alpha)}\cos(\alpha)\\ F_{2x} &= -\frac{mg}{2\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

a vyřešením druhé rovnice vypočteme F_{2y}:

$$\begin{aligned} F_1\sin(\alpha)-mg+F_{2y} &= 0\\ \frac{mg}{2\sin(\alpha)}\sin(\alpha)-mg+F_{2y} &= 0\\ \frac{mg}{2}-mg+F_{2y} &= 0\\ -\frac{mg}{2}+F_{2y} &= 0\\ F_{2y} &= \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

Nyní můžeme napsat vektor síly $\boldsymbol{F}_1$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= [F_1\cos(\alpha);F_1\sin(\alpha);0]=\\ &= \left[\frac{mg}{2\sin(\alpha)}\cos(\alpha);\frac{mg}{2\sin(\alpha)}\sin(\alpha);0\right]=\\ &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)};\frac{mg}{2};0\right] \end{aligned}$$

a vektor síly $\boldsymbol{F}_2$:

$$\boldsymbol{F}_2=\left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)};\frac{mg}{2};0\right]$$

Na první pohled je zřejmé, že *velikosti* obou sil musí být stejné, protože se liší pouze znaménkem u x-ové souřadnice. Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ (a tudíž i $\boldsymbol{F}_2$) jsme přímo vypočítali ze třetí rovnice. Platí, že

$$F_1=|\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2|$$

takže řešení celého příkladu je téměř u konce a zbývá dosadit číselné hodnoty. Ve vztazích se vyskytuje úhel α – ten sice přímo neznáme, ale z obrázku vyplývá, že známe jeho tangens

$$\tan(\alpha)=\frac{d}{l}$$

takže vektory obou sil lze přepsat pomocí d a l a vyčíslit:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)};\frac{mg}{2};0\right]=\left[\frac{mgl}{2d};\frac{mg}{2};0\right]=\left[\frac{8\cdot10\cdot2}{2\cdot1};\frac{8\cdot10}{2};0\right]=[80;40;0]\ \mathrm{N}\\ \boldsymbol{F}_2 &= \left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)};\frac{mg}{2};0\right]=\left[-\frac{mgl}{2d};\frac{mg}{2};0\right]=\left[-\frac{8\cdot10\cdot2}{2\cdot1};\frac{8\cdot10}{2};0\right]=[-80;40;0]\ \mathrm{N} \end{aligned}$$

Na závěr vypočítáme velikosti obou sil:

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{F}_1|=|\boldsymbol{F}_2| &= \sqrt{\left(\frac{mgl}{2d}\right)^2+\left(\frac{mg}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{mg}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{l^2}{d^2}+1\right)}=\\ &= \frac{mg}{2}\sqrt{\left(\frac{l}{d}\right)^2+1}=\frac{8\cdot10}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{1}\right)^2+1}\doteq 89\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

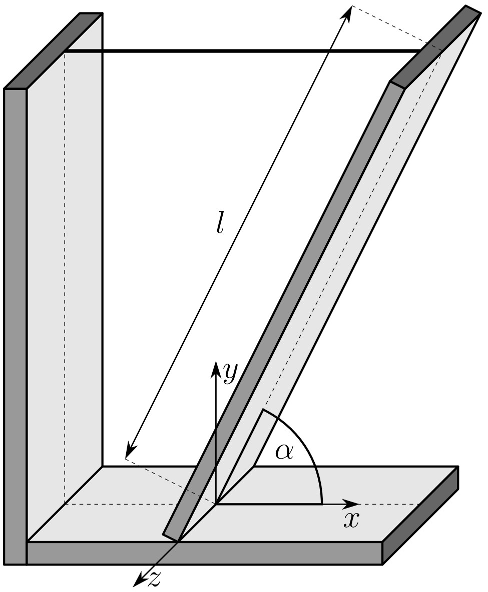
Tahová síla provazu je stejně velká jako síla, kterou působí stěna na desku. Obě síly jsou zrcadlově symetrické.

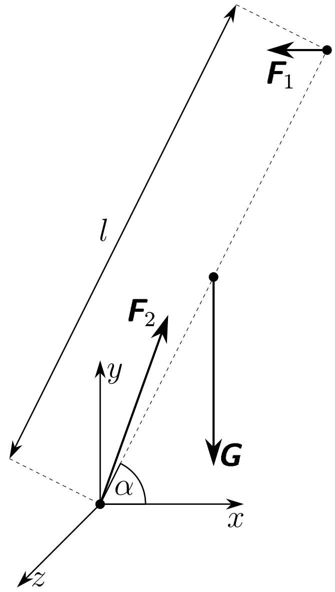
7. Rovnováha (deska, podlaha, vodorovný provaz)

Deska o hmotnosti m=8 kg stojí šikmo na podlaze, přičemž ve stabilní rovnováze ji drží vodorovný provaz, který je uchycen za její horní konec. Úhel mezi deskou a podlahou činí $\alpha = 60°$. Předpokládejme, že tření mezi podlahou a deskou je dostatečné k tomu, aby deska nesklouzla.

- Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadnou soustavu.
- V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
- Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
- Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
- Vypočítejte tahovou sílu provazu a sílu, kterou působí podlaha na desku.

Řešení:





Na desku působí tři síly. Síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou táhne provaz, dále gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a třetí síla je $\boldsymbol{F}_2$, kterou působí podlaha na desku. Situaci zvolme tak, že se deska bude z našeho pohledu naklánět směrem doprava, a tak provaz ji bude táhnout směrem doleva. Počátek souřadné soustavy umístíme na dolní konec desky – viz obrázek. Rozepíšeme ramena jednotlivých sil (tj. souřadnice jejich působišť), složky sil a pomocí vektorového součinu vyjádříme u každé síly její moment.

Síla $\boldsymbol{F}_1$ má působiště na horním konci desky a působí pouze vodorovně, takže má nenulovou složku jen v ose x:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F_1} &= [l\cos(\alpha); l\sin(\alpha); 0] \\ \boldsymbol{F}_1 &= [-F_1; 0; 0] \\ \boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 &= [0; 0; F_1 l \sin(\alpha)] \end{aligned}$$

Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ má působiště v těžišti desky, tedy v jejím geometrickém středu. Působí pouze v ose y:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_G &= \left[\frac{l}{2}\cos(\alpha); \frac{l}{2}\sin(\alpha); 0\right] \\ \boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] \\ \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0; 0; -\frac{mgl}{2}\cos(\alpha)\right] \end{aligned}$$

Síla $\boldsymbol{F}_2$ má nulové rameno, protože do jejího působiště jsme umístili počátek souřadné soustavy. Z toho vyplývá, že i její moment bude nulový. U této síly neznáme ani x-ovou ani y-ovou složku:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F_2} &= [0; 0; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &= [F_{2x}; F_{2y}; 0] \\ \boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0] \end{aligned}$$

Abychom dokázali určit všechny síly, musíme vypočítat tři neznámé: F_1, F_{2x} a F_{2y}. K tomu využijeme podmínek pro statickou rovnováhu. Má-li deska setrvat ve statické rovnováze, musí být součet všech působících sil nulový a součet jejich momentů také nulový. Ze součtu sil vyplývají dvě rovnice

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0] \\ I. \qquad -F_1 + F_{2x} &= 0 \\ II. \qquad -mg + F_{2y} &= 0 \end{aligned}$$

Přičemž z druhé rovnice můžeme ihned vypočítat neznámou F_{2y}:

$$F_{2y} = mg$$

Dále víme, že součet momentů sil musí být také nulový, z čehož nám plyne další rovnice, v pořadí třetí. Z té můžeme přímo vypočítat F_1:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} &= [0; 0; 0] \\ III. \qquad F_1 l \sin(\alpha) - \frac{mgl}{2} \cos(\alpha) &= 0 \\ F_1 \sin(\alpha) - \frac{mg}{2} \cos(\alpha) &= 0 \\ F_1 \sin(\alpha) &= \frac{mg}{2} \cos(\alpha) \\ F_1 &= \frac{mg}{2} \cdot \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{mg}{2\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

Jestliže F_1 dosadíme do první rovnice, získáme poslední chybějící neznámou F_{2x}:

$$\begin{aligned} -\frac{mg}{2\tan(\alpha)} + F_{2x} &= 0 \\ F_{2x} &= \frac{mg}{2\tan(\alpha)} \end{aligned}$$

Nyní známe všechny složky u obou sil $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ a můžeme je vyjádřit číselně. Stojí za povšimnutí, že výsledek nezáleží na délce desky.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_1 &= \left[-\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; 0; 0\right] \doteq [-23; 0; 0]\,\mathrm{N} \\ \boldsymbol{F}_2 &= \left[\frac{mg}{2\tan(\alpha)}; mg; 0\right] \doteq [23; 80; 0]\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ je na první pohled rovna 23 N. Zbývá zjistit velikost síly $\boldsymbol{F}_2$:

$$|\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{\left(\frac{mg}{2\tan(\alpha)}\right)^2 + (mg)^2} = mg\sqrt{\frac{1}{4\tan^2(\alpha)} + 1} \doteq 83\,\mathrm{N}$$

A tím je výpočet u konce. Tahová síla provazu je 23 N, přičemž podlaha působí na desku silou o velikosti přibližně 83 N.

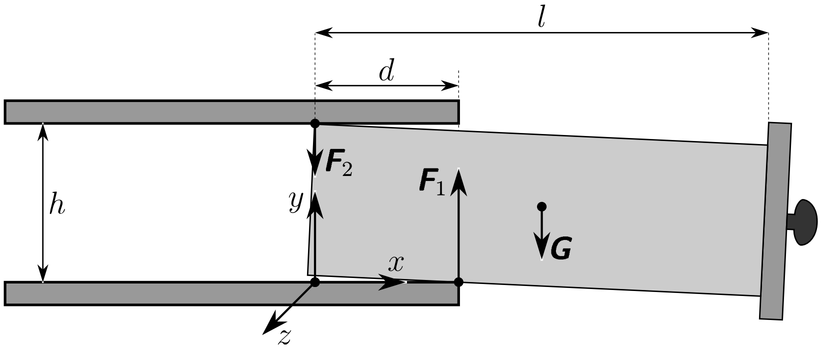
8. Namáhání zásuvky

Vypočítejte namáhání zásuvky stolu v různých situacích – je-li zasunutá, zpola vysunutá, a téměř zcela vysunutá. Předpokládejte, že se zásuvka dotýká stolu pouze ve dvou bodech, přičemž jeden bod je v místě zadní stěny zásuvky a druhý v přední stěně stolu. Zásuvka má hmotnost $m = 5\,\mathrm{kg}$ a nechť se těžiště nachází v jejím středu.

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a zakreslete působící síly.

- Rozepište souřadnice působišť sil, složky sil a jejich momenty.
- Vyjádřete podmínky pro statickou rovnováhu. Ty povedou na soustavu rovnic, kterou vyřešte.
- Vypočítejte působící síly pro zadané situace a stanovte, kterým směrem budou síly působit. *Výsledky slovně okomentujte a nakreslete.*

Řešení:



Zásuvka má délku l a míru jejího vysunutí bude popisovat rozměr d, který v našem případě představuje vzdálenost mezi body, kterými se zásuvka dotýká stolu. Na zásuvku působí tři síly, $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$ a $\boldsymbol{G}$. Síly, jejich působiště a momenty budeme vyjadřovat ve vztažné soustavě, jejíž počátek si zvolme například na dolní okraj zadní stěny zásuvky – viz obrázek. Nyní rozeberme sílu $\boldsymbol{F}_1$. Tou máme na mysli sílu, kterou působí stůl na zásuvku v místě přední stěny stolu. Bod, ve kterém síla působí, se nachází na ose x ve vzdálenosti d od počátku souřadné soustavy. Síla $\boldsymbol{F}_1$ je svislá, takže bude mít nenulovou složku pouze v ose y. Pomocí vektorového součinu pak vypočítáme moment síly.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F1} &= [d; 0; 0] \\ \boldsymbol{F}_1 &= [0; F_1; 0] \\ \boldsymbol{M}_{F1} = \boldsymbol{r}_{F1} \times \boldsymbol{F}_1 &= [0; 0; d\, F_1] \end{aligned}$$

Další silou, která působí na zásuvku, je síla gravitační $\boldsymbol{G}$. Její působiště je v těžišti zásuvky. Pro jednoduchost[1] předpokládejme, že zásuvka má těžiště uprostřed. Abychom mohli vyjádřit střed zásuvky v ose x a y, musíme zavést i výšku zásuvky, kterou označme h. Jde ale pouze o formální záležitost, protože posunutí působiště ve směru působení síly nemá na moment síly žádný vliv. U gravitační síly nyní rozepíšeme její působiště, složky a vypočítáme její moment.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_G &= \left[\frac{l}{2}; \frac{h}{2}; 0\right] \\ \boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] \\ \boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0; 0; -\frac{lmg}{2}\right] \end{aligned}$$

Třetí a poslední silou, která na zásuvku působí, je síla $\boldsymbol{F}_2$, která má působiště v místě, kde se stůl dotýká zadní stěny zásuvky. Nelze však říct jednoznačně, kde tento bod leží, protože to záleží na situaci. Obrázek znázorňuje situaci, kdy je zásuvka vysunutá a styčný bod se nachází na horním okraji zásuvky. Nicméně zcela zasunutá zásuvka se stolu dotýká svým dolním okrajem. Přechod mezi těmito dvěma stavy je jistě každému znám – při vysouvání zásuvky se ozve slabý náraz přibližně ve chvíli, kdy zásuvku vysuneme více než do poloviny její délky. V tom okamžiku se změní působiště síly $\boldsymbol{F}_2$, ale na náš výpočet to naštěstí nemá žádný vliv, protože moment síly zůstane stejný. Složky síly $\boldsymbol{F}_2$ rozepíšeme v souladu s obrázkem, kde tato síla působí směrem dolů. Je to pouze počáteční volba a v dalším výpočtu se ukáže, že síla při vysouvání zásuvky mění svůj směr.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{F2} &= [0; h; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &= [0; -F_2; 0] \\ \boldsymbol{M}_{F2} = \boldsymbol{r}_{F2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0] \end{aligned}$$

[1]Reálná situace bývá spíše taková, že zásuvka není vyvážená a její těžiště není uprostřed. To by se v našem příkladu projevilo pouze změnou působiště gravitační síly, jinak řešení zůstává stejné.

Jak vidíme, moment síly $\boldsymbol{F}_2$ je nulový bez ohledu na to, v jaké výšce h se její působiště nachází.

Máme dvě neznámé, F_1 a F_2. Z podmínek rovnováhy získáme dvě rovnice, ze kterých lze neznámé vypočítat. Má-li zásuvka setrvat ve statické rovnováze, musí být součet všech sil nulový, z čehož dostaneme první rovnici

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; 0]$$

$$I. \qquad F_1 - mg - F_2 = 0$$

Dále musí platit, že součet všech momentů sil musí být taktéž nulový, což vede na druhou rovnici. Z té můžeme určit sílu F_1:

$$\boldsymbol{M}_{F1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F2} = [0; 0; 0]$$

$$\begin{aligned} II. \qquad dF_1 - \frac{lmg}{2} &= 0 \\ dF_1 &= \frac{lmg}{2} \\ F_1 &= \frac{lmg}{2d} \end{aligned}$$

Sílu F_1 dosadíme do první rovnice a tím získáme sílu F_2.

$$\begin{aligned} I. \qquad F_1 - mg - F_2 &= 0 \\ \frac{lmg}{2d} - mg - F_2 &= 0 \\ F_2 &= \frac{lmg}{2d} - mg \end{aligned}$$

Konkrétní vyčíslení sil nyní provedeme pro různé fáze vysunutí zásuvky. Nejprve předpokládejme, že zásuvka je zcela zasunutá, což znamená, že $d = l$. Pak platí

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{lmg}{2l} = \frac{mg}{2} \\ F_2 &= \frac{lmg}{2l} - mg = -\frac{mg}{2} \\ \boldsymbol{F}_1 &= [0; F_1; 0] = [0; 25; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &= [0; -F_2; 0] = [0; 25; 0] \end{aligned}$$

Vidíme, že síla F_2 vyšla opačně, než jsme ji zvolili na počátku. Obě síly jsou stejně velké a orientované směrem nahoru. Každá působí na jednom konci zásuvky a nese právě polovinu její tíhy.

Další situací, kterou máme rozebrat, je zásuvka zpola vysunutá. V takovém případě platí, že $d = \frac{l}{2}$:

$$\begin{aligned} F_1 &= \frac{lmg}{2\frac{l}{2}} = mg \\ F_2 &= \frac{lmg}{2\frac{l}{2}} - mg = mg - mg = 0 \\ \boldsymbol{F}_1 &= [0; F_1; 0] = [0; 50; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &= [0; -F_2; 0] = [0; 0; 0] \end{aligned}$$

Nyní síla $\boldsymbol{F}_2$ zcela vymizela a celou tíhu zásuvky nese pouze síla $\boldsymbol{F}_1$ směřující nahoru. Působiště síly $\boldsymbol{F}_1$ je přímo pod těžištěm zásuvky. Tento stav ve skutečnosti nelze realizovat, protože se jedná o nestabilní rovnováhu. Zásuvka se vždy překlopí na jednu či druhou stranu.

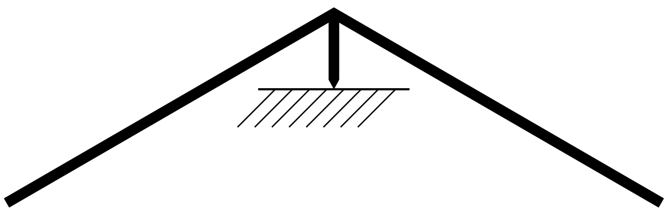
Zbývá popsat poslední situaci, kdy je zásuvka vysunuta. Není možné vypočítat její úplné vysunutí, protože za d nelze dosadit nulu – nulou nelze dělit. Při pokusu tento stav realizovat by zásuvka nejspíše vypadla ven ze stolu. Můžeme pouze uvažovat situaci, která je tomuto blízká, tedy si představme *téměř zcela* vysunutou zásuvku, kdy se d blíží nule, $d \to 0$:

$$\begin{aligned} F_1 &\to +\infty \\ F_2 &\to +\infty \\ \boldsymbol{F}_1 &\to [0; F_1; 0] = [0; \infty; 0] \\ \boldsymbol{F}_2 &\to [0; -F_2; 0] = [0; -\infty; 0] \end{aligned}$$

Síla $\boldsymbol{F}_1$ bude směřovat nahoru, síla $\boldsymbol{F}_2$ dolů a jejich velikost bude narůstat do takové míry, že nějaké místo pravděpodobně tak velké namáhání nevydrží a zásuvka se vlastní vahou vypáčí ven. Poničení zásuvky či stolu lze předejít dostatečnou vůlí, díky které se zásuvka přestane dotýkat stolu svým horním okrajem a vypadne dřív, než síly narostou do nebezpečných hodnot a něco poškodí.

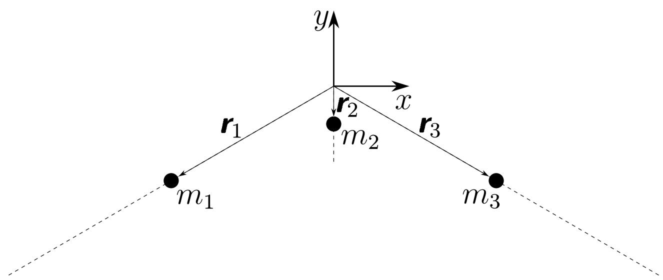
9. Výpočet těžiště, stabilita rovnováhy (tři špejle)

Těleso, které je znázorněno na obrázku, je tvořeno třemi špejlemi, které jsou spojeny v jednom bodě. Svislá špejle o délce d=6 cm má na dolním konci hrot, jímž se dotýká pevné podložky a kolem nějž se může těleso otáčet a kývat. Zbývající dvě špejle tvoří symetrická ramena o délce l=30 cm a svírají se svislicí úhel α=60 °.



- Zvolte souřadnou soustavu (například tak, že její počátek bude v místě spojení všech špejlí, osa y bude směřovat nahoru a osa x doprava)
- Předpokládejte, že je těleso složeno ze tří hmotných bodů (které odpovídají těžištím jednotlivých špejlí). Rozepište příslušné polohové vektory.
- Z definičního vztahu $\boldsymbol{T} = \dfrac{\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$ vypočítejte polohu těžiště. Předpokládejte, že hmotnost špejle je úměrná její délce.
- Na základě polohy těžiště rozhodněte, zda bude rovnováha stabilní či labilní.

Řešení:



$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_1 &= \left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] \\
\boldsymbol{r}_2 &= \left[0; -\frac{d}{2}\right] \\
\boldsymbol{r}_3 &= \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]
\end{aligned}$$

$$m_1 = m_3 = m \qquad m_2 = \frac{d}{l}m$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T} &= \frac{\sum_{i=1}^n m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{m_1\boldsymbol{r}_1 + m_2\boldsymbol{r}_2 + m_3\boldsymbol{r}_3}{m_1+m_2+m_3} = \\
&= \frac{m\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}m\left[0; -\frac{d}{2}\right] + m\left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{m + \frac{d}{l}m + m} = \\
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}\left[0; -\frac{d}{2}\right] + \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{1 + \frac{d}{l} + 1} =
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right] + \frac{d}{l}\left[0; -\frac{d}{2}\right] + \left[\frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l}+2} = \\
&= \frac{\left[-\frac{l}{2}\sin\alpha + 0 + \frac{l}{2}\sin\alpha; -\frac{l}{2}\cos\alpha - \frac{d^2}{2l} - \frac{l}{2}\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l}+2} = \\
&= \frac{\left[0; -\frac{d^2}{2l} - l\cos\alpha\right]}{\frac{d}{l}+2} = \left[0; \frac{-\frac{d^2}{2l} - l\cos\alpha}{\frac{d}{l}+2}\right] \\
\boldsymbol{T} &\doteq [0; -7,1]\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

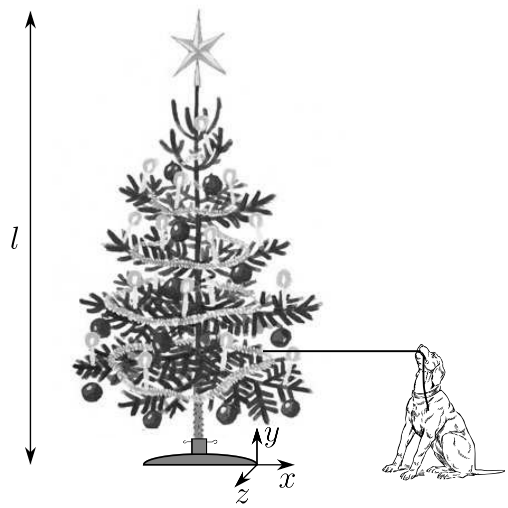
Těleso setrvá ve stabilní rovnováze, protože se jeho těžiště nachází *pod* hrotem, který se dotýká podložky. Jakákoli stranová výchylka způsobí zvýšení polohy těžiště a jeho následnou snahu o vrácení do původní stabilní polohy.

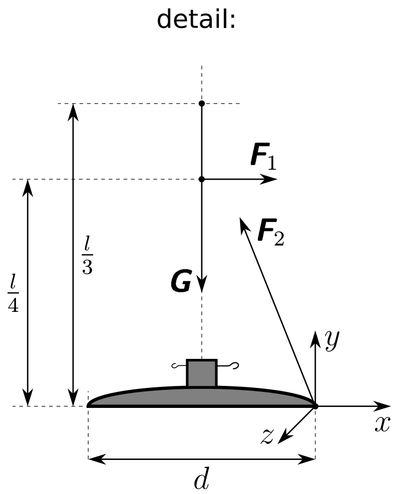
10. Stabilita vánočního stromečku

Puňťa se pokouší shodit dvoumetrový vánoční stromeček vodorovným tahem za elektrickou šňůru, která je zachycena za větvičku ve výši půl metru nad zemí (tj. ve čtvrtině výšky). Hmotnost stromečku je 10 kg, jeho těžiště je ve třetině jeho výšky a průměr stojanu je 40 cm. Jakou nejmenší silou musí Puňťa působit, aby se zdařil jeho úmysl? Jak velkou silou pak bude působit podlaha na stojan stromečku?

- Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a souřadný systém
- V souladu se zvoleným souřadným systémem rozepište vektory sil, jejich ramena a momenty.
- Napište podmínky pro statickou rovnováhu.
- Vyřešte vzniklou soustavu rovnic.
- Dosaďte číselné hodnoty, určete velikosti všech působících sil a napište odpověď.

Řešení:





Na vánoční stromeček působí tři síly - síla $\boldsymbol{F}_1$, kterou Puňťa táhne za elektrickou šňůru (předpokládejme, že z našeho pohledu je to směrem doprava). Dále gravitační síla $\boldsymbol{G}$, jejíž působiště je v těžišti stromečku a třetí silou je $\boldsymbol{F}_2$, což je síla, kterou působí podlaha na stojan stromečku. Počátek souřadné soustavy zvolíme například tak, aby její počátek byl v působišti síly $\boldsymbol{F}_2$. Osa x nechť směřuje doprava, osa y nahoru. Rozepíšeme složky jednotlivých sil, souřadnice jejich působišť a pomocí vektorového součinu zjistíme momenty sil. Síla $\boldsymbol{F}_1$:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{F_1} &= \left[-\frac{d}{2}; \frac{l}{4}; 0\right] \\
\boldsymbol{F}_1 &= [F_{1x}; 0; 0]
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{M}_{F_1} = \boldsymbol{r}_{F_1} \times \boldsymbol{F}_1 \;=\; \left[0; 0; -F_{1x}\frac{l}{4}\right]$$

Gravitační síla $\boldsymbol{G}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_G &= \left[-\frac{d}{2}; \frac{l}{3}; 0\right] \\
\boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] \\
\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} &= \left[0; 0; \frac{dmg}{2}\right]
\end{aligned}$$

Síla $\boldsymbol{F}_2$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_{F_2} &= [0; 0; 0] \\
\boldsymbol{F}_2 &= [F_{2x}; F_{2y}; 0] \\
\boldsymbol{M}_{F_2} = \boldsymbol{r}_{F_2} \times \boldsymbol{F}_2 &= [0; 0; 0]
\end{aligned}$$

Těleso setrvá ve statické rovnováze, je-li součet sil nulový tj. $\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = 0$

$$\begin{aligned}
I. &\quad F_{1x} + F_{2x} = 0 \\
II. &\quad -mg + F_{2y} = 0
\end{aligned}$$

a současně součet momentů sil také nulový, tj. $\boldsymbol{M}_{F_1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F_2} = 0$.

$$III. - F_{1x}\frac{l}{4} + \frac{dmg}{2} = 0$$

Máme tedy tři rovnice o třech neznámých F_{1x}, F_{2x} a F_{2y}. Z druhé rovnice ihned plyne neznámá F_{2y}.

$$\begin{aligned}
-mg + F_{2y} &= 0 \\
F_{2y} &= mg
\end{aligned}$$

Ze třetí rovnice vypočítáme F_{1x}

$$\begin{aligned}
-F_{1x}\frac{l}{4} + \frac{dmg}{2} &= 0 \\
F_{1x}\frac{l}{4} &= \frac{dmg}{2} \\
F_{1x} &= \frac{2dmg}{l}
\end{aligned}$$

a dosadíme do první rovnice.

$$\begin{aligned}
F_{1x} + F_{2x} &= 0 \\
F_{2x} &= -F_{1x} \\
F_{2x} &= -\frac{2dmg}{l}
\end{aligned}$$

Tím jsou výsledné síly vypočteny:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_1 &= \left[\frac{2dmg}{l}; 0\right] = [40; 0] \\
\boldsymbol{F}_2 &= \left[-\frac{2dmg}{l}; mg\right] = [-40; 100]
\end{aligned}$$

Velikost síly $\boldsymbol{F}_1$ je na první pohled 40 newtonů, velikost síly $\boldsymbol{F}_2$ je

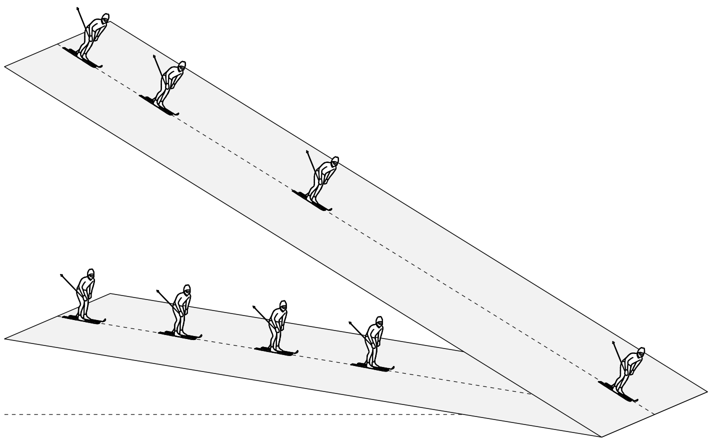
$$|\boldsymbol{F}_2| = \sqrt{F_{2x}^2 + F_{2y}^2} = \sqrt{(-40)^2 + 100^2} \doteq 108\,N$$

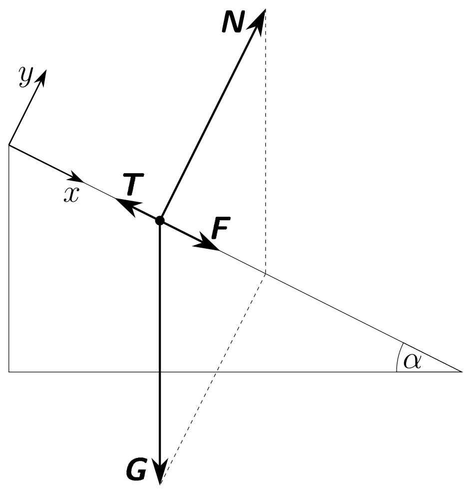
11. Nakloněná rovina (tření, rovnoměrný pohyb)

Běžkař sjel z dvacetimetrového svahu za τ=10 sekund, přičemž jeho pohyb začal z klidu a sklon svahu byl $\alpha = 5°$. Jaký nejmenší sklon musí mít svah, aby z něj ještě bylo možno sjet samovolně, bez nutnosti odpichování hůlkami?

- Nakreslete obrázek, souřadnou soustavu a vyznačte působící síly. Do obrázku znázorněte součet sil (pomocí rovnoběžníku). Výslednici sil *zvýrazněte*.
  Osu x volte tak, aby vedla ze svahu dolů. Osa y nechť vede šikmo vzhůru.
- V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište složky všech působících sil.
- Zapište výslednici sil jako součet všech působících sil a z ní vyjádřete vektor zrychlení.
- Z ujeté vzdálenosti l a potřebného času τ vypočítejte x-ovou složku zrychlení.
  Zrychlení dvakrát integrujte podle času, tím získáte polohu.
- Matematicky zapište, že se lyžař pohybuje pouze po povrchu svahu.
  To znamená, že zrychlení v ose y je rovno nule.
- Zapište vztah pro koeficient tření a vypočítejte jej.
- Najděte úhel svahu takový, aby na něm měl běžkař nulové zrychlení.

Řešení:





Na běžkaře působí tři síly. Svah na něj působí normálovou silou $\boldsymbol{N}$, která je kolmá na povrch svahu a míří šikmo vzhůru. Je to síla známá jako reakce podložky, která brání tomu, aby se předměty probořily do země. Dále působí gravitační síla $\boldsymbol{G}$, která směřuje svisle dolů. Pohyb lyžaře je brzděn třecí silou $\boldsymbol{T}$, která působí proti směru jeho pohybu. Souřadnou soustavu zvolíme tak, aby byl její počátek v nejvyšším místě kopce, osa x nechť směřuje ze svahu dolů a osa y bude kolmá na svah a směřovat šikmo vzhůru. V takto zvolené souřadné soustavě rozepíšeme složky působících sil. U gravitační síly $\boldsymbol{G}$ známe její velikost i směr. U zbývajících dvou sil, normálové a třecí, známe pouze směr. Normálová síla působí pouze ve směru osy y, zatímco síla třecí působí jen v ose x. Třecí síla působí proti směru pohybu, a proto má opačný směr než je orientace osy x.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{G} &= [mg\sin(\alpha); -mg\cos(\alpha)] \\
\boldsymbol{N} &= [0; N] \\
\boldsymbol{T} &= [-T; 0]
\end{aligned}$$

Výsledný pohyb běžkaře je dán výslednicí $\boldsymbol{F}$ (tj. vektorovým součtem) jednotlivých sil, které na něj působí. Z druhého Newtonova zákona ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$) platí, že jestliže výslednici sil podělíme hmotností tělesa, získáme jeho zrychlení.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F} &= \boldsymbol{G} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{F} &= [mg\sin(\alpha) - T; -mg\cos(\alpha) + N] \\
\boldsymbol{a} &= \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \left[g\sin(\alpha) - \frac{T}{m}; -g\cos(\alpha) + \frac{N}{m}\right]
\end{aligned}$$

Jak z tohoto zápisu vidíme, vektor zrychlení závisí na normálové síle N, třecí síle T a hmotnosti m, přičemž ani jednu z veličin neznáme. Víme však, že se lyžař pohybuje pouze po povrchu svahu, tedy jen v ose x. To znamená, že v ose y musí být zrychlení nulové, tedy

$$a_y = 0$$

z čehož vyplývá rovnice, ze které můžeme vyjádřit normálovou sílu N:

$$\begin{aligned} I. \qquad -g\cos(\alpha) + \frac{N}{m} &= 0 \\ \frac{N}{m} &= g\cos(\alpha) \\ N &= mg\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Stále nám zbývají dvě neznámé, T a m. Tím, že zavedeme koeficient tření μ, se nám podaří počet neznámých snížit na jednu. Koeficient tření je poměr mezi velikostí přítlačné síly na podložku a velikostí třecí síly (tj. $\mu = T/N$).

$$\begin{aligned} II. \qquad T &= \mu N \\ T &= \mu mg\cos(\alpha) \end{aligned}$$

Nyní můžeme zapsat vektor zrychlení užitím jediné neznámé, kterou je koeficient tření μ:

$$\boldsymbol{a} = [g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha); 0]$$

Poslední neznámou lze vypočítat z toho, že běžkař ujel v ose x vzdálenost $l = 20$ metrů za $\tau = 10$ sekund. Bude potřeba ze zrychlení vyjádřit závislost polohy na čase. To bude snadné, protože na první pohled je zřejmé, že zrychlení je stále *konstantní* a pro přehlednost jej budeme značit a_x. Stačí tedy dvakrát integrovat podle času. Integrálem ze zrychlení je závislost rychlosti na čase. Integrační konstanta zde má význam počáteční rychlosti. O té však víme, že je nulová, protože pohyb začínal z klidu.

$$v_x(t) = \int a_x \,\mathrm{d}t = a_x t$$

Nyní zintegrujeme rychlost a tím získáme závislost polohy na čase. Integrační konstanta bude mít v tomto případě význam počáteční polohy a je rovna nule, protože předpokládáme, že lyžař startoval z počátku souřadné soustavy (tím se nám bude pohodlně odměřovat dvacet metrů).

$$r_x(t) = \int v_x(t)\,\mathrm{d}t = \int a_x t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}a_x t^2$$

Dále víme, že v čase τ byla poloha běžkaře rovna l. Z toho vypočítáme zrychlení:

$$\begin{aligned} r_x(\tau) &= l \\ \frac{1}{2}a_x\tau^2 &= l \\ a_x &= \frac{2l}{\tau^2} = 0,4\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{aligned}$$

Když nyní známe x-ovou složku zrychlení, můžeme vypočítat neznámou μ:

$$\begin{aligned} a_x &= g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha) \\ \frac{2l}{\tau^2} &= g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha) \\ \frac{2l}{\tau^2} + \mu g\cos(\alpha) &= g\sin(\alpha) \\ \mu g\cos(\alpha) &= g\sin(\alpha) - \frac{2l}{\tau^2} \\ \mu &= \frac{g\sin(\alpha)}{g\cos(\alpha)} - \frac{2l}{\tau^2 g\cos(\alpha)} \\ \mu &= \tan(\alpha) - \frac{2l}{\tau^2 g\cos(\alpha)} \doteq 0,047 \end{aligned}$$

Což je koeficient tření mezi běžkami a sněhem. Výrobci vosků a skluznic se snaží tuto hodnotu pokud možno minimalizovat. Známe-li koeficient tření, můžeme najít takový sklon svahu, při kterém je zrychlení běžkaře nulové.

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ g\sin(\alpha) - \mu g\cos(\alpha) &= 0 \\ \sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha) &= 0 \\ \sin(\alpha) &= \mu\cos(\alpha) \\ \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} &= \mu \\ \tan(\alpha) &= \mu \\ \alpha &= \arctan(\mu) \doteq 0{,}047\,\mathrm{rad} \approx 2{,}7^\circ \end{aligned}$$

Je to mezní, rovnovážný stav, kdy je součet všech sil nulový a běžkař se pohybuje rovnoměrně přímočaře. Ani nezrychluje, ani nezpomaluje a záleží jen na tom, na jakou rychlost se předtím rozjel. Na prudším svahu by rychlost narůstala, na mírnějším by se naopak pohyb po čase zastavil.

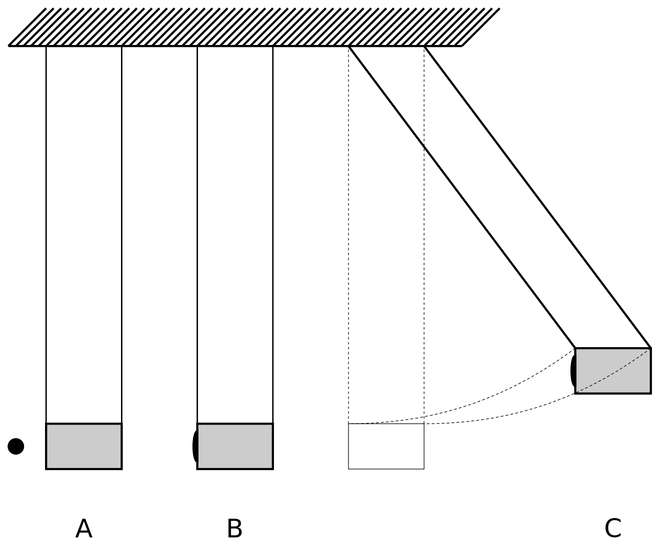
Za zmínku stojí zajímavá skutečnost – pro malé úhly (musíme je vyjadřovat v radiánech) platí, že sinus i tangens je přibližně roven svému argumentu. To znamená, že i koeficient tření je zhruba roven meznímu úhlu. Současně platí, že údaj o klesání uvedený v procentech přibližně souhlasí s úhlem svahu. Takže nebudeme daleko od pravdy, když usoudíme, že potřebujeme pětiprocentní klesání svahu (0,05) na to, abychom mohli sjet kopec bez námahy na běžkách s koeficientem tření 0,05.

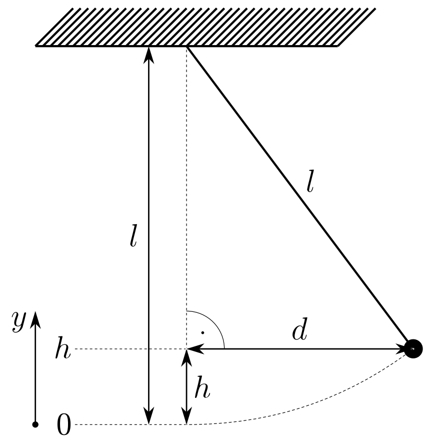
12. Balistické kyvadlo

Balistické kyvadlo je jednoduché zařízení pro měření rychlosti střel. Princip je založen na tom, že měříme vodorovnou výchylku zavěšeného předmětu, do kterého narazí střela a uvízne v něm. Pokusem bylo zjištěno, že se dřevěná kostka o hmotnosti M=0,1 kg vychýlila o d=0,3 m poté, co se na ni přilepila vystřelená plastelínová kulička o hmotnosti m=2 g. Kostka je zavěšena na dvoumetrové niti a před nárazem volně visela v rovnovážné poloze.

- Nakreslete obrázek a vyznačte jednotlivé fáze děje.
- Vyjádřete původní rychlost střely pomocí rychlosti kostky s nalepenou střelou a hmotností M a m. *Náraz střely byl dokonale nepružný.*
- Vypočítejte výšku h, o kterou se zvýší poloha kostky při maximální výchylce. *Práci gravitační síly počítejte přímo z definice práce.*
- Výškovou výchylku h vyjádřete pomocí stranové výchylky d. *Využijte Pythagorovu větu – závěs tvoří přeponu, stranová výchylka d představuje jednu z odvěsen.*
- Číselně vypočítejte rychlost střely.

Řešení:





Celý děj rozdělme na tři fáze, které označme A, B a C. Rychlost střely budeme značit v a rychlost kostky V. Pomocí indexů A, B nebo C budeme rozlišovat, ke které fázi se rychlost vztahuje. Stav A bude odpovídat situaci před nárazem střely do kostky. Rychlost v_A je počáteční rychlost střely, kterou máme vypočítat. Rychlost V_A je nulová – je to rychlost kostky před nárazem. Fáze B nastane těsně poté, co se střela nalepí na kostku, přičemž dále se obě tělesa pohybují stejnou rychlostí ($v_B = V_B$). Gravitační síla vykoná mezi stavy B a C zápornou práci, a tím na okamžik zastaví pohyb obou těles, což odpovídá stavu C. Kostka i střela mají nulovou rychlost ($v_C = V_C = 0$) a nacházejí se ve výšce h ve srovnání s rovnovážným stavem. Víme, že celková hybnost střely i kostky před nárazem musí být stejná, jako hybnost obou těles těsně po nárazu. Dále platí, že rychlosti po nárazu jsou stejné.

$$\begin{aligned}
p_A &= p_B \\
mv_A + MV_A &= mv_B + MV_B \\
mv_A &= mv_B + Mv_B \\
v_A &= v_B + \frac{M}{m} v_B \\
v_A &= \left(1 + \frac{M}{m}\right) v_B
\end{aligned}$$

Nyní vypočítejme vztah mezi rychlostí v_B a výškou h. Ze zkušenosti s podobnými typy příkladů lze tušit výsledek $v_B = \sqrt{2gh}$, ale využijme situace k podrobnému odvození přímo z definice mechanické práce. Soustřeďme se na energetické přeměny mezi stavy B a C. Změní se kinetická energie kostky i střely, zatímco gravitační síla vykoná mechanickou práci. Zaveďme souřadnou soustavu tak, že její počátek bude v rovnovážné poloze kostky, přičemž osa x bude směřovat doprava a osa y nahoru. Ve stavu B se budou obě tělesa nacházet v bodě $[0; 0]$, zatímco stav C bude odpovídat poloze $[d; h]$. Gravitační síla působí na obě tělesa, a to pouze v ose y. Znaménko bude záporné, protože gravitace má opačný směr než námi zvolená osa y.

$$\boldsymbol{G} = [0;\ -(M + m)g]$$

nekonečně malá změna dráhy $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ bude mít tyto složky:

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [\mathrm{d}x;\ \mathrm{d}y]$$

V definici práce se integruje *skalární součin* síly a dráhy, takže dráha v ose x vymizí (násobí se nulou). Práce gravitační síly (od B do C) musí být rovna součtu změn mezi C a B u mechanické energie kostky i střely.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2\right) + \left(\frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}MV_B^2\right) &= \int_B^C \boldsymbol{G} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} \\
-\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}MV_B^2 &= \int_B^C 0 \cdot \mathrm{d}x - (M + m)g\,\mathrm{d}y \\
\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}MV_B^2 &= \int_B^C (M + m)g\,\mathrm{d}y \\
\frac{1}{2}mv_B^2 + \frac{1}{2}Mv_B^2 &= (M + m)g\,[y]_B^C \\
(m + M)v_B^2 &= 2(M + m)g(y_C - y_B) \\
v_B^2 &= 2g(h - 0) \\
v_B &= \sqrt{2gh}
\end{aligned}$$

Čímž jsme dostali očekávaný výsledek. Bylo by možné namítnout, že kromě gravitace působí ještě tahová síla závěsu $\boldsymbol{T}$. Jenže ta je po celou dobu kolmá na dráhu, a tak skalární součin $\boldsymbol{T} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} = 0$. Tahová síla tedy *nekoná práci*.

Dosadíme-li rychlost v_B do vztahu pro rychlost střely, dostáváme

$$v_A = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{2gh}$$

Tento vzorec by již bylo možné použít pro měření rychlosti střely, kdybychom zjišťovali svislou výchylku kostky. Z praktického hlediska je však měření vodorovné výchylky přesnější, a tak ještě pomocí Pythagorovy věty vyjádříme h pomocí délky závěsu l a stranové výchylky d:

$$h = l - \sqrt{l^2 - d^2}$$

Výšku h dosadíme do předchozího vztahu a tím získáme konečný výsledek.

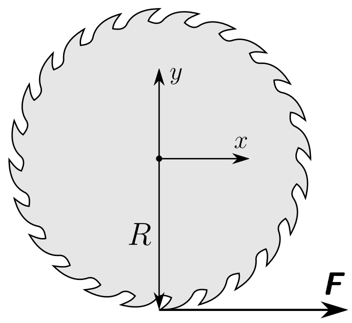
$$v_A = \left(1 + \frac{M}{m}\right) \sqrt{2g(l - \sqrt{l^2 - d^2})} \doteq 34,3\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 124\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

13. Kotouč cirkulárky

Kotouč cirkulárky, který za sekundu vykonal 100 otáček, se náhle uvolnil, upadl a rozjel se po podlaze dílny. Vypočítejte jeho maximální rychlost. Průměr kotouče je 20 cm a moment setrvačnosti válce se vypočítá $J = \frac{1}{2} m R^2$.

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a zakreslete působící sílu.
- V souladu se zvolenou souřadnou soustavou rozepište složky síly a její moment.
- Najděte vztah mezi úhlovým zrychlením a zrychlením středu kotouče.
- Rovnici zintegrujte podle času. Meze integrálu budou představovat počáteční a koncový stav. *Integrál ze zrychlení je rychlost.*
- Jaká podmínka platí pro *kutálení* kotouče po podlaze?
- Číselně vypočítejte výsledek.

Řešení:



Na kotouč cirkulárky, který dopadl na zem, působí především vodorovná síla $\boldsymbol{F}$, která je způsobena tím, jak se zuby roztočené pily zasekly do podlahy. Reakce podlahy je příčinou toho, že se kotouč rozjede, tj. bude se zrychlovat jeho těžiště.

Jiné síly nebudeme brát v úvahu. Na kotouč sice působí ještě gravitační síla (směrem dolů) a normálová síla podlahy (směrem nahoru), ale tyto dvě síly i jejich momenty se vzájemně vyruší.

Souřadnou soustavu zvolme tak, že její počátek umístíme do středu kotouče. Osa x nechť směřuje doprava, osa y nahoru. Na kotouč působí jediná síla $\boldsymbol{F}$, o které víme pouze to, že je vodorovná. Zvolíme ji například tak, aby směřovala doprava, stejně jako osa x. Rozepíšeme rameno této síly (tj. souřadnice jejího působiště), její složky a pomocí vektorového součinu vyjádříme moment:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_F &= [0; -R; 0] \\ \boldsymbol{F} &= [F; 0; 0] \\ \boldsymbol{M}_F &= \boldsymbol{r}_F \times \boldsymbol{F} = [0; 0; RF] \end{aligned}$$

Víme, že síla způsobuje zrychlení středu hmotnosti tělesa, zatímco moment síly způsobuje úhlové zrychlení tělesa. Platí, že

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} &= \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \left[\frac{F}{m}; 0; 0\right] \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\boldsymbol{M}}{J} = \left[0; 0; \frac{RF}{J}\right] \end{aligned}$$

Vidíme, že zrychlení středu kotouče se odehrává pouze v ose x, zatímco úhlové zrychlení má nenulovou složku jen v ose z. Proto se další výpočty budou týkat pouze těchto složek a vztahy již nebudou vektorové.

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ \varepsilon &= \frac{RF}{J} \end{aligned}$$

Získali jsme dvě jednoduché rovnice, ve kterých ale vystupují tři neznámé *funkce*. O síle F totiž nevíme téměř nic – ani jak je velká, ani jak dlouho trvá její působení a navíc zcela jistě závisí na čase a my nevíme jak. Z rovnic vyplývá, že zrychlení (jak translační, tak úhlové) závisí na velikosti síly F, takže i obě zrychlení jsou funkcemi času, přičemž tento průběh neznáme. Správně bychom měli psát $a(t)$, $\varepsilon(t)$ a $F(t)$. Můžeme dosadit sílu z první rovnice do druhé, čímž dostaneme

$$\varepsilon = \frac{Rma}{J}$$

Ze zadání víme, že moment setrvačnosti válce J se vypočítá $J = \frac{1}{2}mR^2$, čímž se vztah zjednoduší na

$$\varepsilon = \frac{2}{R}a$$

Získali jsme rovnici, která popisuje vztah mezi úhlovým a translačním zrychlením, ale obě tato zrychlení nejsou konstanty, protože nějak závisejí na čase. Přesto víme, že integrací zrychlení podle času získáme rychlost, ať už je průběh funkcí jakýkoli. Zintegrujeme obě strany rovnice v mezích od A do B. V tomto kroku je potřeba rozlišovat, že R je konstanta (a můžeme ji vytknout před integrál), zatímco a a ε jsou funkce času.

$$\begin{aligned} \int_A^B \varepsilon \,\mathrm{d}t &= \frac{2}{R}\int_A^B a \,\mathrm{d}t \\ [\omega]_A^B &= \frac{2}{R}\,[v]_A^B \\ \omega_B - \omega_A &= \frac{2}{R}(v_B - v_A) \end{aligned}$$

Počáteční stav A i koncový stav B známe. Na začátku byla rychlost středu kotouče nulová, tj. $v_A = 0$, zatímco úhlovou rychlost ω_A můžeme snadno zjistit z údajů v zadání (známe rychlost rotace). Ve stavu B se rychlost otáčení snížila na ω_B, zatímco rychlost středu kotouče nabyla hodnoty v_B.

$$\omega_B - \omega_A = \frac{2}{R}v_B$$

V koncovém stavu B platí, že se kotouč již *kutálí* po podlaze. To znamená, že musí existovat vztah mezi jeho úhlovou rychlostí ω_B a rychlostí jeho středu v_B. Čím rychleji pojede, tím rychleji se musí otáčet. Jak vidíme z obrázku, směr otáčení bude v záporném smyslu, zatímco rychlost v_B bude kladná. Je-li poloměr kotouče R, bude platit, že $-\omega_B = v_B/R$.

$$\begin{aligned} -\frac{v_B}{R} - \omega_A &= \frac{2}{R}v_B \\ -\omega_A &= \frac{3}{R}v_B \\ v_B &= -\frac{\omega_A R}{3} = -\frac{-2\pi f R}{3} = \frac{2\cdot\pi\cdot 100\cdot 0{,}1}{3} \doteq 21\,\mathrm{m\,s^{-1}} \end{aligned}$$

Počáteční úhlová rychlost ω_A byla záporná a koncová rychlost vyšla kladná, což souhlasí s obrázkem. Vypočítali jsme konečnou rychlost kotouče, aniž bychom potřebovali vědět, jak dlouho celý proces trval a jak přesně probíhal. Je potřeba si uvědomit, že příklad nelze vypočítat pomocí zákona zachování mechanické energie, protože část energie se spotřebuje na teplo (poničení podlahy atd.).

14. Palice a kůl

Dvacetikilogramová palice ($M = 20\,\mathrm{kg}$) dopadla z výšky $h = 1\,\mathrm{m}$ na dřevěný kůl o hmotnosti $m = 10\,\mathrm{kg}$ a ten se zabořil do hlíny o $d = 5\,\mathrm{cm}$ hlouběji.

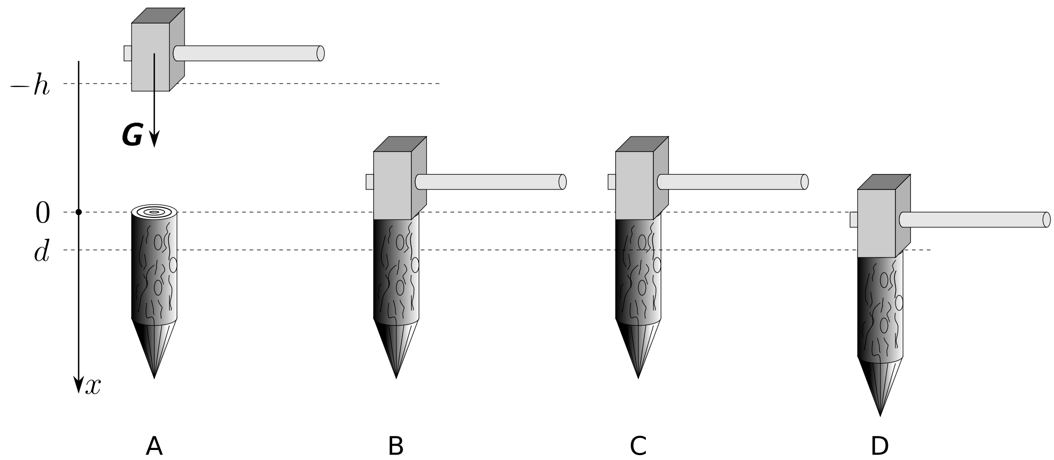
- Nakreslete obrázek, souřadnou osu x a její počátek.
- Jakou práci vykonala gravitační síla při pádu palice?
  Zintegrujte gravitační sílu podél dráhy.
- Jakou rychlost bude mít palice těsně před dopadem na kůl?
- Jakou rychlost bude mít palice i kůl těsně po srážce?
  Předpokládejte dokonale nepružnou srážku.
- Vypočítejte energii, která se při srážce přeměnila na teplo.
- Jak velkou (průměrnou) sílu překonává kůl při zarážení do země?
  Působení gravitační síly v tomto kroku zanedbejte.

Řešení:

Příklad je řešen zdánlivě komplikovaným způsobem, ale jeho smysl nespočívá v tom, že zjistíme číselný výsledek, ale spíše v pochopení pojmu energie a definice práce.

Celý děj můžeme rozdělit na čtyři stavy (viz obrázek), které označme A, B, C a D. Dále zaveďme rychlost palice V a rychlost kůlu v. Index u příslušné rychlosti bude označovat stav, ke kterému se rychlost vztahuje. Stav A odpovídá situaci, kdy palice ještě nebyla spuštěna. Rychlosti ve stavu A jsou nulové ($V_A = v_A = 0$). Stav B odpovídá okamžiku těsně před dopadem palice na kůl, kdy palice má rychlost V_B a kůl je stále v klidu ($v_B = 0$). Fáze C nastane po dokonale nepružné srážce. Rychlosti V_c a v_C jsou stejné ($V_C = v_C$), přičemž palice a kůl se pohybují spolu. Pohyb obou těles je brzděn tím, jak kůl proniká do země. Palice i kůl urazí dráhu d a dále se již nepohybují, což odpovídá stavu D ($V_D = v_d = 0$).

Nejprve vypočítejme práci, kterou vykoná gravitační síla mezi stavy A a B. Na první pohled lze odhadnout, že to bude Mgh, ale při výpočtu vyjděme přímo z definice práce vykonané silou.



Pohyb se děje pouze v jedné souřadné ose. Nechť osa x směřuje dolů a její počátek umístěme na horní konec kůlu. Vypočítáme práci, kterou vykoná gravitační síla mezi stavy A a B:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G} &= [Mg] \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= [\mathrm{d}x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \int_A^B \boldsymbol{G}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_A^B Mg\,\mathrm{d}x = Mg\int_A^B \mathrm{d}x = Mg[x]_A^B = \\ &= Mg(x_B - x_A) = Mg(0-(-h)) = Mgh = 20\cdot 10\cdot 1 = 200\,\mathrm{J} \end{aligned}$$

Práce gravitační síly způsobí přírůstek kinetické energie palice, z čehož vypočítáme rychlost palice ve stavu B.

$$\frac{1}{2}MV_B^2 - \frac{1}{2}MV_A^2 = Mgh$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}MV_B^2 &= Mgh\\ \frac{1}{2}V_B^2 &= gh\\ V_B &= \sqrt{2gh} = \sqrt{2\cdot 10\cdot 1} \doteq 4{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Poté dojde k dokonale nepružné srážce palice a kůlu. Víme, že hybnost celé soustavy je stavu B stejná jako ve stavu C. Dále víme, že rychlost obou těles po srážce je stejná, tedy $V_C = v_C$. Tuto rychlost vypočítáme:

$$\begin{aligned}p_B &= p_C\\ MV_B + mv_b &= MV_C + mv_C\\ MV_B &= MV_C + mV_C\\ MV_B &= V_C(M+m)\\ V_C &= \frac{MV_B}{M+m} = \frac{M\sqrt{2gh}}{M+m} = \frac{20\cdot\sqrt{2\cdot 10\cdot 1}}{20+10} \doteq 3\,\mathrm{m\,s^{-1}}\end{aligned}$$

Srážkou se kinetická energie palice snížila, zatímco kinetická energie kůlu se zvýšila. Nikoli však o stejnou hodnotu. Jednalo se o *nepružnou srážku*, takže došlo ke „ztrátě“ určité části energie, přesněji řečeno k její přeměně na teplo. Tuto tepelnou energii zjistíme tak, že sečteme rozdíly kinetické energie obou těles.

$$\begin{aligned}\Delta E &= \left(\frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}MV_B^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2\right) = \frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}MV_B^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 =\\ &= \frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}M2gh + \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}V_C^2(M+m) - Mgh =\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{M\sqrt{2gh}}{M+m}\right)^2(M+m) - Mgh = \frac{1}{2}\frac{M^2 2gh}{(M+m)^2}(M+m) - Mgh =\\ &= \frac{M^2gh}{M+m} - Mgh = \frac{20^2\cdot 10\cdot 1}{20+10} - 20\cdot 10\cdot 1 \doteq -67\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Vyšlo záporné číslo, takže celková kinetická energie se skutečně zmenšila.

Nyní vypočítáme sílu $\boldsymbol{F}$, která působí na kůl (i palici) při zarážení do země. Tato síla vykoná práci po dráze o délce d, přičemž zabrzdí palici i kůl ($V_D = v_d = 0$). Při výpočtu předpokládejme, že síla $\boldsymbol{F}$ je konstantní a tudíž je možno ji vytknout před integrál.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= [F]\\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= [\mathrm{d}x]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}MV_D^2 - \frac{1}{2}MV_C^2\right) + \left(\frac{1}{2}mv_D^2 - \frac{1}{2}mv_C^2\right) &= \int_C^D \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}\\ -\frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 &= \int_C^D F\,\mathrm{d}x\\ -\frac{1}{2}MV_C^2 - \frac{1}{2}mV_C^2 &= F\int_C^D \mathrm{d}x\\ -\frac{1}{2}V_C^2(M+m) &= F[x]_C^D\\ -\frac{1}{2}\left(\frac{M\sqrt{2gh}}{M+m}\right)^2(M+m) &= F(x_D - x_C)\\ -\frac{M^2gh}{M+m} &= F(d-0)\\ F &= -\frac{M^2gh}{d(M+m)} \doteq -2700\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

Vyšlo záporné číslo, což je v pořádku, protože síla $\boldsymbol{F}$ směřuje na opačnou stranu než osa x. Předpokládali jsme, že síla $\boldsymbol{F}$ byla konstantní, což neodpovídá realitě. Můžeme však říct, že náš výsledek reprezentuje střední hodnotu síly.

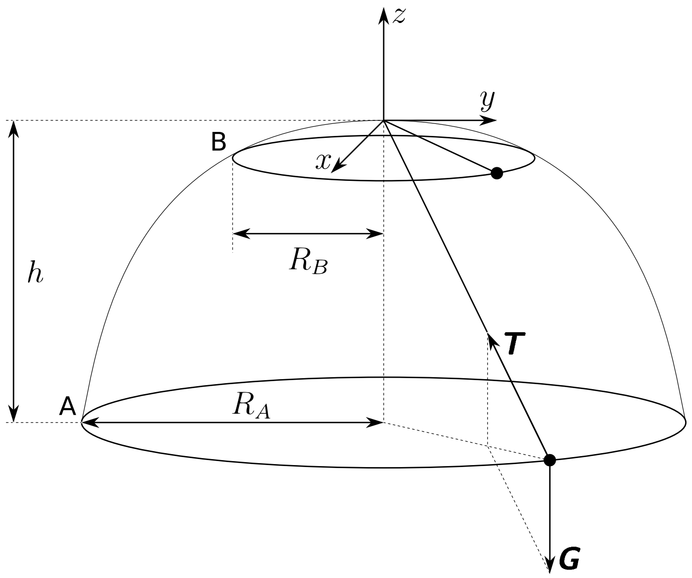
15. Zkrácení provazu kónického kyvadla

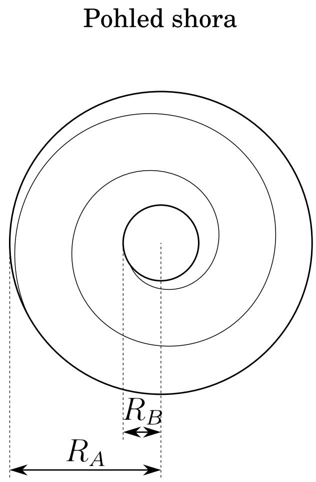
Tento příklad nebude na zkoušce.

Drobný předmět byl zavěšen na vlákně a obíhal po kružnici o poloměru R_A=1 m rychlostí v_A=1 ms^{-1}. Tahem za opačný konec vlákna se délka závěsu zkrátila tak, že se poloměr oběžné kružnice zmenšil na R_B=0.5 m. Vypočítejte oběžnou rychlost po zkrácení vlákna.

- Nakreslete obrázek a souřadnou soustavu.
  Její střed zvolte do místa, kde je uchycen provaz.
- Zjistěte polohu, rychlost, hybnost a moment hybnosti. Který člen nazýváme moment setrvačnosti?
- Jakým momentem působí tahová a gravitační síla?
- Která veličina se zachovává?
- Vypočítejte, jak se změní rychlost.

Řešení:





V tomto příkladu lze využít zákon zachování momentu hybnosti. Nejprve ale musíme moment hybnosti vypočítat a také zjistit, zda se v tomto případě opravdu zachovává. Moment hybnosti je definován $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$, a to znamená, že k jeho určení musíme zjistit polohu a hybnost. Předmět rovnoměrně obíhá po kružnici, takže závislost jeho polohy na čase bude

$$\boldsymbol{r} = [R\cos(\omega t); R\sin(\omega t); -h]$$

Počátek souřadné soustavy je umístěn do bodu závěsu, proto musí být z-ová souřadnice rovna $-h$. Jestliže známe závislost polohy na čase, můžeme zderivováním zjistit rychlost

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = [-R\omega\sin(\omega t); R\omega\cos(\omega t); 0]$$

a když rychlost vynásobíme hmotností, dostaneme hybnost.

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v} = [-mR\omega\sin(\omega t); mR\omega\cos(\omega t); 0]$$

Nyní již můžeme pomocí vektorového součinu zjistit moment hybnosti.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = [-hmR\omega\cos(\omega t); hmR\omega\sin(\omega t); mR^2\omega\cos^2(\omega t) + mR^2\omega\sin^2(\omega t)]$$

a z-ovou složku lze zjednodušit.

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = [-hmR\omega\cos(\omega t); hmR\omega\sin(\omega t); mR^2\omega]$$

S příkladem to sice nijak nesouvisí, ale je zajímavé si povšimnout, že z-ová složka momentu hybnosti nezávisí na čase, takže při oběhu je stále stejná. V našem případě směřuje dolů. Navíc nezávisí ani na

h, takže počátek souřadné soustavy bychom mohli libovolně posouvat podél osy z a moment hybnosti by v této ose vždy vyšel stejně. V obou zbývajících osách, x-ové a ypsilonové ale na čase závisí a mění se. Kdybychom ale přidali další vlákno a další předmět o stejné hmotnosti symetricky na opačnou stranu osy, podařilo by se vynulovat moment hybnosti v x-ové i ypsilonové ose. Moment hybnosti by pak zůstal stále stejný a byl by rovnoběžný s osou rotace. Proto byla zavedena veličina zvaná *moment setrvačnosti*, což je součet mR^2 pro všechny body tvořící rotující symetrické těleso. Ještě jednou si představme další přidaný bod o hmotnosti m, takže moment setrvačnosti by byl $J = 2mR^2$ a mohli bychom psát, že

$$\boldsymbol{L} = J\boldsymbol{\omega}$$

přičemž $\boldsymbol{\omega}$ by v této souvislosti byl *vektor*[2] a byl by rovnoběžný s momentem hybnosti.

To jsme ale v úvahách poněkud odbočili. Nyní si všimněme, jaké síly a jaké momenty sil na předmět působí. Tahová síla vlákna je vždy rovnoběžná s vektorem $\boldsymbol{r}$, takže její moment je evidentně nulový. Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ bude mít složky

$$\boldsymbol{G} = [0; 0; -mg]$$

a pomocí vektorového součinu zjistíme její moment.

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{G} = [-mgR\sin(\omega t); mgR\cos(\omega t); 0]$$

Jak je vidět, v ose z žádný moment síly nepůsobí. To znamená, že se v ose z bude zachovávat moment hybnosti. Je to důsledek druhé impulsové věty, která říká, že

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M}$$

a tudíž se moment hybnosti nebude měnit, protože v ose z je nulový moment síly.

$$M_z = 0 \qquad \Rightarrow \qquad L_z = konst.$$

Platí to samozřejmě pouze v ose z. V ose x ani y se moment hybnosti nezachovává, protože v těchto osách působí moment gravitační síly. Jestliže víme, že moment hybnosti v ose z zůstává stále stejný i když zkrátíme závěs, můžeme snadno vypočítat oběžnou rychlost v_B po zkrácení závěsu:

$$\begin{aligned}
L_{zA} &= L_{zB} \\
mR_A^2\omega_A &= mR_B^2\omega_B \\
R_A^2\omega_A &= R_B^2\omega_B \\
R_A^2\frac{v_A}{R_A} &= R_B^2\frac{v_B}{R_B} \\
v_B &= \frac{R_A v_A}{R_B} = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}$$

Mohli bychom na situaci pohlížet i tak, že se zmenšil moment setrvačnosti a aby moment hybnosti zůstal stejný, musela se zvýšit úhlová rychlost.

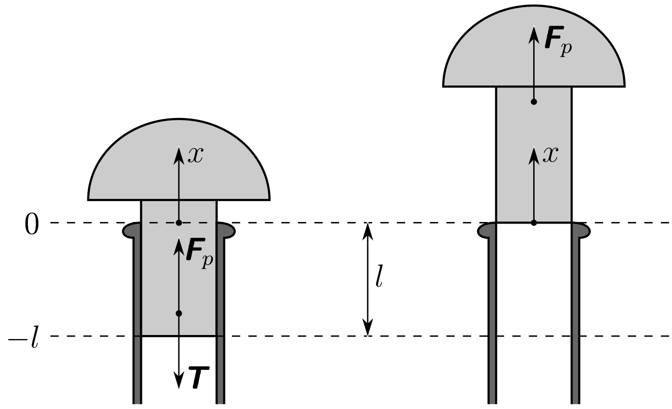
16. Rychlost špuntu šampaňského

Při otvírání šampaňského byla zátka uvolněna natolik, že její další pohyb byl již samovolný. V tom okamžiku byla ještě zaražena l=2 cm hluboko do láhve. Vypočítejte výletovou rychlost zátky, je-li přetlak uvnitř láhve 0,5 MPa, průměr hrdla d=20 mm a hmotnost zátky 10 gramů.

- Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly (tlakovou sílu $\boldsymbol{F}_p$ a třecí sílu $\boldsymbol{T}$) a zvolte souřadnou osu. *Počátek souřadné soustavy umístěte na úroveň hrdla láhve a osa x nechť směřuje ven z láhve.*
- Třecí síla je úměrná zaražení zátky, tedy $T = \beta x$. Víme, že síly jsou v rovnováze, když $x = -l$, z čehož lze určit konstantu úměrnosti β.

[2]Bohužel, symbol omega se někdy používá jako skalár a někdy jako vektor. Symbolem ω (skalárem) se označuje úhlová rychlost či frekvence, která často s rotací souvisí jen vzdáleně – například u oscilátorů. U rotace těles se používá veličina $\boldsymbol{\omega}$, což je vektor a nese v sobě informaci o směru osy rotace.

- Vypočítejte práci, kterou vykoná výslednice sil.
  Platí, že $E = \int_{-l}^{0} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$, přičemž $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = [\mathrm{d}x]$
- Z kinetické energie zátky vypočítejte rychlost.



Na zátku působí tlaková síla $\boldsymbol{F}_p$ a třecí síla $\boldsymbol{T}$. Třecí síla je tím větší, čím hlouběji je zátka zaražena. Hloubka zaražení je totéž, co x-ová souřadnice. Síla bude *přímo úměrná* x, přičemž konstantu úměrnosti označme β.
Vyjádříme složky obou působících sil:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= [\beta x] \\ \boldsymbol{F}_p &= [F_p] \end{aligned}$$

Výslednice sil $\boldsymbol{F}$ je součtem třecí a tlakové síly:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F}_p = [\beta x + F_p]$$

Je-li $x = -l$, pak $\boldsymbol{F} = 0$ (mezní stav, kdy síly jsou v rovnováze). Z toho určíme konstantu úměrnosti β.

$$\begin{aligned} \beta(-l) + F_p &= 0 \\ \beta(-l) &= -F_p \\ \beta &= \frac{F_p}{l} \end{aligned}$$

Snadno nyní můžeme napsat vztah pro výslednici sil. Dále víme, že výsledná síla koná práci po dráze $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$. Zátka se pohybuje pouze v x-ové souřadnici.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \left[\frac{F_p}{l}x + F_p\right] \\ \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= [\mathrm{d}x] \end{aligned}$$

Vypočítáme práci, kterou vykonají obě působící síly (tj. práce výslednice sil).

$$\begin{aligned} E = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r} &= \int_{-l}^{0} \left(\frac{F_p}{l}x + F_p\right) \mathrm{d}x = F_p \int_{-l}^{0} \left(\frac{x}{l} + 1\right) \mathrm{d}x = \\ &= F_p \left[\frac{x^2}{2l} + x\right]_{-l}^{0} = F_p \left(0 - \left(\frac{l^2}{2l} - l\right)\right) = \\ &= F_p \left(-\left(\frac{l}{2} - l\right)\right) = F_p \left(l - \frac{l}{2}\right) = \frac{F_p l}{2} \end{aligned}$$

Přírůstek kinetické energie zátky je roven vykonané práci. Počáteční rychlost zátky byla nulová. Vypočítáme rychlost zátky po vylétnutí z láhve.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{F_p l}{2} \\ mv^2 &= F_p l \\ v &= \sqrt{\frac{F_p l}{m}} \end{aligned}$$

Tlakovou sílu F_p vyjádříme jako součin plochy a tlaku. Hrdlo láhve je kruh o průměru d a průřezu S. Tlak označme Δp a máme tím na mysli *rozdíl* tlaku v láhvi a okolního tlaku.

$$F_p = \Delta p\, S = \Delta p\, \pi r^2 = \Delta p\, \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \Delta p\, \pi \frac{d^2}{4}$$

Tím získáváme konečný vztah pro rychlost zátky.

$$v = \sqrt{\frac{\Delta p\, \pi d^2}{4}\frac{l}{m}} = \frac{d}{2}\sqrt{\frac{\Delta p\, \pi l}{m}} = \frac{0,02}{2}\sqrt{\frac{0,5 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 0,02}{0,01}} \doteq 18\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 64\,\mathrm{km\,h^{-1}}$$

17. Silvestrovská rachejtle (Ciolkovského rovnice)

Silvestrovská rachejtle odstartovala svisle vzhůru. Její hmotnost při startu je 12 gramů, z čehož 4 gramy tvoří palivo, které jí vystačí na dvě sekundy letu. Předpokládejte, že palivo ubývá rovnoměrně (tj. $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} =$ *konst.*) a rychlost tryskajících plynů je $V{=}150\,\mathrm{ms^{-1}}$.

- Nakreslete obrázek, vyznačte působící síly a zvolte souřadnou osu.
- Vypočítejte sílu raketového motoru ($F_R = V\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$)
- Jaké zrychlení má raketa při startu?
- Jaké zrychlení má raketa těsně předtím, než jí dojde palivo?
  Je nutné vzít v úvahu, že hmotnost se zmenšila.
- Jaké maximální rychlosti raketa dosáhne?

Řešení:
Na raketu působí dvě síly. Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ směřující dolů a reaktivní síla $\boldsymbol{F}_R$, která urychluje raketu vzhůru. Reaktivní síla má příčinu v tom, že z rakety tryskají velkou rychlostí $\boldsymbol{V}$ zplodiny ze spalování hořící hnací směsi. Pro jednoduchost si představme raketu, která je při startu zablokována a nepohybuje se. Rychlost plynů je pak konstantní, ale jejich hybnost narůstá, protože každou sekundu jich přibývá. Změna hybnosti za jednotku času je velmi důležitá informace, protože to je rovno působící síle. Zbývá si uvědomit, že zatímco hmotnost plynů stále narůstá, hmotnost rakety *stejnou měrou* klesá (hmota se nikam neztrácí). Je tedy lhostejné, zda budeme při výpočtu síly uvažovat klesání hmotnosti rakety nebo přibývání plynů. Nechť tedy symbol m označuje hmotnost rakety. V tom případě bude její derivace $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ záporná, protože hmotnost rakety klesá. Síla raketového motoru se tudíž vypočítá $\boldsymbol{F}_R = \boldsymbol{V}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$.

Předpokládejme jednorozměrný pohyb a zaveďme souřadnici x, která bude směřovat nahoru. Pak rychlost plynů bude vektor

$$\boldsymbol{V} = [-V]$$

Rychlost plynů je záporná, protože směřuje dolů. Nyní rozepíšeme složky obou sil:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_R &= \boldsymbol{V}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \left[-V\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right] \\ \boldsymbol{G} &= [-mg] \end{aligned}$$

Výslednici sil označme $\boldsymbol{F}$. Platí pro ni, že je součtem obou působících sil.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{F}_R + \boldsymbol{G} \\ F &= -V\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - mg \end{aligned}$$

Zrychlení vypočítáme tak, že výslednici sil podělíme hmotností rakety.

$$\begin{aligned} a &= \frac{F}{m} \\ a &= -\frac{V}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - g \end{aligned}$$

Pro číselný výpočet zrychlení potřebujeme znát údaj $\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$, což je míra ubývání hmotnosti rakety (v kilogramech za sekundu). Veškeré veličiny týkající se startu rakety budeme označovat indexem A, zatímco stav těsně před spotřebováním paliva indexem B. Víme, že hmotnost rakety při startu byla m_A=12 gramů a o dvě sekundy později (t_B - t_A) pouze m_B=8 gramů. V zadání příkladu jsme předpokládali, že palivo hoří *rovnoměrně*, takže můžeme psát

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \frac{m_B - m_A}{t_B - t_A} = \frac{0,008 - 0,012}{2} = -0,002\,\mathrm{kg\,s^{-1}}$$

Nyní můžeme snadno spočítat sílu raketového motoru

$$F_R = -V\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -150(-0,002) = 0,3\,\mathrm{N}$$

Dále vypočítáme zrychlení rakety při startu, kdy je m_A=12 gramů:

$$a_A = -\frac{V}{m_A}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - g = -\frac{150}{0,012}(-0,002) - 10 = 25 - 10 = 15\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

a zrychlení rakety těsně před vyhořením paliva, kdy je m_B=8 gramů:

$$a_B = -\frac{V}{m_B}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} - g = -\frac{150}{0,008}(-0,002) - 10 = 37.5 - 10 = 27.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

Dalším úkolem je vypočítat maximální rychlost rakety, tedy v_B. Vyjdeme z rovnice pro zrychlení, ale upravíme ji tak, aby na jedné straně rovnice byly veličiny týkající se času a na straně druhé veličiny týkající se hmotnosti (provedeme tzv. separaci proměnných).

$$\begin{aligned} a + g &= -\frac{V}{m}\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} \\ (a+g)\mathrm{d}t &= -V\frac{\mathrm{d}m}{m} \end{aligned}$$

Nyní obě strany rovnice zintegrujeme od A do B.

$$\int_A^B (a+g)\mathrm{d}t = \int_A^B -V\frac{\mathrm{d}m}{m}$$

Je vhodné podotknout, že A a B u určitého integrálu nejsou nějaká konkrétní čísla, ale spíše *stavy*, ve kterých se nějaký zkoumaný systém nachází. Pokračujme v úpravě rovnice.

$$\begin{aligned} \int_A^B a\,\mathrm{d}t + \int_A^B g\,\mathrm{d}t &= -V\int_A^B \frac{1}{m}\mathrm{d}m \\ [v]_A^B + g[t]_A^B &= -V[\ln(m)]_A^B \\ (v_B - v_A) + g(t_B - t_A) &= -V\left(\ln(m_B) - \ln(m_A)\right) \\ (v_B - v_A) + g(t_B - t_A) &= V\left(\ln(m_A) - \ln(m_B)\right) \\ (v_B - v_A) + g(t_B - t_A) &= V\ln\frac{m_A}{m_B} \end{aligned}$$

Víme, že počáteční rychlost v_A byla nulová. Dále rozdíl časů $t_B - t_A$ představuje dobu činnosti raketového motoru, což označme T.

$$\begin{aligned} v_B + gT &= V\ln\frac{m_A}{m_B} \\ v_B &= V\ln\frac{m_A}{m_B} - gT \\ v_B &= 150\cdot\ln\frac{12}{8} - 10\cdot 2 = 41\,\mathrm{ms^{-1}} \end{aligned}$$

Tím jsme vypočetli maximální rychlost rakety.

18. Hasičská hadice

Z hasičské hadice chrlí voda (ϱ=1000 kg m^{-3}) o průtoku 200 litrů za minutu. Průměr trysky je 12,5 mm. Vypočítejte:

- objemový průtok vody (kolik metrů krychlových proteče za jednu sekundu)
- rychlost proudící vody
- maximální výšku, do které voda vystříkne kolmo vzhůru (odpor vzduchu zanedbejte)
- přetlak v hadici (předpokládejte ideální kapalinu).
- výkon čerpadla požární stříkačky
- jak se za každou sekundu zvýší hybnost vystříknuté vody
- zpětný tah hubice, tj. reaktivní sílu, kterou musí hasič udržet (hubice se chová jako raketový motor)

Řešení:
Objemový průtok v metrech krychlových za sekundu označme Q, přičemž platí, že $Q = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. Jeho číselná hodnota je

$$Q = \frac{0,2}{60} \doteq 0,003333\,\mathrm{m^3\,s^{-1}}$$

Objemový průtok je součin průřezu S a rychlosti v, z čehož snadno určíme rychlost kapaliny.

$$\begin{aligned} Q &= Sv \\ v &= \frac{Q}{S} \end{aligned}$$

Víme, že hubice má kruhový průřez o průměru d. Platí tedy

$$S = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

a rychlost proudící vody vychází

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2} \doteq 27\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Maximální výšku můžeme určit například z Bernoulliho rovnice (případně jinou úvahou o energii). Pro ideální kapalinu platí, že

$$p + h\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v^2 = konst$$

a obrátíme-li hubici kolmo vzhůru, bude platit, že

$$p_A + h_A\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v_A^2 = p_B + h_B\varrho g + \frac{1}{2}\varrho v_B^2$$

kde veličiny s indexem A představují stav vody těsně po vystříknutí z hadice. Výšku h_A položme rovnu nule, rychlost v_A jsme určili v předchozím výpočtu. Veličiny s indexem B popisují vodu v její nejvyšší výšce, kde je rychlost v_B nulová. Oba tlaky p_A i p_B jsou tlaky atmosférické a považujme je za stejné. Platí tedy

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varrho v_A^2 &= h_B\varrho g \\ \frac{1}{2}v_A^2 &= h_B g \\ h_B &= \frac{v_A^2}{2g} = \frac{Q^2}{S^2 2g} = \frac{Q^2}{2g}\frac{16}{\pi^2 d^4} = \frac{8Q^2}{g\pi^2 d^4} \doteq 37\,m \end{aligned}$$

Tlak v hadici můžeme vypočítat opět z Bernoulliho rovnice. Veličiny s indexem A ponechme beze změny. Veličiny s indexem B však nyní budou představovat stav vody v hadici, kde je voda pod tlakem p_B.

Rychlost vody v hadici položme rovnu nule, i když to není zcela pravda (je však mnohonásobně menší než výtoková rychlost v_A). Výška kapaliny h_A i h_B je stejná, tudíž z rovnice vymizí.

$$p_A + \frac{1}{2}\varrho v_A^2 = p_B$$

Označme Δp přetlak v hadici, který je roven $p_B - p_A$. Platí

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho v^2 = \frac{1}{2}\varrho\frac{Q^2}{S^2} = \frac{1}{2}\varrho\frac{Q^2 16}{\pi^2 d^4} \doteq 370\,kPa$$

Dalším úkolem je vypočítat výkon čerpadla požární stříkačky. Výkon můžeme považovat za součin síly a rychlosti. Tedy

$$P = Fv = Sp\frac{Q}{S} = pQ = \frac{1}{2}\varrho\frac{Q^2}{S^2}Q = \frac{1}{2}\varrho\frac{Q^3}{S^2} = \frac{\varrho Q^3}{2}\frac{16}{\pi^2 d^4} \doteq 1230\,W$$

Poslední dva úkoly spolu velmi úzce souvisejí a jak uvidíme, odpověď je v obou případech stejná. Jde o výpočet síly, která působí na hubici v opačném směru než tryská voda. Je to síla, která by dokázala nezkušeného hasiče povalit na záda. Původ této síly spočívá v tom, že voda změnila svou rychlost, protože v hubici byla urychlována. Tohoto zrychlení je možné docílit pouze působením síly. Ze zákona akce a reakce je zřejmé, že silové působení je vzájemné, tedy že hubice působí na vodu a současně voda na hubici. Je zde zřejmá analogie s raketovým motorem.

Druhý Newtonův zákon říká, že $F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}$, takže když zjistíme, jak se za každou sekundu změní hybnost vystříknuté vody, zjistíme tím současně velikost síly. Hybnost vody je rychlost krát hmotnost

$$p = mv$$

ale hmotnost m se každým okamžikem zvyšuje. Nárůst hmotnosti za sekundu vypočítáme tak, že objemový průtok Q vynásobíme hustotou (hustota krát objem je hmotnost), tedy $\varrho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$. Jestliže změnu hmotnosti vynásobíme rychlostí, získáme změnu hybnosti. A to je rovno působící síle.

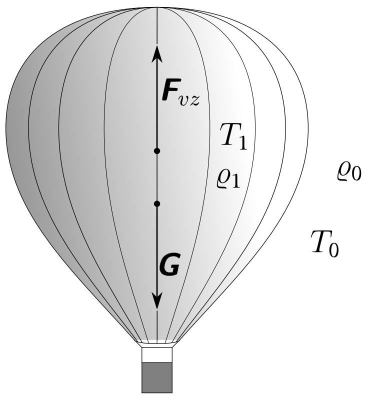
$$F = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}v = \varrho\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}v = \varrho Qv = \varrho Q\frac{Q}{S} = \varrho\frac{Q^2}{S} = \frac{4\varrho Q^2}{\pi d^2} \doteq 90,5\,N$$

19. Horkovzdušný balón

Teplota vzduchu uvnitř horkovzdušného balónu je 100°C, přičemž teplota okolí je 20°C a hustota okolního vzduchu je 1,28 kg m^{-3}. Hmotnost balónu činí jednu tunu. Jaký musí mít objem, má-li se vznášet?

- Nakreslete obrázek a vyznačte působící síly
- Pro vyjádření vztlakové síly použijte Archimédův zákon.
- Hmotnost balónu vyjádřete jako součet hmotnosti jeho pevných součástí a hmotnosti vzduchu, který je uvnitř.
- Pokuste se ze stavové rovnice $pV = nRT$ dokázat, že součin hustoty a teploty je konstanta.
- Vypočítejte objem balónu a odhadněte i jeho velikost.

Řešení:



Pro jednoduchost předpokládejme, že je bezvětří a balón se vznáší ve vzduchu bez pohybu. Působí na něj dvě síly, síla gravitační $\boldsymbol{G}$, která směřuje svisle dolů a síla vztlaková $\boldsymbol{F}_{vz}$, která je k ní opačná a směřuje vzhůru. Fyzikální původ vztlakové síly spočívá v tom, že tlak tekutiny narůstá, čím níže se nacházíme. Na spodní část tělesa v tekutině tak bude působit větší síla než na jeho horní část, a těleso bude nadnášeno. Spokojme se prozatím s tímto hrubým vysvětlením a dále předpokládejme, že vzduch je nestlačitelný[3] a tudíž jeho hustota je konstantní. Pro tento případ platí Archimédův zákon. Balón je „ponořen“ do tekutiny, kterou představuje okolní vzduch o hustotě ϱ_0, a tak je nadlehčován silou $\boldsymbol{F}_{vz}$, pro kterou platí

$$\boldsymbol{F}_{vz} = [V\varrho_0 g]$$

Souřadná osa x nechť směřuje vzhůru, stejně jako vztlaková síla. Dále působí na balón síla gravitační $\boldsymbol{G}$, která bude mít opačný směr:

$$\boldsymbol{G} = [-mg]$$

Požadujeme, aby balón setrval v rovnováze, takže součet obou sil musí být nulový:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}_{vz} + \boldsymbol{G} &= 0 \\ V\varrho_0 g - mg &= 0 \\ V\varrho_0 - m &= 0 \end{aligned}$$

Hmotnost balónu, kterou jsme označili m, v sobě zahrnuje hmotnost všech jeho pevných součástí (tu označme M), ale také hmotnost zahřátého vzduchu, který je uvnitř. V tomto případě by bylo velmi nesprávné uvažovat, že vzduch nic neváží, protože jak uvidíme, jeho hmotnost bude téměř čtyři tuny! Hmotnost vzduchu uvnitř balónu můžeme vyjádřit jako součin objemu balónu V a hustoty zahřátého vzduchu ϱ_1.

$$\begin{aligned} V\varrho_0 - (M + V\varrho_1) &= 0 \\ V\varrho_0 - M - V\varrho_1 &= 0 \\ V(\varrho_0 - \varrho_1) &= M \\ V &= \frac{M}{\varrho_0 - \varrho_1} \end{aligned}$$

Abychom mohli příklad dopočítat, musíme zjistit hustotu zahřátého vzduchu. Pokusíme se najít vztah mezi hustotou a teplotou. Vyjdeme ze stavové rovnice pro ideální plyn.

$$pV = nRT$$

p je tlak plynu, V je jeho objem, n je počet molů, R je univerzální plynová konstanta a T je teplota plynu (v kelvinech). Pro počet molů n platí, že je to podíl hmotnosti m a molární hmotnosti M_m:

$$pV = \frac{m}{M_m} RT$$

Nyní na pravé straně rovnice ponechme teplotu T a podíl hmotnosti a objemu, což je hustota. Na levé straně rovnice zůstanou veličiny, které se nemění – plynová konstanta R, molární hmotnost M_m a v našem případě bereme za konstantu i tlak p:

$$\frac{pM_m}{R} = \frac{m}{V} T$$

Součin teploty a hustoty je tedy konstanta

$$konst. = \varrho T$$

a tudíž platí

$$\varrho_0 T_0 = \varrho_1 T_1$$

[3] Toto tvrzení je potřeba uvést na pravou míru. Vzduch sice *je* stlačitelný, ale balón má příliš malé rozměry na to, aby se změna hustoty s výškou nějak výrazně projevila.

kde ϱ_0 a T_0 je hustota a teplota okolního vzduchu, zatímco ϱ_1 a T_1 je hustota a teplota zahřátého vzduchu uvnitř balónu. Z toho snadno vyjádříme ϱ_1

$$\varrho_1 = \frac{T_0}{T_1}\varrho_0$$

a dosadíme do vztahu pro objem balónu:

$$V = \frac{M}{\varrho_0 - \frac{T_0}{T_1}\varrho_0} = \frac{M}{\varrho_0\left(1 - \frac{T_0}{T_1}\right)} = \frac{1000}{1,28\left(1 - \frac{273{,}15+20}{273{,}15+100}\right)} \doteq 3644\,\mathrm{m}^3$$

Pokusíme se alespoň zhruba odhadnout velikost balónu. Jeho tvar můžeme přirovnat ke kouli, jejíž poloměr vypočítáme.

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ r^3 &= \frac{3V}{4\pi} \\ r &= \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} \doteq 9{,}5\,\mathrm{m} \end{aligned}$$

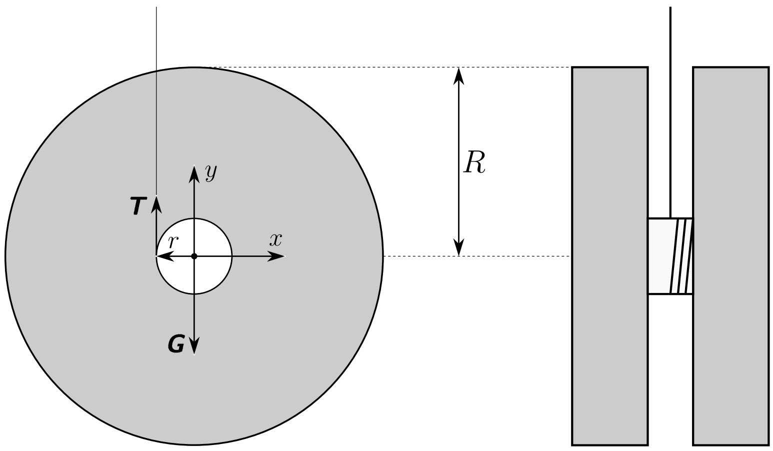
Průměr balónu je tedy přibližně dvacet metrů.

20. Jojo

Jojo o hmotnosti $m = 80\,\mathrm{g}$ má poloměr $R = 5\,\mathrm{cm}$. Vnitřní osa o poloměru $r = 0,5\,\mathrm{cm}$, na které je namotán provázek, má zanedbatelnou hmotnost. Jojo tedy můžeme považovat za válec s momentem setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2 = 0,0001\,\mathrm{kg\,m}^2$.

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou soustavu a vyznačte působící síly.
  Počátek souřadné soustavy je vhodné umístit do středu joja.
- Rozepište složky působících sil a jejich momenty.
- Z výslednice sil vyjádřete zrychlení těžiště joja. (1.rovnice)
- Z výsledného momentu sil vyjádřete úhlové zrychlení joja. (2.rovnice)
- Jaká rovnice charakterizuje odmotávání provázku? (3.rovnice)
- Ze soustavy rovnic vypočítejte zrychlení těžiště joja, úhlové zrychlení joja a tahovou sílu provázku.
- Ze zrychlení joja vypočítejte, za jak dlouho se odmotá provázek o délce $l = 1\,\mathrm{m}$.
  Zrychlení dvakrát zintegrujte podle času, čímž získáte polohu joja.

Řešení:



Na jojo působí dvě síly. Gravitační síla $\boldsymbol{G}$ a tahová síla provázku $\boldsymbol{T}$. Počátek souřadné soustavy umístíme do středu joja, a pak můžeme rozepsat složky obou sil:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= [0; T; 0] \\ \boldsymbol{G} &= [0; -mg; 0] \end{aligned}$$

Výsledný pohyb těžiště je dán výslednicí sil, kterou označme $\boldsymbol{F}$. Když ji podělíme hmotností, získáme zrychlení:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= \boldsymbol{T} + \boldsymbol{G} = [0; T - mg; 0] \\ \boldsymbol{a} &= \frac{\boldsymbol{F}}{m} = \left[0; \frac{T}{m} - g; 0\right] \end{aligned}$$

Pro ypsilonovou složku zrychlení můžeme psát rovnici

$$I. \qquad a_y = \frac{T}{m} - g$$

Dále víme, že momenty sil způsobují roztáčení tělesa ($\varepsilon = \frac{\boldsymbol{M}}{J}$). Jak je vidět z obrázku, moment gravitační síly je nulový, protože těžiště je přímo v počátku souřadné soustavy. Jediný moment, který na jojo působí je moment tahové síly. Snadno jej vyjádříme pomocí vektorového součinu.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_T &= [-r; 0; 0] \\ \boldsymbol{T} &= [0; T; 0] \\ \boldsymbol{M}_T = \boldsymbol{r}_T \times \boldsymbol{T} &= [0; 0; -rT] \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{\boldsymbol{M}_T}{J} = \left[0; 0; \frac{-rT}{J}\right] \end{aligned}$$

Pro z-ovou složku úhlového zrychlení tak dostáváme rovnici

$$II. \qquad \varepsilon_z = \frac{-rT}{J}$$

Získali jsme tak dvě rovnice o třech neznámých a_y, T a ε_z, takže potřebujeme ještě nějakou další informaci k tomu, abychom mohli příklad vyřešit. Pomůže nám skutečnost, že z vnitřní osy joja se odmotává provázek. Ze zkušenosti víme, že čím rychleji jojo klesá, tím rychleji se otáčí. Jestliže klesá, pak je jeho rychlost záporná (zvolili jsme tak souřadnou soustavu). A z obrázku by mělo být patrné, že smysl otáčení je taktéž záporný. Platí to nejen pro rychlosti, ale také pro zrychlení. Čím větší má jojo zrychlení a_y směrem dolů, tím větší musí být jeho úhlové zrychlení ε_z a obě veličiny jsou záporné. Konstanta úměrnosti je r, tedy poloměr osy, na které je namotán provázek. Můžeme psát třetí rovnici

$$III. \qquad -a_y = -r\varepsilon_z$$

Nyní vyřešíme soustavu tří rovnic o třech neznámých. Začít můžeme například tak, že do třetí rovnice dosadíme a_y z první rovnice a ε_z z druhé rovnice. Vyřešením vypočítáme tahovou sílu T:

$$\begin{aligned} -a_y &= -r\varepsilon_z \\ -\left(\frac{T}{m} - g\right) &= -r\left(\frac{-rT}{J}\right) \\ -\frac{T}{m} + g &= \frac{r^2 T}{J} \\ g &= \frac{r^2 T}{J} + \frac{T}{m} \\ g &= T\left(\frac{r^2}{J} + \frac{1}{m}\right) \\ g &= T\frac{mr^2 + J}{Jm} \\ T &= \frac{gJm}{mr^2 + J} = \frac{Jg}{r^2 + \frac{J}{m}} \doteq 0,78\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

Vztah pro tahovou sílu můžeme dosadit do první rovnice a tím získat a_y

$$a_y = \frac{T}{m} - g = \frac{1}{m} \cdot \frac{Jgm}{mr^2 + J} - g = \frac{Jg}{mr^2 + J} - g = g\left(\frac{J}{mr^2 + J} - 1\right) \doteq -0,2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

A nyní už zbývá jen dosadit tahovou sílu T do druhé rovnice a vypočítat úhlové zrychlení ε_z:

$$\varepsilon_z = \frac{-rT}{J} = -\frac{r}{J} \cdot \frac{Jg}{r^2 + \frac{J}{m}} = -\frac{rg}{r^2 + \frac{J}{m}} \doteq -39\,\mathrm{s}^{-2}$$

Známe-li zrychlení těžiště joja a_y, můžeme integrací podle času vypočítat jeho rychlost v_y. Integrační konstanta bude mít v tomto případě význam počáteční rychlosti joja $v_y(0)$, ale ta je nulová, protože na počátku bylo jojo v klidu. Obdobný proces použijeme ještě jednou – vypočítanou rychlost zintegrujeme podle času a tím získáme závislost polohy r_y na čase t. Počáteční poloha $r_y(0)$ byla nulová.

$$\begin{aligned} v_y &= \int a_y \,\mathrm{d}t = a_y t + v_y(0) = a_y t \\ r_y &= \int v_y \,\mathrm{d}t = \int a_y t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} a_y t^2 + r_y(0) = \frac{1}{2} a_y t^2 \end{aligned}$$

Čas, kdy se odmotá provázek joja, označme τ. Po odmotání provázku o délce l bude poloha těžiště joja rovna $r_y(\tau) = -l$. Záporné znaménko vyplývá z toho, že osa y směřuje nahoru.

$$\begin{aligned} -l &= \frac{1}{2} a_y \tau^2 \\ -\frac{2l}{a_y} &= \tau^2 \\ \tau &= \sqrt{-\frac{2l}{a_y}} \doteq 3{,}2\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Tím jsme vypočítali, za jak dlouho se odmotá provázek.

21. Dřevorubci nesou kládu

Dva dřevorubci nesou pětimetrovou kládu, přičemž každý z nich je na jednom konci. Hmotnost klády je 30 kg a její těžiště se nachází dva metry od těžšího konce. Jakou sílu musí dřevorubci vynaložit?

- Nakreslete obrázek a zvolte souřadnou soustavu.
- Rozepište složky všech tří působících sil.
- U každé síly zjistěte, jakým působí momentem.
  Vhodnou volbou souřadné soustavy lze docílit toho, že jeden z momentů bude nulový.
- Zapište podmínky pro statickou rovnováhu, čímž vznikne soustava rovnic.
- Soustavu rovnic vyřešte, dosaďte číselné hodnoty a napište odpověď.

Řešení:
Těžší konec klády (to je ten, který je blíže těžišti) nechť je z našeho pohledu nalevo. Právě do něj zvolíme počátek souřadné soustavy, ačkoli jiná volba by byla stejně dobrá. Osa x bude směřovat napravo, osa y nahoru a osa z k nám. Délku klády označme l a vzdálenost těžiště od těžšího konce označme d. Na kládu působí tři síly. Síla $\boldsymbol{F}_1$ na těžším konci, gravitační síla $\boldsymbol{G}$ v těžišti a síla $\boldsymbol{F}_2$ na lehčím konci. Je zřejmé, že oba dřevorubci tlačí kládu směrem nahoru, zatímco gravitační síla směřuje dolů. Teoreticky by bylo možné, že síly $\boldsymbol{F}_1$ a $\boldsymbol{F}_2$ nejsou rovnoběžné, ale to by znamenalo, že se dřevorubci o kládu přetahují nebo se přetlačují, což nepředpokládáme. Síla $\boldsymbol{F}_1$ bude mít složky

$$\boldsymbol{F}_1 = [0; F_1; 0]$$

a souřadnice jejího působiště jsou $\boldsymbol{r}_{F1} = [0; 0; 0]$, takže její moment je evidentně nulový.

$$\boldsymbol{M}_{F1} = [0; 0; 0]$$

Gravitační síla působí v těžišti[4], takže souřadnice jejího působiště budou

$$\boldsymbol{r}_G = [d; 0; 0]$$

[4]Gravitační síla ve skutečnosti nepůsobí v těžišti, to je pouze zjednodušující představa, aby se příklady snáze počítaly. Gravitace samozřejmě působí na všechny body tělesa. Ale *kdyby* působila v těžišti, měla by stejný moment.

a složky jsou

$$\boldsymbol{G} = [0; -mg; 0]$$

Pomocí vektorového součinu snadno zjistíme, že moment gravitační síly bude

$$\boldsymbol{M}_G = \boldsymbol{r}_G \times \boldsymbol{G} = [0; 0; -dmg]$$

Obdobným způsobem rozepíšeme sílu $\boldsymbol{F}_2$, jejíž působiště je na pravém konci klády a má souřadnice

$$\boldsymbol{r}_{F2} = [l; 0; 0]$$

přičemž složky budou

$$\boldsymbol{F}_2 = [0; F_2; 0]$$

a její moment opět vypočteme pomocí vektorového součinu

$$\boldsymbol{M}_{F2} = \boldsymbol{r}_{F2} \times \boldsymbol{F}_2 = [0; 0; lF_2]$$

Dále předpokládáme, že kláda je v klidu, takže má nulové zrychlení i nulové úhlové zrychlení. Můžeme také připustit, že dřevorubci kládu nesou rovnoměrně přímočaře, ale opět platí, že kláda nezrychluje. Součet sil i součet momentů sil proto musí být nulový, takže

$$\boldsymbol{F}_1 + \boldsymbol{G} + \boldsymbol{F}_2 = 0$$

a zároveň

$$\boldsymbol{M}_{F1} + \boldsymbol{M}_G + \boldsymbol{M}_{F2} = 0$$

z čehož získáme dvě rovnice

$$\begin{array}{lrcl} I. & F_1 - mg + F_2 & = & 0 \\ II. & -dmg + lF_2 & = & 0 \end{array}$$

a z druhé rovnice je ihned zřejmý výsledek pro druhou sílu

$$F_2 = \frac{dmg}{l} \doteq 117{,}72\,\mathrm{N}$$

který když dosadíme do první rovnice, získáme

$$\begin{array}{rcl} F_1 - mg + \dfrac{dmg}{l} & = & 0 \\ F_1 & = & mg\left(1 - \dfrac{d}{l}\right) \doteq 176{,}58\,\mathrm{N} \end{array}$$

Jistě není žádným překvapením, že obě síly vyšly kladně, a to znamená, že opravdu směřují nahoru. Součet sil F_1 a F_2 kompenzuje gravitační sílu. Dřevorubec, který nese těžší konec, musí působit větší silou, což se dalo očekávat. A navíc, poměr sil F_1 a F_2 je tři ku dvěma, což odpovídá poměru vzdáleností od těžiště – tento fakt se často uvádí jako podmínka rovnováhy na páce. To ale vůbec není nutné si pamatovat.

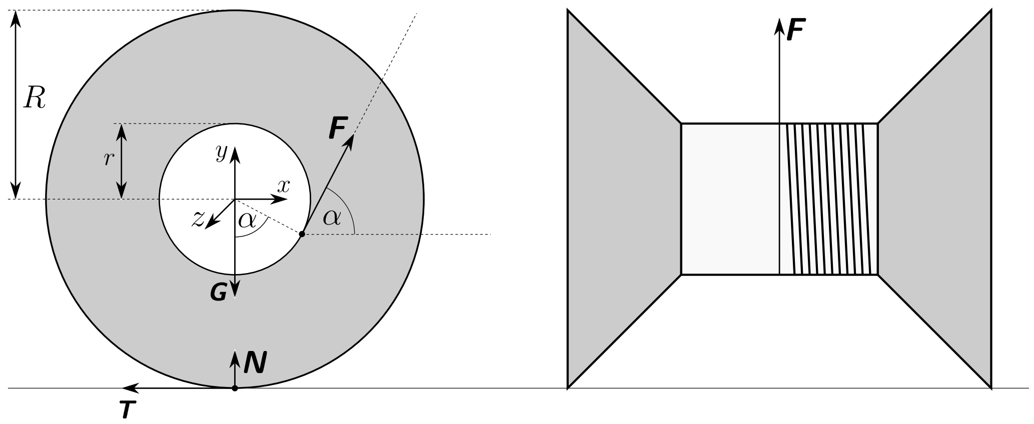
22. Cívka s nití

Nit je navinuta na cívku o poloměru $r = 1\,\mathrm{cm}$ a aby se nit nevyvlékla, jsou okraje cívky rozšířeny na poloměr $R = 2\,\mathrm{cm}$. Jestliže se taková cívka zakutálí, ale konec nitě zůstane v ruce, je možné cívku za určitých podmínek přitáhnout zpět. Nit musí vycházet zespodu cívky. Určete, jaká podmínka musí platit pro úhel mezi nití a podlahou.

- Nakreslete obrázek a zvolte souřadnou soustavu. Její počátek je vhodné umístit do středu cívky.
- Rozepište složky jednotlivých sil a vektorovým součinem zjistěte jejich momenty.
- Existuje takový úhel, při němž je cívka v klidu. Napište podmínky pro rovnováhu.

- Vypočtěte úhel mezi nití a podlahou a popište, co se stane, jestliže se úhel zvětší nebo zmenší.

Řešení:



Na cívku působí čtyři síly – gravitační síla $\boldsymbol{G}$, třecí síla $\boldsymbol{T}$ díky které cívka neproklouzne po podlaze, dále normálová síla $\boldsymbol{N}$, která brání proboření cívky do země a čtvrtou silou je tah nitě $\boldsymbol{F}$. Postupně rozepíšeme všechny působící síly a jejich momenty v souřadné soustavě, jejíž počátek umístíme do středu cívky. Gravitační síla má složky

$$\boldsymbol{G} = [0; -mg; 0]$$

Moment gravitační síly je nulový, protože se těžiště nachází právě v počátku souřadné soustavy, a tak gravitační síla má nulové rameno. Další silou je síla třecí $\boldsymbol{T}$, jejíž působiště je v místě dotyku cívky a podlahy.

$$\boldsymbol{r}_T = [0; -R; 0]$$

Třecí síla směřuje z našeho pohledu doleva, to znamená v záporném směru osy x:

$$\boldsymbol{T} = [-T; 0; 0]$$

Vektorový součin $\boldsymbol{r}_T \times \boldsymbol{T}$ dává moment třecí síly:

$$\boldsymbol{M}_T = [0; 0; -RT]$$

Nyní rozepíšeme složky normálové síly $\boldsymbol{N}$, která působí ve stejném místě jako třecí síla, tj. v $[0; -R; 0]$ a směřuje svisle vzhůru.

$$\boldsymbol{N} = [0; N; 0]$$

Vektorovým součinem bychom zjistili, že její moment je nulový, ale to lze také snadno odhadnout. Síla směřuje přímo do počátku souřadné soustavy, takže je rovnoběžná se svým ramenem. Zbývá rozepsat sílu $\boldsymbol{F}$, což je tah nitě. Působiště této síly je samozřejmě kdekoli podél nitě a ať vybereme kterýkoli bod, bude to správně. Nit je částečně namotaná na cívku, ale to nemá na nic vliv. Všímejme si například dolního konce nitě, který má souřadnice

$$\boldsymbol{r}_F = [r \sin\alpha; -r\cos\alpha; 0]$$

Je to místo, ve kterém se nit začíná zakřivovat. Tah nitě směřuje šikmo vpravo vzhůru, takže síla $\boldsymbol{F}$ bude mít složky

$$\boldsymbol{F} = [F\cos\alpha; F\sin\alpha; 0]$$

Moment tahové síly zjistíme vektorovým součinem:

$$\boldsymbol{M}_F = [0; 0; rF\sin^2\alpha + rF\cos^2\alpha] = [0; 0; rF]$$

Je pochopitelné, že úhel α vymizel. Sklon nitě nemá na moment síly vliv, protože rameno bude stále kolmé na sílu. Nit bude vždy představovat tečnu k cívce. Má-li cívka zůstat v klidu, musí být součet sil i součet momentů sil roven nule. Získáme tím tři rovnice

$$\begin{aligned}
I. &\qquad -T + F\cos\alpha = 0\\
II. &\qquad -mg + N + F\sin\alpha = 0\\
III. &\qquad -RT + rF = 0
\end{aligned}$$

Jestliže z první rovnice vyjádříme T a dosadíme do třetí rovnice, dostaneme

$$-RF\cos\alpha + rF = 0$$

a z toho již snadno vypočteme úhel α:

$$\alpha = \arccos\frac{r}{R} = 60^\circ$$

Při tomto sklonu nitě zůstane cívka v klidu. Jestliže úhel zvýšíme například zvednutím konce nitě, bude se cívka kutálet směrem doleva, a nit se bude stále více odmotávat. Naopak snížení úhlu bude mít za následek, že se cívka rozjede směrem doprava, nit se bude namotávat a tímto způsobem je možné cívku přitáhnout k sobě.

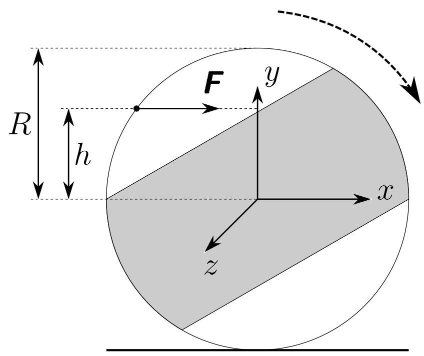
Zajímavé je, že druhou rovnici jsme k výpočtu vůbec nepoužili. Ta by byla velmi užitečná, kdybychom chtěli zjistit maximální tah nitě, při kterém se cívka ještě dotýká podlahy. Zatáhneme-li (či spíše škubneme) za nit příliš silně, cívka se odpoutá od země, poletí, třecí a normálová síla zmizí . . . ale to už je jiný příklad.

23. Kulečníkový šťouch

Do kterého místa kulečníkové koule je potřeba mířit tágem, aby koule nedostala faleš a neprokluzovala? Průměr koule je 57 mm a její moment setrvačnosti se vypočítá $J = \frac{2}{5}mR^2$.

- Nakreslete obrázek a zvolte souřadnou soustavu. Její počátek umístěte do středu koule.
- Rozepište složky síly, která na kouli působí při šťouchu. Zjistěte také její moment.
- Síla způsobuje zrychlení, moment síly způsobuje úhlové zrychlení. Tyto rovnice napište.
- Jaký vztah musí platit mezi zrychlením a úhlovým zrychlením, má-li se koule kutálet bez prokluzování?
- Najděte místo, kde musí síla působit.

Řešení:



Při šťouchu působí na kouli síla $\boldsymbol{F}$, jejíž působiště závisí na tom, kam namíříme tágo. Kdyby síla vedla přímo na střed, pak by se koule neroztočila, protože by nevznikl moment síly. Předpokládejme, že působiště síly bude ve výšce h nad středem koule. Vzhledem k tomu, že do středu koule jsme umístili počátek souřadné soustavy, je ypsilonová souřadnice působiště rovna právě h. Na x-ové souřadnici nezáleží, protože síla vede vodorovně. Ve vodorovném směru proto můžeme působiště libovolně posouvat a vždy bude mít síla stejný moment. Místo úderu tága bychom sice mohli zjistit pomocí Pythagorovy věty a psát

$$\boldsymbol{r}_F = [-\sqrt{R^2 - h^2}; h; 0]$$

ale pro jednoduchost můžeme uvažovat, že $\boldsymbol{r}_F = [0; h; 0]$. Síla $\boldsymbol{F}$ směřuje vodorovně směrem vpravo, tudíž

$$\boldsymbol{F} = [F; 0; 0]$$

a její moment bude

$$\boldsymbol{M}_F = \boldsymbol{r}_F \times \boldsymbol{F} = [0; 0; -hF]$$

bez ohledu na to, jakou x-ovou souřadnici bude mít působiště. Měli bychom ještě vzít v úvahu gravitační sílu směřující dolů a normálovou sílu směřující nahoru, ale tyto dvě síly se vzájemně vyruší, jejich momenty jsou evidentně nulové, takže se jimi nemusíme zabývat.

Síla $\boldsymbol{F}$ způsobuje zrychlení ($\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/m$), jehož x-ová složka bude

$$I. \qquad a_x = \frac{F}{m}$$

Ostatní složky budou nulové. Moment síly $\boldsymbol{M}_F$ způsobuje úhlové zrychlení ($\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{M}/J$), a to pouze v ose z:

$$II. \qquad \varepsilon_z = \frac{-hF}{J} = \frac{-hF}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{-5hF}{2mR^2}$$

Za moment setrvačnosti koule bylo možné hned dosadit. Dále požadujeme, aby se koule kutálela. To znamená, že mezi zrychlením a úhlovým zrychlením musí platit vztah

$$III. \qquad a_x = -R\varepsilon_z$$

Právě tehdy se totiž koule roztočí vždy tak šikovně, aby neprokluzovala. Tím jsme dostali tři rovnice, ze kterých můžeme zjistit neznámou h. Tu vyjádříme z druhé rovnice

$$h = \frac{-\varepsilon_z 2mR^2}{5F}$$

a za F můžeme dosadit z první rovnice

$$= \frac{-\varepsilon_z 2mR^2}{5ma_x}$$

a a_x lze použít ze třetí rovnice:

$$= \frac{-\varepsilon_z 2mR^2}{-5mR\varepsilon_z} = \frac{2}{5}R = \frac{D}{5} = 11{,}4\,\mathrm{mm}$$

Tím je příklad vyřešen a pro názornost bychom mohli ještě zjistit výšku měřenou od plátna, tj. od povrchu kulečníkového stolu. Vyšlo by

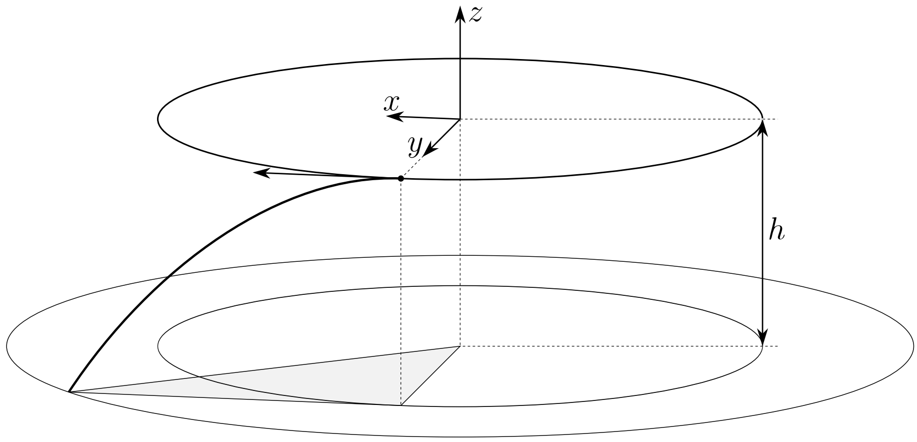
$$\frac{D}{2} + \frac{D}{5} = \frac{7}{10}D \doteq 40\,\mathrm{mm}$$

24. Bota padající z řetízkového kolotoče

Dítě sedí na sedačce řetízkového kolotoče, která obíhá po kružnici o poloměru $R = 5$ metrů ve výši $h = 4$ metry nad zemí. Jedna otáčka kolotoče trvá $T = 5$ sekund. Dítěti náhle spadla bota. Jak dlouho bota poletí? Jak daleko od osy otáčení kolotoče bota dopadne?

- Nakreslete obrázek a zvolte souřadnou soustavu.
- Napište závislost polohy na čase.
- Derivací vyjádřete rychlost.
- Zvolte libovolný časový okamžik, například nulu, a vypočítejte polohu a rychlost.
- Nakreslete obrázek (pohled z boku) a napište, jaké zrychlení působí na botu během pádu.
- Zrychlení zintegrujte, čímž získáte rychlost (počáteční rychlost jste již zjistili).
- Rychlost zintegrujte, čímž vypočítáte polohu (počáteční polohu jste již zjistili).
- Jaká podmínka platí pro dopad boty na zem? Z této podmínky vypočítejte čas.
- Z času snadno zjistíte polohu dopadu. Nakreslete obrázek (pohled shora).
- Pomocí Pythagorovy věty vypočítejte vzdálenost dopadu od osy rotace.
- Jedna paní povídala, že bota odletěla odstředivou silou. Měla pravdu?

Řešení:



Rovnoměrný pohyb po kružnici lze popsat funkcemi sinus a kosinus. V tomto případě je lhostejné, kde pohyb začal a jaký je směr otáčení, takže závislost polohy na čase můžeme napsat například takto:

$$\boldsymbol{r}(t) = [R\sin(\omega t); R\cos(\omega t); 0]$$

Počátek souřadné soustavy se nachází ve středu kružnice, a proto je z-ová souřadnice nulová. Derivací podle času zjistíme rychlost.

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}(t)}{\mathrm{d}t} = [R\omega\cos(\omega t); -R\omega\sin(\omega t); 0]$$

Bota se pohybuje po kružnici, protože jí k tomu nutí dostředivá síla. Ta je vytvořená součtem gravitační síly a tahové síly, kterou u kolotoče zprostředkovává řetěz. Ale v určitém okamžiku dojde k tomu, že tahová síla náhle zmizí a na botu bude působit pouze gravitační síla. K tomu, abychom zjistili jak bota dále poletí, musíme znát její polohu a rychlost v okamžiku, kdy začala padat. Ten okamžik neznáme, ale ono na něm nezáleží. Zvolme proto například nulu.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(0) &= [0; R; 0] \\ \boldsymbol{v}(0) &= [R\omega; 0; 0] \end{aligned}$$

Nyní víme, jakou polohu a rychlost měla bota na začátku pádu, což využijeme při integraci. Během pádu na ni působí tíhové zrychlení:

$$\boldsymbol{a} = [0; 0; -g]$$

Integrací zrychlení podle času získáme rychlost. Integrační konstanty zjistíme z počáteční rychlosti.

$$\boldsymbol{v}(t) = \int \boldsymbol{a}\,\mathrm{d}t = [R\omega; 0; -gt]$$

Opětovnou integrací zjistíme polohu. Integrační konstanty souhlasí s počáteční polohou.

$$\boldsymbol{r}(t) = \int \boldsymbol{v}(t)\,\mathrm{d}t = \left[R\omega t; R; -\frac{1}{2}gt^2\right]$$

Čas dopadu označme τ. Musí platit, že v okamžiku času dopadu je z-ová souřadnice rovna $-h$.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}g\tau^2 &= -h \\ g\tau^2 &= 2h \\ \tau &= \sqrt{\frac{2h}{g}} \doteq 0{,}89\,\mathrm{s} \end{aligned}$$

Zjištěný čas dosadíme do polohového vektoru a tím najdeme souřadnice dopadu.

$$\boldsymbol{r}(\tau) = \left[R\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}; R; -h\right]$$

Vzdálenost místa dopadu od osy rotace vypočteme pomocí Pythagorovy věty. Pravoúhlý trojúhelník je na obrázku zvýrazněn.

$$d = \sqrt{r_x^2 + r_y^2} = \sqrt{\left(R\omega\sqrt{\frac{2h}{g}}\right)^2 + R^2} = R\sqrt{\frac{\omega^2 2h}{g} + 1} \doteq 7{,}52\,\mathrm{m}$$

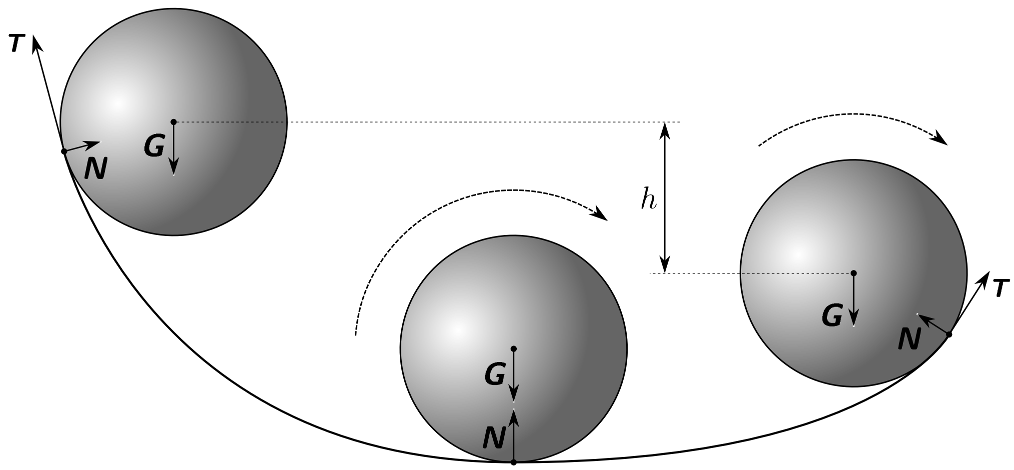
Jak vidíme, bota dopadla *dál* od středu než je poloměr otáčení kolotoče. Bota se pohybovala nejprve po kružnici a poté po parabole, která představuje trajektorii při vodorovném vrhu. Pojem *odstředivá síla* se v úvahách nikde nevyskytuje.

25. Valící se koule, translační a rotační energie

Vypočítejte rychlost koule, jestliže byla v klidu a pak se skutálela o h=0,2 m níže.

- Napište rovnici, která vychází ze zákona zachování energie.
- Jaký vztah platí mezi rychlostí a úhlovou rychlostí?
- Využijte skutečnosti, že moment setrvačnosti koule je $J = \frac{2}{5}mr^2$ a vypočítejte výsledek.

Řešení:



Jediným úkolem v tomto příkladu je vypočítat rychlost. Je to záměr, aby bylo možné využít pouze zákon zachování energie. Výhodou (a současně nevýhodou) je, že se ve výpočtu nikde nepoužije informace o tvaru dráhy. Koule se může pohybovat po různě zakřivené trajektorii a přesto dokážeme její rychlost spočítat, protože ta závisí jen na momentální výšce. Na druhou stranu, užitím zákona zachování energie nezjistíme závislost polohy na čase. Postup je použitelný i pro kouli valící se po nakloněné rovině anebo pro jojo, které klesá a současně rotuje. V těchto situacích to ale není rozumné, protože dokážeme vypočítat chování pomocí rozboru sil a momentů, což ve výsledku dává podrobnější informace.

Práce, kterou vykoná gravitační síla, je rovna součtu translační a rotační energie koule.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

Má-li se koule kutálet, pak platí, že $\omega = v/r$.

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\left(\frac{v}{r}\right)^2$$

V zadání je uveden moment setrvačnosti koule $J = \frac{2}{5}mr^2$, který do rovnice dosadíme a vyjádříme rychlost v:

$$\begin{aligned} mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\frac{2}{5}mr^2\frac{v^2}{r^2} \\ mgh &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{5}mv^2 \\ gh &= \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{5}v^2 \end{aligned}$$

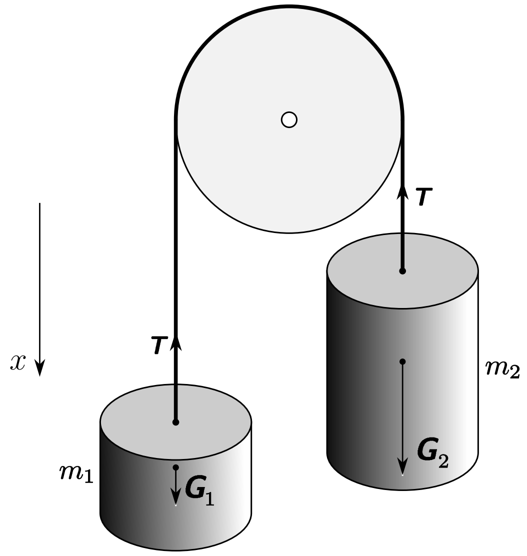
$$
\begin{aligned}
gh &= v^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)\\
gh &= \frac{7}{10}v^2\\
v &= \sqrt{\frac{10gh}{7}} \doteq 1{,}67\,\mathrm{m\,s^{-1}}
\end{aligned}
$$

26. Atwoodův padostroj

Vypočítejte zrychlení dvou závaží, která jsou přes lehkou kladku vzájemně spojena vláknem.

- Nakreslete obrázek, zvolte souřadnou osu a rozepište síly, které působí na jednotlivá závaží.
- Vyjádřete zrychlení každého z těles.
- Napište rovnici, která vystihuje, že vlákno má stále stejnou délku.
- Soustavu rovnic vyřešte a vyjádřete zrychlení jednoho z těles.
- Okomentujte, co se stane, když budou mít závaží stejnou hmotnost nebo když jedno z nich bude zcela chybět.
- Jaké zrychlení bude mít závaží, které je o deset procent těžší než druhé?

Řešení:



George Atwood (1746–1807) sestrojil toto zařízení jako školní pomůcku pro demonstraci zrychlení, sil a tíhy. Na rozdíl od volného pádu byl pohyb závaží dostatečně pomalý, aby se dal pohodlně měřit i tehdejšími nepřesnými hodinami.

Závaží budeme rozlišovat indexem jedna a dvě. Na závaží jedna, které je na obrázku vlevo, působí dvě síly, gravitační síla $\boldsymbol{G}_1$ a proti ní směřuje tah vlákna $\boldsymbol{T}$. Součet těchto dvou sil označme $\boldsymbol{F}_1$. Pro popis pohybu nám postačí jediná souřadná osa x, která nechť směřuje dolů. Rozepíšeme složky obou sil a z výsledné síly určíme zrychlení (zrychlení je síla dělená hmotností).

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{F}_1 &= \boldsymbol{G}_1 + \boldsymbol{T}\\
& F_1 &= m_1 g - T\\
I. \quad & a_1 &= g - \frac{T}{m_1}
\end{aligned}
$$

Stejnou úvahu použijeme i pro druhé závaží. Tahová síla, která působí na první závaží je stejná jako síla působící na druhé závaží. Proto u ní nemusíme používat rozlišovací index. Je to dáno tím, že *kladka je lehká*, tudíž má nulový moment setrvačnosti a nijak neovlivňuje tah ve vlákně.

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{F}_2 &= \boldsymbol{G}_2 + \boldsymbol{T}\\
& F_2 &= m_2 g - T\\
II. \quad & a_2 &= g - \frac{T}{m_2}
\end{aligned}
$$

Vlákno, kterým jsou závaží spojena, má stále stejnou délku, neprotahuje se ani nezkracuje. Zatímco jedno závaží se pohybuje nahoru, druhé se pohybuje stejnou rychlostí dolů. Rychlost obou těles musí být stejně velká, ale opačně orientovaná. Musí to platit nejen pro rychlosti, ale také pro zrychlení.

$$III. \qquad a_1 = -a_2$$

Tím jsme získali soustavu tří rovnic o třech neznámých. Můžeme postupovat například tak, že z druhé rovnice vyjádříme T

$$T = m_2 g - m_2 a_2$$

a dosadíme do první rovnice

$$a_1 = g - \frac{T}{m_1} = g - \frac{m_2 g - m_2 a_2}{m_1}$$

Nyní využijeme třetí rovnici a dosadíme za a_2. Pak již lze vypočítat zrychlení prvního závaží:

$$\begin{aligned} a_1 &= g - \frac{m_2 g + m_2 a_1}{m_1} \\ m_1 a_1 &= m_1 g - m_2 g - m_2 a_1 \\ a_1(m_1 + m_2) &= g(m_1 - m_2) \\ a_1 &= g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Jestliže budou mít závaží stejnou hmotnost, bude čitatel roven nule a zrychlení vyjde nulové. To se dalo očekávat, že dvě stejná závaží se budou pohybovat stále stejnou rychlostí nebo zůstanou v klidu. A jestliže například za m_2 dosadíme nulu, pak a_1 bude rovno tíhovému zrychlení. Opět to není nic překvapujícího, protože pád nebude ničím brzděn.

Kdyby jedno ze závaží bylo o deset procent těžší než to druhé, například $m_1 = 1{,}1\, m_2$, pak jeho zrychlení vyjde

$$a_1 = g\frac{1,1\, m_2 - m_2}{1,1\, m_2 + m_2} = g\frac{1,1 - 1}{1,1 + 1} = 0{,}467\,\mathrm{m\,s^{-2}}$$

což je 21× méně než tíhové zrychlení.
